Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 111. Berechnung des allgemeinen (schiefwinkligen) geodätischen Dreiecks

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Geodätischer Excess des rechtwinkligen Dreiecks.

Nach Fig. 1. S. 550 ist:

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + 90°) - 180° = \alpha + \beta - 90° \tag{28}$$

$$\sin \varepsilon = - \cos (\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \tag{29}$$

Da wir die Reihen für $s \sin \alpha$, $s \sin \beta$, sowie $s \cos \alpha$, $s \cos \beta$ in (20)—(23) haben, können wir die zwei zu (29) erforderlichen Produkte bilden, nämlich:

$$s^2 \sin \alpha \sin \beta = p\,q + \frac{p^3 q}{6}\,\frac{2\,k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{4} + \frac{k^2}{360} p^3 q\,(7\,p^2 - 16\,q^2)$$
$$+ \frac{p\,q^3}{6}\,\frac{k_\alpha + k_{90} + 2\,k_\beta}{4} + \frac{k^2}{36} p^3 q^3$$
$$+ \frac{k^2}{360} p\,q^3\,(-16\,p^2 + 7\,q^2)$$

$$s^2 \cos \alpha \cos \beta = p\,q - \frac{p\,q^3}{3}\,\frac{3k_\alpha + 3k_{90} + 2k_\beta}{8} - \frac{k^2}{360} p\,q^3\,(16\,p^2 + 8\,q^2)$$
$$- \frac{p^3 q}{3}\,\frac{2k_\alpha + 3k_{90} + 3k_\beta}{8} + \frac{k^2}{9} p^3 q^3$$
$$- \frac{k^2}{360} p^3 q\,(8\,p^2 + 16\,q^2)$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke von einander abzieht, und wenn man dabei die gleichartigen Glieder zusammen ordnet, so erhält man:

$$s^2 \sin \varepsilon = \frac{p\,q}{2}\,\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3}\,(p^2 + q^2) + \frac{15}{360} k^2 p\,q\,(p^2 - q^2)^2 \tag{30}$$

Hiezu hat man von (14):

$$\frac{p^2 + q^2}{s^2} = 1 + \frac{k_\alpha + 2\,k_{90} + k_\beta}{12\,s^2}\,p^2 q^2 + k^2 \ldots$$

Wenn man dieses in (30) einsetzt und in den Gliedern mit k^2 die einzelnen k_α, k_β, k_{90} nicht mehr unterscheidet (wie auch bei früheren Formeln in gleichem Falle nicht unterschieden wurde) und wenn man die Glieder von der Ordnung k^3 (ebenfalls wie bisher) ganz vernachlässigt, so erhält man aus (30):

$$\varepsilon = \frac{p\,q}{2}\,\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} + \frac{p\,q}{24} k^2 (p^2 + q^2) \tag{31}$$

Diese Formel, welche mit $\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} = \frac{1}{r^2}$ in die frühere sphärische Formel (3) S. 246 übergeht, sagt in Worten, dass man den geodätischen Excess eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks erhält, wenn man das Dreieck wie ein sphärisches Dreieck berechnet, dessen Kugelhalbmesser r dem arithmetischen Mittel der Krümmungsmasse k_α, k_{90}, k_β in den drei Ecken des Dreiecks entspricht.

Dieser Satz lässt sich auch leicht auf ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck ausdehnen, wie wir alsbald im nächsten § 111. sehen werden.

§. 111. Berechnung des allgemeinen (schiefwinkligen) geodätischen Dreiecks.

Mit den Reihen-Entwicklungen für das rechtwinklige geodätische Dreieck, welche wir in dem vorstehenden § 110. kennen gelernt haben, kann man durch Zusammensetzung zweier rechtwinkliger Dreiecke zu einem allgemeinen (schiefwinkligen) Dreieck auch die trigonometrische Berechnung solcher allgemeiner geodätischer Dreiecke zu stande bringen.

Wir werden dabei in gleicher Weise vorgehen, wie früher in § 44., wo wir mit Fig. 4. S. 248 aus den Formeln für zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke den erweiterten Legendreschen Satz hergeleitet haben. Ebenso werden wir nun die Formeln behandeln, durch welche Gauss im Jahre 1827 in Art. 25. der „Disquisitiones generales circa superficies curvas" den bedeutenden Schritt von Legendres Kugel-Satze zur Trigonometrie auf irgend einer krummen Fläche gemacht hat.

Indem wir im wesentlichen die früheren Bezeichnungen beibehalten, bilden wir in Fig. 1. ein geodätisches Dreieck mit den Seiten b, c und $a = q + q'$, indem eine Senkrechte p das Dreieck b, c, a in zwei rechtwinklige Dreiecke p, q, sowie p, q' zerlegt.

Fig. 1.

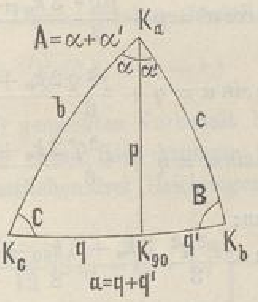
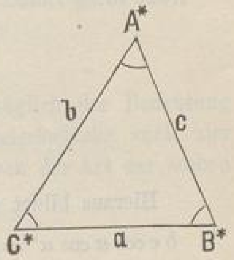


Fig. 2.



Sind ε_1 und ε_2 die geodätischen Excesse der beiden rechtwinkligen Teildreiecke, so ist nach (31) des vorigen § 110. S. 352:

$$\varepsilon_1 = \frac{p\,q}{2}\,\frac{k_a + k_{90} + k_c}{3} + k^2 \ldots \tag{1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{p\,q'}{2}\,\frac{k_a + k_{90} + k_b}{3} + k^2 \ldots \tag{2}$$

Indem wir zunächst die Glieder von der Ordnung k^2 bei Seite lassen, können wir uns leicht überzeugen, dass der Excess $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ des ganzen Dreiecks in erster Näherung (d. h. vorbehältlich der Glieder mit k^2) so berechnet wird:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{p\,(q + q')}{2}\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} \tag{3}$$

Um die Übereinstimmung dieser Formel (3) mit der Summe von (1) und (2) nachzuweisen, braucht man nur die der ganzen Theorie zu Grunde liegende Annahme einzuführen, dass das Krümmungsmass k eine lineare Funktion der Coordinaten auf der Fläche sein, also auf der Linie $a = q + q'$ sich proportional den Strecken q und q' ändern soll, d. h. es muss sein:

$$k_{90} = k_c + \frac{q}{q + q'}\,(k_b - k_c) \quad \text{oder} \quad k_{90}\,(q - q') = k_c\,q' + k_b\,q \tag{4}$$

und damit geht die Summe von (1) und (2) in (3) über. Man kann also nun die Gleichung (3) so schreiben:

$$\varepsilon = \frac{a\,p}{2}\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \ldots \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \ldots \tag{5}$$

Dabei soll $\triangle$ ein Näherungswert für die Fläche des Dreiecks sein, z. B. kann $\triangle$ statt $= \frac{a\,p}{2}$ auch die Fläche eines ebenen Dreiecks sein, das man aus den drei Seitenlängen a, b, c konstruiert. Wenn übrigens die in (5) vernachlässigten Glieder von der Ordnung k^2 berücksichtigt werden sollen, dann muss auch die Bedeutung von $\triangle$, z. B. ob es $= \frac{a\,p}{2}$ oder gleich der Fläche des ebenen Dreiecks a, b, c sein soll, unterschieden werden, weil je nach dieser Unterscheidung auch die höheren Glieder von der Ordnung k^2 verschieden ausfallen.

In Fig. 2. haben wir ein ebenes Dreieck gezeichnet, welches dieselben Seiten a, b, c wie das geodätische Dreieck Fig. 1. hat, aber deswegen andere Winkel A^*, B^*, C^* haben muss, deren Summe $= 180°$ ist, und deren Differenzen gegen die geodätischen Winkel A, B, C nun untersucht werden sollen.

Von (20)—(23) § 110. S. 551 haben wir folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} b \cos \alpha &= p - \frac{p\,q^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_c}{8} \\ c \cos \alpha' &= p - \frac{p\,q'^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_b}{8} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} b \sin \alpha &= q + \frac{p^2\,q}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_c}{4} \\ c \sin \alpha' &= q' + \frac{p^2 q'}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_b}{4} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hieraus bildet man:

$$b\,c \cos \alpha \cos \alpha' = p^2 - \frac{p^2\,q^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_c}{8} - \frac{p^2 q'^2}{3}\,\frac{3\,k_a + 3\,k_{90} + 2\,k_b}{8}$$

$$b\,c \sin \alpha \sin \alpha' = q\,q' + \frac{p^2\,q\,q'}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} + k_c}{4} + \frac{p^2\,q\,q'}{6}\,\frac{2\,k_a + k_{90} = k_b}{4}$$

Da $\alpha + \alpha' = A$, also $\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' = \cos A$ ist, erhält man hieraus:

$$\left.\begin{aligned} b\,c \cos A = p^2 - q\,q' &- \frac{p^2\,k_a}{24}(3\,q^2 + 3\,q'^2 + 4\,q\,q') - \frac{p^2\,k_c}{24}(2\,q^2 + q\,q') \\ &- \frac{p^2\,k_{90}}{24}(3\,q^2 + 3\,q'^2 + 2\,q\,q') - \frac{p^2\,k_b}{24}(2\,q'^2 + q\,q') \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Zwischen den verschiedenen Dreiecksseiten bestehen Beziehungen, nämlich nach (14) § 110. S. 550:

$$b^2 = p^2 + q^2 - \frac{p^2\,q^2}{3}\,\frac{k_a + 2\,k_{90} + k_c}{4} \tag{9}$$

$$c^2 = p^2 + q'^2 - \frac{p^2\,q'^2}{3}\,\frac{k_a + 2\,k_{90} + k_b}{4} \tag{10}$$

Nun wird nach Fig. 2. das ebene Dreieck betrachtet, welches dieselben Seitenlängen b, c und $a = q + q'$ hat wie das geodätische Dreieck Fig. 1., während die Winkel andere werden, nämlich A^*, B^*, C^*.

Dieses Dreieck Fig. 2. giebt die Gleichung:

$$a^2 = (q + q')^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A^* \tag{11}$$

Man hat also aus (11), (10) und (9):

$$\begin{aligned} 2\,b\,c \cos A^* &= b^2 + c^2 - (q^2 + q'^2 + 2\,q\,q') \\ &= 2\,p^2 - 2\,q\,q' - \frac{k_a\,p^2}{12}(q^2 + q'^2) - \frac{k_{90} p^2}{6}(q^2 + q'^2) - \frac{k_c\,p^2}{12}\,q^2 - \frac{k_b\,p^2}{12}\,q'^2 \end{aligned}$$

Vergleicht man dieses mit (8), so erhält man:

$$\begin{aligned} b\,c\,(\cos A^* - \cos A) &= \frac{p^2\,k_a}{24}(2\,q^2 + 2\,q'^2 + 4\,q\,q') + \frac{p^2\,k_{90}}{24}(q^2 + q'^2 + 2\,q\,q') \\ &\quad + \frac{p^2 k_c}{24}(q^2 + q\,q') + \frac{p^2\,k_b}{24}(q'^2 + q\,q') \end{aligned}$$

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2\,(q + q')}{24}\Big(2\,k_a\,(q + q') + k_{90}\,(q + q') + k_c\,q + k_b\,q'\Big) \tag{12}$$

Hier ist wieder das Krümmungsmass k_{90} mit Hilfe der Gleichung (4) zu eliminieren; dadurch bekommt man aus (12):

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2\,(q+q')^2}{24}\,(2\,k_a + k_b + k_c) \tag{13}$$

Hier ist:

$$\cos A^* - \cos A = (A - A^*)\sin A^*$$

und

$$b\,c\sin A^* = p\,(q+q') = 2\,\triangle$$

wobei $\triangle$ ein Näherungswert für die Dreiecksfläche sein soll. Damit giebt (13):

$$A - A^* = \frac{\triangle}{12}\,(2\,k_a + k_b + k_c)$$

Indem wir den schon bei (5) gemachten Vorbehalt bezüglich der Bedeutung von $\triangle$ als erster Näherung für die ebene oder krumme Dreiecksfläche auch hier machen müssen, schreiben wir die sämtlichen drei Gleichungen von der Art der soeben gefundenen zusammen:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{12}\,(2\,k_a + k_b + k_c) \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{12}\,(k_a + 2\,k_b + k_c) \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{12}\,(k_a + k_b + 2\,k_c) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\text{Summe:}\quad \varepsilon = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} \tag{15}$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, wie die schon bei (5) gefundene, und wenn wir die Glieder von der Ordnung k^2 vernachlässigen wollen, so ist die sphäroidische Dreiecks-Berechnung durch die Formeln (14) und (15) erledigt, ebenso wie die sphärische Dreiecks-Berechnung durch den einfachen Legendre schen Satz (11)—(12) § 42. S. 236 bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, aber $\frac{1}{r^4}$ ausschliesslich, bestimmt war.

Um nun in unserem Falle auch noch die Glieder von der Ordnung k^2 $\left(\text{entsprechend } \frac{1}{r^4}\right)$ zu finden, können wir die ganze vorstehende Entwicklung (6)—(15) mit Zusetzung aller Glieder von der Ordnung k^2 wiederholen, und es ist dabei nur etwa das eine besonders zu bemerken, dass dann die Dreiecksfläche $\triangle$ nicht mehr nach Belieben $= \frac{a\,p}{2}$ oder $= \frac{b\,c}{2}\sin A^*$ gesetzt werden darf.

Indem wir für Entwicklung mit Gliedern k^2 nun festsetzen, dass $\triangle$ die Fläche des ebenen aus den drei Seitenlängen a, b, c zu konstruierenden Hilfsdreiecks Fig. 2. sein soll, erhalten wir eine Beziehung zwischen $p\,(q+q')$ und $\triangle$, zunächst durch weitere Benützung der Gleichungen (6) und (7), nämlich:

$$\sin A = \sin(\alpha + \alpha') = \sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha'$$

$$b\,c\sin A = p\,(q+q')\left(1 + \frac{k}{6}\,(p^2 - 2\,q\,q')\right)$$

$$b\,c\sin A = b\,c\left(\sin A^* + \frac{\triangle}{3}\,k\cos A^*\right) \text{ u. s. w.}$$

Da hiemit der Weg zur Entwicklung von $A - A^*$ bis auf Glieder k^2 einschliesslich verzeichnet ist, beschränken wir uns im weiteren, das Schluss-Ergebnis der Entwicklung hier mitzuteilen, umsomehr als die Glieder mit k^2, wenn man innerhalb derselben keine Unterscheidung zwischen k_a, k_b, k_c mehr macht, lediglich sphärische Form annehmen, und nichts anderes sind, als die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ in den Formeln (31a), 32a), (33a) § 44, S. 251, welche wir den Formeln (14) schlechthin zuzusetzen berechtigt sind.

Entweder durch solche Zusetzung, oder durch unmittelbare Weiter-Entwicklung für das geodätische Dreieck bis k^2 findet man:

$$\left.\begin{aligned}
A - A^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{2k_a + k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{15} \\
B - B^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{k_a + 2k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{7a^2 + b^2 + 7c^2}{15} \\
C - C^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{k_a + k_b + 2k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{7a^2 + 7b^2 + c^2}{15}
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + \frac{\triangle}{8}\,k^2\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad (17)$$

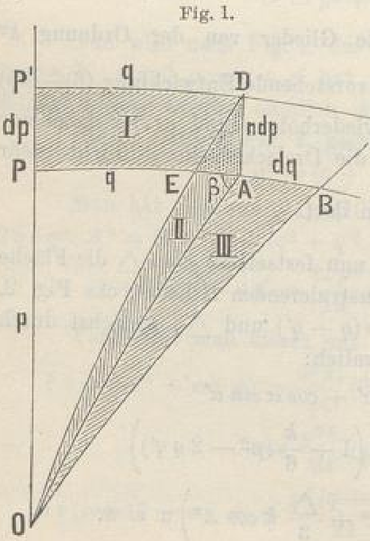
Durch diese Formeln (16) und (17) ist die Auflösung eines geodätischen Dreiecks auf die Auflösung eines ebenen Dreiecks zurückgeführt, also vollkommen erledigt, und weitere Formeln sind nicht nötig.

Wenn wir jedoch die sphärischen Vorbilder unserer Formeln in § 44. S. 251—252 betrachten, so finden wir, dass uns das Analogon zu (35), (38) und (39), S. 251—252 fehlt, das zum praktischen Rechnen zwar nicht erforderlich, aber doch so interessant ist, dass wir im nächsten § 112. uns damit beschäftigen werden.

§ 112. Krumme Oberfläche des geodätischen Dreiecks.

Wir nehmen in Fig. 1. die Vereinigung eines rechtwinkligen und eines Polar-Systems von geodätischen Coordinaten auf der krummen Fläche wieder vor.

Fig. 1.



Der Punkt A hat in dem rechtwinkligen geodätischen Coordinaten - System mit dem Ursprung O die Abscisse $OP = p$ und die Ordinate $PA = q$, und das dadurch bestimmte rechtwinklige Dreieck OPA habe die krumme Fläche $= E$.

Um das Differential dF zu bestimmen, untersuchen wir, um was sich die Fläche F ändert, wenn p und q bzw. sich um dp und dq ändern.

Wenn P allein sich ändert, so rückt der Punkt A in der geodätischen Parallele von A nach D, und die Flächen-Änderung ist $= I - II$, wobei mit I der Streifen $PP'DA$ und mit II das schmale Dreieck ODA bezeichnet, und das kleine Dreieckchen mit den Katheten AD und DE vernachlässigt wird. Man kann also schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\,dp = I - II \quad (1)$$