Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 114. Bestimmung der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Grandmessungen

$= 105\,173{,}9^m$ und $A\,B = c = 269\,845{,}7^m$. Damit konnte weiter gerechnet werden $log \triangle = 10.143\,6726$ und $\varepsilon = 70{,}7607''$ und endlich:

$$A' - A^* = 23{,}5866'' \qquad B' - B^* = 23{,}5866'' \qquad C - C^* = 23{,}5875'' \qquad (22)$$

Zieht man diese (22) von den A', B', C' in (21) ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} A^* &= 22^\circ\ 28'\ 21{,}644'' \\ B^* &= 78^\circ\ 48'\ 21{,}811'' \\ C^* &= 78^\circ\ 43'\ 15{,}733'' \\ \hline \text{Summe} &= 179^\circ\ 59'\ 59{,}188'' \\ w &= -0{,}812'' \end{aligned} \qquad (23)$$

Dieser nun noch bleibende Widerspruch $w = -0{,}812''$ rührt von den Beobachtungs-Fehlern her. Die geodätische Winkel-Reduktion an sich ist damit vollendet.

Wenn man die praktische Frage aufwirft, ob die kleinen Reduktionen, mit denen wir uns hier beschäftigt haben, bei Triangulierungen in Rechnung zu bringen sind, so wird man beim heutigen Stande der Beobachtungskunst diese Frage für die gewöhnlichen kleinen Dreiecke und geringen Höhen verneinen; dagegen bei solch grossen Verhältnissen, wie diejenigen der Triangulierung zwischen Spanien und Algier, sind kleine Grössen wie die unter (20) erhaltenen neben einem nur etwa 8 mal grösseren Messungs-Fehler w nach gewöhnlicher Anschauung nicht zu vernachlässigen.

Dieses betrifft diejenigen Reduktionen, deren Theorie in den früheren §§ 66., 67. und 71. behandelt worden ist. Die kleinen Grössen, welche durch die Theorie dieses Kapitels X. § 110.—§ 112 gewonnen wurden, sind noch erheblich kleiner, und der praktische Gewinn unseres ganzen Kapitels X. beschränkt sich also sogar bei der grossen spanisch-algierischen Triangulierung auf Glieder von 0,001″ Betrag.

Wenn hiernach die Theorie der Gauss schen „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ sich hier nur als schöne Theorie zeigt, welche man in der Praxis kaum unmittelbar braucht, so ist die Theorie damit doch auch praktisch nicht überflüssig, denn ohne diese Theorie wüsste man eben nicht, dass die zweifellos vorhandenen Einflüsse der Abplattung der Erde in diesem Falle so wenig ausmachen, und die höheren sphärischen Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ in § 44. würden ohne die Kenntnis der sphäroidischen Glieder wertlos sein.

Kapitel XI.

Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

§ 114. Bestimmung der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen.

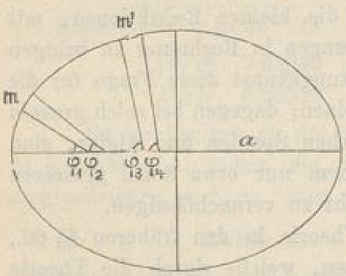
Das älteste Mittel zur Bestimmung der Erddimensionen sind die sogenannten Breiten-Gradmessungen, deren Geschichte wir in der Einleitung S. 1—9 mitgeteilt haben.

Unter einer Breiten-Gradmessung versteht man die Messung eines Meridianbogens der Erde und der Polhöhen oder geographischen Breiten seiner Endpunkte.

Wenn man die Messungs-Ergebnisse zweier solcher Gradmessungen unter verschiedenen Breiten kennt, so kann man die Dimensionen der dadurch bestimmten Meridian-Ellipse berechnen.

Ehe wir uns damit beschäftigen, ist eine Bemerkung über die Messung der Meridianbögen zu machen. Geradezu auf einem Meridian der Erde eine Linie unmittelbar zu messen, das war das Bestreben der ersten Gradmesser (vgl. z. B. S. 3, arabische Gradmessung und S. 7, amerikanische Gradmessung), und wenn der gemessene Bogen einen kleinen Winkel α mit der Meridianrichtung bildete, so konnte man leicht eine Reduktion auf den Meridian ausführen, welche im wesentlichen in der Multiplikation des gemessenen Bogens mit $\cos\alpha$ besteht. Auch Triangulierungsketten, welche nach ihrer Haupterstreckung nahe der Meridianrichtung liegen, lassen sich auf den Meridian reduzieren, wie wir ausführlicher im nächsten § 115. zeigen werden.

Fig. 1.
Zwei Breiten-Gradmessungen.



Nach Andeutung von Fig. 1. nehmen wir nun an, man habe zwei Gradmessungen in demselben Meridian, oder, was hier dasselbe ist, zwei Gradmessungen, deren Elemente in einer Meridian-Ellipse dargestellt sind. Die erste Gradmessung habe den Meridianbogen m mit den Breiten φ_1 und φ_2 seiner Endpunkte, und die zweite Gradmessung entsprechend den Meridianbogen m' mit den Breiten φ_3 und φ_4. Zur Abkürzung wollen wir hiezu schreiben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varDelta\varphi \qquad \varphi_4 - \varphi_3 = \varDelta\varphi' \tag{1}$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \qquad \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2} = \varphi' \tag{2}$$

Nun wissen wir von § 35. S. 210 und S. 219, dass man die Länge m eines mässig grossen Meridianbogens als Kreisbogen berechnen kann, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungs-Halbmesser M für die Mittelbreite φ, und dessen Centriwinkel die Breiten-Differenz $\varDelta\varphi$ ist; d. h. man hat für die beiden Gradmessungen:

$$m = \frac{\varDelta\varphi}{\varrho} M \qquad m' = \frac{\varDelta\varphi'}{\varrho} M' \tag{3}$$

Dabei ist nach (21) und (19) S. 196—197:

$$M = \frac{c}{V^3} \qquad M' = \frac{c}{V'^3} \tag{4}$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi \qquad V'^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi' \tag{5}$$

Wenn man diese (5) und (4) in (3) einsetzt, und dann die beiden Gleichungen (3) dividiert, so erhält man:

$$\left(\frac{m}{m'}\frac{\varDelta\varphi'}{\varDelta\varphi}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1 + e'^2\cos^2\varphi'}{1 + e'^2\cos^2\varphi} \tag{6}$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\left(\frac{m}{m'}\frac{\varDelta\varphi'}{\varDelta\varphi}\right)^{\frac{2}{3}} = q^2 \tag{6a}$$

Die Gleichung (6) ist in Bezug auf e'^2 linear, und kann daher geradezu nach e'^2 aufgelöst werden. Wenn man dabei die Abkürzung (6a) benützt, so erhält man

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} \tag{7}$$

Hat man hieraus e'^2 berechnet, so erhält man mit Probe aus (3), (4) und (5):

$$c = \frac{m}{\varDelta\varphi}\varrho\, V^3 \qquad \text{oder} \qquad c = \frac{m'}{\varDelta\varphi'}\varrho\, V'^3 \tag{8}$$

Die beiden Ellipsen-Halbaxen a und b erhält man aus c und e'^2 nach (18) S. 196:

$$a = \frac{c}{\sqrt{1+e'^2}} \qquad b = \frac{c}{1+e'^2} \tag{9}$$

wobei man nochmals zur Probe bilden kann:

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2$$

Damit hat man auch e^2 und die Abplattung α nach (5) und (7) S. 189:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2} \;, \quad \alpha = 1 - \sqrt{1-e^2} \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} \tag{10}$$

Auch die Länge des Meridian-Quadranten Q kann nach (246) S. 215 berechnet werden:

$$Q = a\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) \tag{11}$$

Zur Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir die bekannten klassischen Gradmessungen von Peru und Lappland benützen.

Nach Bessels Angabe im 14. Band, 1837, der „Astr. Nachr." S. 334 und S. 337 sind die Ergebnisse der Gradmessungen in Peru und Lappland (Schweden) die folgenden:

Gradmessung in Peru:

$$\left.\begin{array}{l} m = 176\,875{,}5 \text{ Toisen} = 344\,736{,}772 \text{ Meter} \\ \varphi_1 = -3^\circ\, 4'\, 32{,}068'' \qquad \varphi_2 = +0^\circ\, 2'\, 31{,}387'' \end{array}\right\} \tag{12}$$

Gradmessung in Lappland:

$$\left.\begin{array}{l} m' = 92\,777{,}981 \text{ Toisen} = 180\,827{,}654 \text{ Meter} \\ \varphi_3 = 65^\circ\, 31'\, 30{,}265 \qquad \varphi_4 = 67^\circ\, 8'\, 49{,}830'' \end{array}\right\} \tag{13}$$

Man bildet hieraus die Differenzen und die Mittel:

$$\begin{array}{ll} \Delta\varphi = 3^\circ\, 7'\, 3{,}455'' & \Delta\varphi' = 1^\circ\, 37'\, 19{,}565'' \\ \quad = 11\,223{,}455'' & \quad = 5839{,}565'' \\ \varphi = -1^\circ\, 31'\, 30{,}3405'' & \varphi' = 66^\circ\, 20'\, 10{,}0475'' \end{array}$$

Nun rechnet man nach den angegebenen Formeln:

$$log\frac{m}{\Delta\varphi} = 1.487\,3610{\cdot}4 \qquad log\frac{m'}{\Delta\varphi'} = 1.490\,8843.5 \qquad log\, q^2 = 9.997\,6511{\cdot}3$$

$$e'^2 = \frac{1 - 0{,}994\,606{\cdot}119}{0{,}993\,901\,593 - 0{,}161\,096\,660} = 0{,}006\,476\,764$$

$$log\, V^2 = 0.0028017{\cdot}7 \qquad log\, V'^2 = 0.000\,4529{\cdot}0$$

$$log\, c = 6.805\,9888{\cdot}4 \qquad log\, a = 6.804\,5869{\cdot}6 \qquad log\, b = 6.803\,1850{\cdot}8$$

$$\alpha = 1 : 310{,}29534 \qquad Q = 10\,000\,157 \text{ Meter} \tag{14}$$

Wenn man statt e'^2 zuerst e^2 haben will, so kann man dieses aus (7) ableiten, denn es ist nach (5) § 31. S. 189, mit Anwendung auf (7):

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2} = \frac{1-q^2}{sin^2\varphi' - q^2\, sin^2\varphi} \tag{15}$$

Auf dieselbe Formel wird man auch unmittelbar dadurch geführt, dass man von vornherein statt c und e'^2 und V^2 mit den Konstanten a, e^2 und W^2 rechnet:

$$W^2 = 1 - e^2 sin^2\varphi \qquad W'^2 = 1 - e^2 sin^2\varphi' \tag{16}$$

Wenn man dieses ebenso behandelt, wie früher (3) — (6), so wird man auf (16) geführt, worauf aus (17) auch a mit Probe folgt.

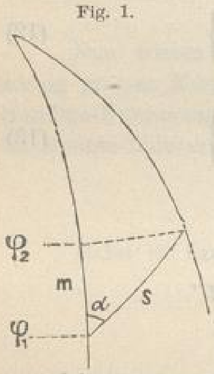
Berechnungen von solcher Art spielten eine wichtige Rolle in der Zeit der Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts (vgl. Einleitung S. 7); heute ist dieses nicht mehr der Fall, indem die Frage nach den Erddimensionen jetzt in anderer Form auftritt.

§ 115. Reduktion eines Gradmessungs-Bogens auf den Meridian.

Wir haben die am Eingange des vorigen § 114. berührte Aufgabe nun nachzuholen, nämlich Berechnung des Meridianbogens m, welcher einem schief gegen den Meridian gelegten Gradmessungs-Bogen s zwischen den Breiten der Endpunkte entspricht. Oder im Anschluss an die nachfolgende Fig. 1. haben wir die Aufgabe, den Meridianbogen m zu berechnen, welcher zwischen denselben Breiten φ_1 und φ_2 liegt, wie ein schief gelegter Bogen $AB = s$, dessen Richtung wenigstens durch *ein* Azimut α bestimmt ist.

Der Bogen s kann unmittelbar gemessen sein, im allgemeinen ist aber anzunehmen, dass dieser Bogen s als lange Diagonale einer Triangulierungskette nach Art von AB in Fig. 2. S. 388 oder Fig. 3. S. 389 berechnet sei, wobei die Haupterstreckung AB nach dem Meridian gerichtet ist. Dabei ist angenommen, dass auch das Azimut α, dessen astronomische Messung nicht geradezu auf die Sicht der Linie s gemacht werden konnte, durch Rechnung auf s bezogen wurde.

Fig. 1.



Hiernach kann man das Ergebnis s mit einem Azimut α (oder mit zwei Azimuten α_1, α_2, nach Fig. 3. S. 571) als geodätische Linie mit geodätischen Azimuten betrachten, und als solche weiter behandeln.

Wir betrachten nun zuerst nach Fig. 1. den einfachen Fall, dass nur *ein* Azimut α gemessen sei; wir wollen dann aber als Erleichterung andererseits annehmen, dass dieses α ziemlich *klein* sei, d. h. dass der Gradmessungs-Bogen s nahezu die Meridianrichtung habe, was ja bei reinen Breitengrad-Messungen von vornherein angestrebt wird.

Zwischen $\varphi_2 - \varphi_1$, s und α besteht eine Beziehung, welche in erster Näherung durch die zwei ersten Glieder von (25) S. 395 ausgedrückt wird, nämlich:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = V^2 \left(u - \frac{v^2}{2} t\right) \tag{1}$$

Dabei ist nach (22) und (23) S. 394:

$$V^2 = \frac{N}{M} \quad , \quad u = \frac{s}{N} \cos\alpha \quad , \quad v = \frac{s}{N} \sin\alpha \quad , \quad t = tang\, \varphi_1$$

also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{s}{M} \cos\alpha - \frac{s^2}{2MN} \sin^2\alpha\, tang\, \varphi_1$$

Dieselbe Gleichung auf den Meridianbogen m angewendet, giebt mit $\alpha = 0$:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}$$