Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 112. Krumme Oberfläche des geodätischen Dreiecks

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Da hiemit der Weg zur Entwicklung von $A - A^*$ bis auf Glieder k^2 einschliesslich verzeichnet ist, beschränken wir uns im weiteren, das Schluss-Ergebnis der Entwicklung hier mitzuteilen, umsomehr als die Glieder mit k^2, wenn man innerhalb derselben keine Unterscheidung zwischen k_a, k_b, k_c mehr macht, lediglich sphärische Form annehmen, und nichts anderes sind, als die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ in den Formeln (31a), 32a), (33a) § 44, S. 251, welche wir den Formeln (14) schlechthin zuzusetzen berechtigt sind.

Entweder durch solche Zusetzung, oder durch unmittelbare Weiter-Entwicklung für das geodätische Dreieck bis k^2 findet man:

$$\left.\begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{2\,k_a + k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{a^2 + 7\,b^2 + 7\,c^2}{15} \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{k_a + 2\,k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{7\,a^2 + b^2 + 7\,c^2}{15} \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{3}\,\frac{k_a + k_b + 2\,k_c}{4} + \frac{\triangle}{24}\,k^2\,\frac{7\,a^2 + 7\,b^2 + c^2}{15} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \triangle\,\frac{k_a + k_b + k_c}{3} + \frac{\triangle}{8}\,k^2\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \tag{17}$$

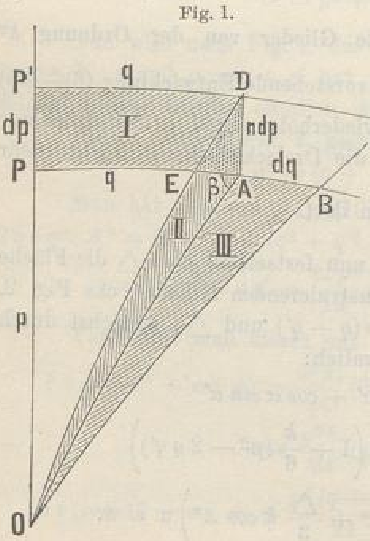
Durch diese Formeln (16) und (17) ist die Auflösung eines geodätischen Dreiecks auf die Auflösung eines ebenen Dreiecks zurückgeführt, also vollkommen erledigt, und weitere Formeln sind nicht nötig.

Wenn wir jedoch die sphärischen Vorbilder unserer Formeln in § 44. S. 251—252 betrachten, so finden wir, dass uns das Analogon zu (35), (38) und (39), S. 251—252 fehlt, das zum praktischen Rechnen zwar nicht erforderlich, aber doch so interessant ist, dass wir im nächsten § 112. uns damit beschäftigen werden.

§ 112. Krumme Oberfläche des geodätischen Dreiecks.

Wir nehmen in Fig. 1. die Vereinigung eines rechtwinkligen und eines Polar-Systems von geodätischen Coordinaten auf der krummen Fläche wieder vor.

Fig. 1.



Der Punkt A hat in dem rechtwinkligen geodätischen Coordinaten - System mit dem Ursprung O die Abscisse $OP = p$ und die Ordinate $PA = q$, und das dadurch bestimmte rechtwinklige Dreieck OPA habe die krumme Fläche $= E$.

Um das Differential dF zu bestimmen, untersuchen wir, um was sich die Fläche F ändert, wenn p und q bzw. sich um dp und dq ändern.

Wenn P allein sich ändert, so rückt der Punkt A in der geodätischen Parallele von A nach D, und die Flächen-Änderung ist $= I - II$, wobei mit I der Streifen $PP'DA$ und mit II das schmale Dreieck ODA bezeichnet, und das kleine Dreieckchen mit den Katheten AD und DE vernachlässigt wird. Man kann also schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\,dp = I - II \tag{1}$$

In gleicher Weise hat man auch:

$$\frac{\partial F}{\partial q}\, d\, q = III \tag{2}$$

wenn mit III das schmale Dreieck $O\,A\,B$ bezeichnet wird.

Um die drei Flächenteile I, II, III näher zu untersuchen, beginnen wir mit I, welches ist:

$$I = \int n\, d\, p\, d\, q = d\, p \int n\, d\, q \tag{3}$$

Dabei ist $d\, p$ als Basis $P\,P'$ des Streifens I konstant.

Das Dreieck II lässt sich zu III in Beziehung setzen durch das Verhältnis $E\,A : A\,B$, nämlich:

$$II : III = F\,A : A\,B$$

Dabei ist $A\,B = d\,q$ und $E\,A = n\,d\,p\, cotg\, \beta$; daraus folgt mit Rücksicht auf (2):

$$II = \frac{\partial F}{\delta\, q}\, n\, d\, p\, cotg\, \beta \tag{4}$$

Man hat also nun aus (1), (3) und (4):

$$\frac{\partial F}{d p}\, d\, p = d\, p \int n\, d\, q - n\, d\, p\, cotg\, \beta\, \frac{\partial F}{d\, q}$$

Der Faktor $d\, p$ fällt fort, und dann hat man:

$$sin\, \beta\, \frac{\partial F}{\partial p} + cos\, \beta\, n\, \frac{\partial F}{\partial q} = sin\, \beta \int n\, d\, q$$

oder, weil $sin\, \beta$ und $cos\, \beta$ von den früheren Entwicklungen nur in den Produkten $s\, sin\, \beta$ und $s\, cos\, \beta$ vorhanden sind, schreiben wir:

$$s\, sin\, \beta\, \frac{\partial F}{\partial p} + n\, s\, cos\, \beta\, \frac{\partial F}{\partial q} = s\, sin\, \beta \int n\, d\, q \tag{5}$$

Diese zur Bestimmung von F dienende Gleichung soll in Übereinstimmung gebracht werden mit der folgenden Gleichung, deren Coëfficienten A, B, C, D zunächst unbestimmt eingeführt werden:

$$F = \frac{1}{2}\, p\, q + A\, p^2 + B\, q^2 + C\, p^2\, q + D\, p\, q^2 \tag{6}$$

Nach Anleitung von (5) wird hieraus gebildet:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{2}\, q + 2\, A\, p + 2\, C\, p\, q + D\, q^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{2}\, p + 2\, B\, q + C\, p^2 + 2\, D\, p\, q$$

Hiezu nehmen wir in erster Näherung von (18) und (19) S. 551 und (16) S. 548:

$$s\, sin\, \beta = p \qquad s\, cos\, \beta = q \qquad n = 1 + f_0\, q^2$$

Wenn man hiemit die Gleichung (5) bildet, und mit (6) vergleicht, so findet man $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, d. h. die Reihe für F hat keine Glieder von der Form p^2, q^2, $p^2\, q$, $p\, q^2$.

Nachdem dieses erkannt ist, wird als neue Form angenommen:

$$F = \frac{1}{2}\, p\, q + A\, p^3\, q + B\, p^2\, q^2 + C\, p\, q^3 \tag{7}$$

Hieraus wird $\frac{\partial F}{\partial p}$ und $\frac{\partial F}{\partial q}$ gebildet, hiezu in zweiter Näherung von (18), (19) § 110. S. 551 nebst (16) § 109. S. 548:

$$s \sin \beta = p - \frac{1}{3} f_0 \, p \, q^2 \qquad s \cos \beta = q + \frac{2}{3} f_0 \, p^2 q$$
$$n = 1 + f_0 \, q^2$$

Dieses wird in (5) eingesetzt, der entstehende Ausdruck mit (7) verglichen, wodurch sich ergeben wird:

$$4 A = -\frac{1}{3} f_0 \qquad 4 B = 0 \qquad 4 C = -\frac{1}{3} f_0$$

Und setzt man auch noch nach (13) § 110. S. 550, $2 f_0 = -k$, so giebt (7):

$$F = \frac{1}{2} p \, q + \frac{p \, q}{24} k \, (p^2 + q^2) \tag{8}$$

In der nächsten Stufe haben wir 4 weitere unbestimmte Glieder zugesetzt von der Form $A \, p^4 q + B \, p^3 q^2 + B' \, p^2 q^3 + A' \, p \, q^4$, wozu auch $s \sin \beta$, $s \cos \beta$ und n entsprechend höher zu nehmen waren. Die Ausführung und Coëfficienten-Vergleichung nach dem bisherigen Verfahren gab:

$$F = \frac{1}{2} p \, q + \frac{p \, q}{120} \left(-10 f_0 \, p^2 - 10 f_0 \, q^2 - 6 f_1 \, p^3 - 9 \, g_0 \, p^2 q - 7 f_1 \, p \, q^2 - 12 \, g_0 \, q^3 \right)$$

Wenn man hier wieder die Krümmungsmasse nach (13) § 110. S. 550 einführt, so kann man den vorstehenden Ausdruck für F auf folgende Form bringen:

$$F = \frac{p \, b}{2} + \frac{p \, q}{240} \left\{ k_\alpha (4 p^2 + 3 q^2) + k_{90} (3 p^2 + 3 q^2) + k_\beta (3 p^2 + 4 q^2) \right\} \tag{9}$$

Setzt man die verschiedenen k_α, k_β, k_γ hier einander gleich, schlechthin $= k$, so erhält man wieder die Gleichung (8).

Nun kommt es darauf an, von der Fläche F eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks überzugehen auf die Fläche eines allgemeinen Dreiecks mit beliebigen Winkeln. Der Weg hiezu ist bereits durch die Entwicklung von § 110. mit Fig. 1. S. 553 vorgezeichnet; wir werden wieder das allgemeine Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, und haben dann, die Flächen der beiden rechtwinkligen Dreiecke nach dem bisherigen mit F_1 und F_2 bezeichnend, und für die Gesamtfläche das Zeichen F annehmend:

$$F = F_1 + F_2 \tag{10}$$

Wenn wir die Formel (9) für die Fläche F eines rechtwinkligen Dreiecks, auf die beiden Teile von Fig. 1. anwenden, so haben wir:

$$F_1 = \frac{p \, q}{2} + \frac{p \, q}{240} \left(k_a (4 p^2 + 3 q^2) + k_{90} (3 p^2 + 3 q^2) + k_c (3 p^2 + 4 q^2) \right)$$

$$F_2 = \frac{p \, q'}{2} + \frac{p \, q'}{240} \left(k_a (4 p^2 + 3 q'^2) + k_{90} (3 p^2 + 3 q'^2) + k_b (3 p^2 + 4 q'^2) \right)$$

Hiezu hat man nach (24)—(27) §. 110. S. 551:

$$p = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{90} + 2 k_c}{8} \right), \quad p = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{90} + 2 k_b}{8} \right)$$

$$q = b \sin \alpha \left(1 + \frac{p^2}{6} \frac{2 k_a + k_{90} + k_c}{4} \right), \quad q' = c \sin \alpha' \left(1 - \frac{p^2}{6} \frac{2 k_a + k_{90} + k_b}{4} \right)$$

$$p = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{90} + 2 k_b}{8} \right), \quad p = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{90} + 3 k_b}{8} \right)$$

Dadurch ist der Weg gezeigt, auf welchem man die krumme Dreiecksfläche F zunächst in p, q' q' nebst den verschiedenen k ausdrücken kann. Dann hat man verschiedene geometrische Beziehungen in dem Dreieck selbst, z. B. $p^2 + q^2 = b^2$, $p^2 + q'^2 = c^2$ als erste Näherungen u. s. w. Wenn man nach diesen Andeutungen die Rechnung durchführt, so wird man erhalten:

$$F = \frac{b\,c\sin A}{2}\left\{1 + \frac{1}{120}k_a(3\,b^2 + 3\,c^2 - 12\,b\,c\cos A) + \frac{1}{120}k_b(3\,b^2 + 4\,c^2 - 9\,b\,c\cos A) + \frac{1}{120}k_c(4\,b^2 + 3\,c^2 - 9\,b\,c\cos A)\right\} \tag{11}$$

Diese Gleichung (11), welche man auch noch in zwei anderen Formen mit $a\,c\sin B$ und mit $a\,b\sin C$, anschreiben kann, ist nicht symmetrisch, weil eines der drei Elemente A, B, C bzw. a, b, c bevorzugt ist. Wir wollen deshalb $b\,c\sin A$ durch $\triangle$ ersetzen, und haben hiezu von (14) § 111. S. 553:

$$A = A^* + \frac{\triangle}{3}\,\frac{2\,k_a + k_b + k_c}{4}$$

und im ebenen Dreieck: $\quad 2\,b\,c\cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$

Da man in den Gliedern zweiter Ordnung von (11) stets A mit A^* vertauschen darf, kann man mittelst der soeben geschriebenen zwei Gleichungen die (11) auf folgende Form bringen:

$$F = \triangle\left\{1 + \frac{1}{120}k_a(a^2 + 2\,b^2 + 2\,c^2) + \frac{1}{120}k_b(2\,a^2 + b^2 + 2\,c^2) + \frac{1}{120}k_c(2\,a^2 + 2\,b^2 + c^2)\right\} \tag{12}$$

Setzt man hier $k_a = k_b = k_c = k$, so erhält man:

$$F = \triangle\left(1 + \frac{1}{24}k\,(a^2 + b^2 + c^2)\right) \tag{13}$$

Dieses entspricht dem früheren (36) S. 251, und damit kann man auch (31)—(42) von S. 251—252 leicht auf unseren Fall übertragen, was in der Formel-Zusammenstellung des 113. geschehen soll.

In der vorigen 3. Auflage dieses Bandes, 1890, S. 480—488, hatten wir hier eine zweite Begründung der Grundformeln geodätischer Dreiecke eingeschaltet (auch in teilweise anderer Form früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1889", S. 295—304 gegeben), welche auf das Prinzip der reduzierten Breite (Kap. IX) gegründet, ein sphärisches Hilfsdreieck benützt. Dieses mag diesesmal übergangen werden.

§ 113. Praktische Anwendung der allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und 2. S. 553.)

Wir wollen zuerst die verschiedenen von § 111. und § 112. zur praktischen Anwendung geeigneten Formeln zusammenstellen, und dazu auch noch einige zusammenfassende Bezeichnungen einführen. Wenn die Krümmungsmasse in den drei Ecken eines Dreiecks mit k_a, k_b, k_c bezeichnet sind, so nehmen wir hiezu einen Mittelwert:

$$\frac{k_a + k_b + k_c}{3} = k_0 \tag{1}$$