Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 115. Reduktion eines Grandmessungs-Bogens auf den Meridian

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Wenn man dieses ebenso behandelt, wie früher (3) — (6), so wird man auf (16) geführt, worauf aus (17) auch a mit Probe folgt.

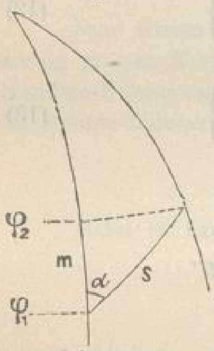
Berechnungen von solcher Art spielten eine wichtige Rolle in der Zeit der Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts (vgl. Einleitung S. 7); heute ist dieses nicht mehr der Fall, indem die Frage nach den Erddimensionen jetzt in anderer Form auftritt.

§ 115. Reduktion eines Gradmessungs-Bogens auf den Meridian.

Wir haben die am Eingange des vorigen § 114. berührte Aufgabe nun nachzuholen, nämlich Berechnung des Meridianbogens m, welcher einem schief gegen den Meridian gelegten Gradmessungs-Bogen s zwischen den Breiten der Endpunkte entspricht. Oder im Anschluss an die nachfolgende Fig. 1. haben wir die Aufgabe, den Meridianbogen m zu berechnen, welcher zwischen denselben Breiten φ_1 und φ_2 liegt, wie ein schief gelegter Bogen $A\,B = s$, dessen Richtung wenigstens durch *ein* Azimut α bestimmt ist.

Der Bogen s kann unmittelbar gemessen sein, im allgemeinen ist aber anzunehmen, dass dieser Bogen s als lange Diagonale einer Triangulierungskette nach Art von $A\,B$ in Fig. 2. S. 388 oder Fig. 3. S. 389 berechnet sei, wobei die Haupterstreckung $A\,B$ nach dem Meridian gerichtet ist. Dabei ist angenommen, dass auch das Azimut α, dessen astronomische Messung nicht geradezu auf die Sicht der Linie s gemacht werden konnte, durch Rechnung auf s bezogen wurde.

Fig. 1.



Hiernach kann man das Ergebnis s mit einem Azimut α (oder mit zwei Azimuten α_1, α_2, nach Fig. 3. S. 571) als geodätische Linie mit geodätischen Azimuten betrachten, und als solche weiter behandeln.

Wir betrachten nun zuerst nach Fig. 1. den einfachen Fall, dass nur *ein* Azimut α gemessen sei; wir wollen dann aber als Erleichterung andererseits annehmen, dass dieses α ziemlich *klein* sei, d. h. dass der Gradmessungs-Bogen s nahezu die Meridianrichtung habe, was ja bei reinen Breitengrad-Messungen von vornherein angestrebt wird.

Zwischen $\varphi_2 - \varphi_1$, s und α besteht eine Beziehung, welche in erster Näherung durch die zwei ersten Glieder von (25) S. 395 ausgedrückt wird, nämlich:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = V^2\left(u - \frac{v^2}{2}\,t\right) \tag{1}$$

Dabei ist nach (22) und (23) S. 394:

$$V^2 = \frac{N}{M} \quad , \quad u = \frac{s}{N}\cos\alpha \quad , \quad v = \frac{s}{N}\sin\alpha \quad , \quad t = tang\,\varphi_1$$

also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{s}{M}\cos\alpha - \frac{s^2}{2\,M\,N}\sin^2\alpha\,tang\,\varphi_1$$

Dieselbe Gleichung auf den Meridianbogen m angewendet, giebt mit $\alpha = 0$:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}$$

Dieses mit der vorhergehenden Gleichung verbunden giebt:

$$m = s \cos \alpha - \frac{s^2}{2\,N} \sin^2 \alpha \tan g\, \varphi_1 + \ldots \tag{2}$$

Für den Quer-Krümmungs-Halbmesser N, der hier als Nenner nur im zweiten Gliede vorkommt, kann man einen abgerundeten Näherungswert nehmen. Wenn das Azimut α ziemlich klein ist, so wird das zweite Glied mit $\sin^2 \alpha$ sehr klein, und es ist dann ziemlich gleichgiltig, wie der hiebei nötige Näherungswert N angenommen wird.

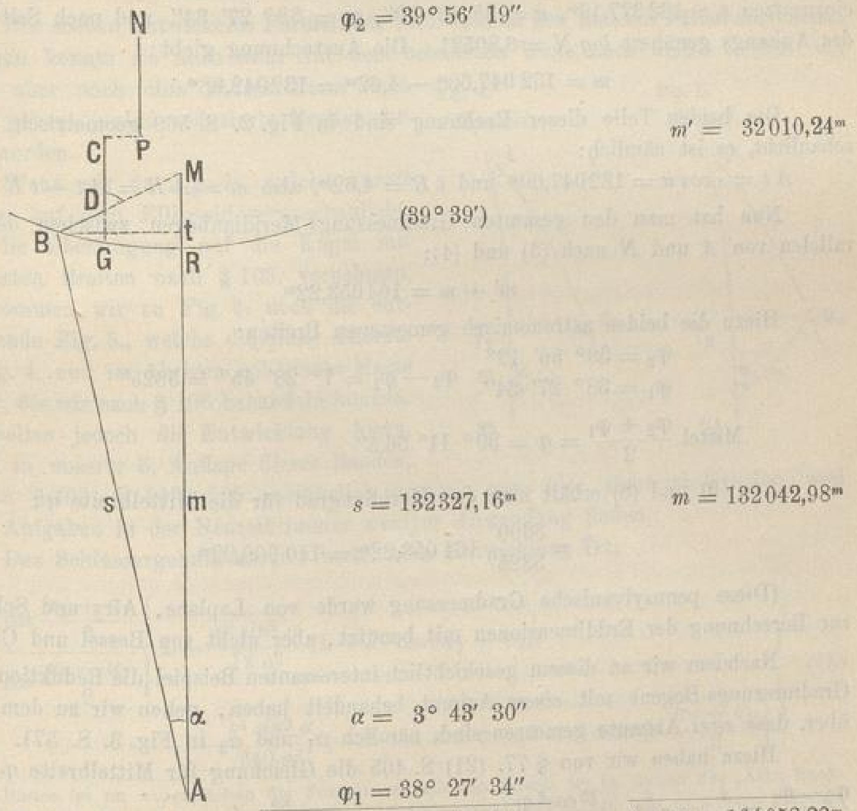
Man könnte die Formel (2) leicht auch noch auf höhere Glieder entwickeln, indem man bei (1) weitere Glieder von (25) S. 395 berücksichtigte; wir wollen das aber hier nicht ausführen, sondern ein einfaches Zahlen-Beispiel vornehmen, bei welchem die Reduktionsformel (2) völlig ausreicht.

Als solches Beispiel soll die durch Einfachheit sich auszeichnende pennsylvanische Gradmessung dienen, welche im vorigen Jahrhundert, 1764—1768, von Mason und Dixon nicht durch Triangulierung, sondern durch unmittelbare Lattenmessung ausgeführt wurde, wie wir schon in der Einleitung S. 6. angegeben haben.

Die Haupt-Zahlenangaben über diese merkwürdige Messung wurden von Prof. J. Howard Gore in Washington in der „Zeitschr. f. Verm. 1888", S. 33—39 mitgeteilt, woraus wir folgendes entnehmen:

Fig. 2.

Pennsylvanische Gradmessung (1764—1768).



Die Hauptmessung erfolgte in der Geraden AB, welche von dem südlichsten Punkte A mit der astronomisch gemessenen Breite $\varphi_1 = 38° \, 27' \, 34''$ unter dem Azimut $\alpha = 3° \, 43' \, 30''$ sich bis zu einem Punkte B erstreckt, dessen Breite nicht astronomisch gemessen ist ($39° \, 39'$ durch nachträgliche Interpolation). Dann wurde noch ein gebrochener Zug $B\,D\,C\,P\,N$ hinzugemessen bis zu dem nördlichsten Punkte N, dessen astronomisch gemessene Breite $\varphi_2 = 39° \, 56' \, 19''$ ist.

Als gemessene Längen sind angegeben: erstens die schiefe Hauptlänge $s = 434\,011{,}64$ Fuss und die Summe der zwei unmittelbaren Meridianbögen $GC + PN = 104\,988{,}4$ Fuss. (In Fig. 2. S. 569 soll $B\,G\,R$ den Parallelkreis von B, und $C\,P$ ein kleines Stück des Parallels von C vorstellen.)

Dazu wird angegeben, dass der hier benützte englische Fuss $= \frac{107}{144}$ Pariser Fuss sei, woraus man berechnet 1 Fuss $= 0{,}304\,893\,06$ Meter.

Der heutige englische Fuss ist kleiner, nämlich $= 0{,}304\,797\,27^m$. Die in unserer Einleitung S. 7 angegebene Reduktion $434\,011{,}64$ Fuss $= 132\,286$ Meter beruht auf dem neuen Verhältnis 1 Fuss $= 0{,}304\,79727^m$.

Mit dieser Verhältniszahl rechnen wir die beiden mitgeteilten Entfernungen in Meter um, wie auch bei Fig. 2. S. 569 beigeschrieben ist:

$$m' = 104\,988{,}4 \text{ Fuss} = 32\,010{,}24^m \text{ und } s = 434\,011{,}64 \text{ Fuss} = 132\,327{,}16^m \tag{3}$$

Nun kommt die Hauptaufgabe, welche uns hier beschäftigt, nämlich die schiefe Länge s auf die Meridianlänge zu reduzieren, wozu die Formel (2) dient. Dabei ist einzusetzen $s = 132\,327{,}16^m$, $\alpha = 3° \, 43' \, 30''$, $\varphi_1 = 38° \, 27' \, 34''$ und nach Seite [16] des Anhangs genähert $\log N = 6.80521$. Die Ausrechnung giebt:

$$m = 132\,047{,}60^m - 4{,}62^m = 132\,042{,}98^m \tag{4}$$

Die beiden Teile dieser Rechnung sind in Fig. 2. S. 569 geometrisch veranschaulicht, es ist nämlich:

$$A\,t = s \cos \alpha = 132\,047{,}60^m \text{ und } t\,R = 4{,}62^m, \text{ also } m = A\,R = A\,t - t\,R \tag{5}$$

Nun hat man den gesamten Gradmessungs-Meridianbogen zwischen den Parallelen von A und N nach (3) und (4):

$$m' + m = 164\,053{,}22^m \tag{6}$$

Hiezu die beiden astronomisch gemessenen Breiten:

$$\begin{array}{l} \varphi_2 = 39° \, 56' \, 19'' \\ \varphi_1 = 38° \, 27' \, 34'' \end{array} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 1° \, 28' \, 45'' = 5325'' \tag{7}$$

$$\text{Mittel } \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi = 39° \, 11' \, 56{,}5'' \tag{8}$$

Aus (6) und (8) erhält man den Meridiangrad für die Mittelbreite φ:

$$G = \frac{3600''}{5325''} \, 164\,053{,}22^m = 110\,909{,}22^m \tag{9}$$

(Diese pennsylvanische Gradmessung wurde von Laplace, Airy und Schubert zur Berechnung der Erddimensionen mit benützt, aber nicht von Bessel und Clarke.)

Nachdem wir an diesem geschichtlich-interessanten Beispiel die Reduktion eines Gradmessungs-Bogens mit *einem* Azimut behandelt haben, gehen wir zu dem Falle über, dass *zwei* Azimute gemessen sind, nämlich α_1 und α_2 in Fig. 3. S. 571.

Hiezu haben wir von § 77. (21) S. 405 die Gleichung für Mittelbreite φ:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{s}{N} \cos \alpha \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24} (2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) + \frac{b^2}{8\,V^4} \eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\right) \tag{10}$$

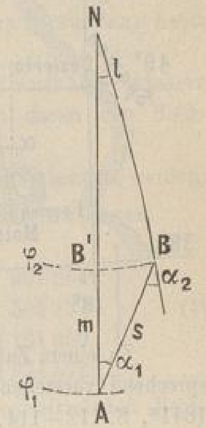
Dieselbe Formel gilt auch für den Meridianbogen m, wenn das mittlere Azimut $\alpha = 0$ und auch der Längenunterschied $l = 0$ gesetzt wird, also:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{m}{N}\left(1 + \quad \cdot\cdot \quad + \frac{b^2}{8\,V^4}\eta^2\,(t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\right) \tag{11}$$

Nun giebt die Division von (10) und (11):

$$m = s\cos\alpha\left(1 + \frac{l^2\cos^2\varphi}{24}\,(2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2)\right) \tag{12}$$

Fig. 3.



Diese Formel kann man unmittelbar anwenden, wenn man für den geographischen Längenunterschied l einen Näherungswert einsetzt und φ als Mittelbreite annimmt (auch in $\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$).

Man kann jedoch auch in erster Näherung nach (16) § 77. S. 404 setzen:

$$l\cos\varphi = \frac{s}{N}\sin\alpha \tag{13}$$

Damit giebt (12):

$$m = s\cos\alpha\left(1 + \frac{s^2\sin^2\alpha}{24\,N^2}\,(2 + 3\,t^2 + 2\eta^2)\right) \tag{14}$$

Für N^2 und η^2 genügen hier irgend welche leicht zu beschaffende Näherungswerte.

Die soeben entwickelte Formel (14) wird wohl in den meisten Fällen ausreichen, und man könnte sie auch wohl auf dem betretenen Wege noch weiter treiben; wir wollen aber noch eine andere Form nach Bessel geben, wobei reduzierte Breiten benützt werden.

Fig. 4. *Ellipsoid.*

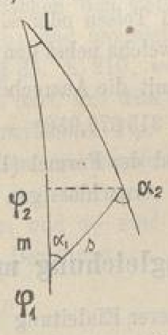
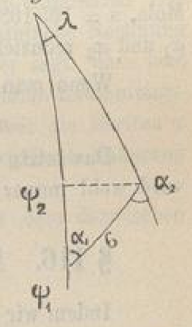


Fig. 5. *Kugel.*



Wenn wir zu Fig. 4., welche unsere Aufgabe auf dem Ellipsoid veranschaulicht, auch die Übertragung auf die Kugel mit reduzierten Breiten nach § 103. vornehmen, so bekommen wir zu Fig. 4. noch die entsprechende Fig. 5., welche dieselben Azimute wie Fig. 4. und im übrigen sphärische Masse enthält, die wir nach § 106 behandeln können. Wir wollen jedoch die Entwicklung hiezu, welche in unserer 3. Auflage dieses Bandes, 1890 in § 103, S. 503—505 ausführlich gegeben war, hier nicht wiederholen, weil solche Aufgaben in der Neuzeit immer weniger Anwendung finden.

Das Schlussergebnis unserer berichteten Entwicklung ist:

$$m = s\,\frac{\cos\dfrac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}\left\{1 + \frac{s^2\sin^2\alpha}{12\,a^2}\,(1 + e'^2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)) - \frac{s^4\sin^2\alpha}{240\,a^4}\left(-2 + 3\cos^2\alpha + 5\cos^2\alpha\,tang^2\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\right\} \tag{15}$$

Dieses ist im wesentlichen die Formel, welche von Bessel im 14. Bande der „Astr. Nachrichten 1837", S. 310, in der „Gradmessung in Ostpreussen" 1838, S. 446 und in General Baeyers „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche" 1862, S. 48 angegeben wurde.

Fig. 6.

Süd-Ende der französisch-spanischen Gradmessung von 1792. Massstab 1 : 10 000 000).

Matas $\varphi_2 = 41° \; 30' \; 29{,}04''$
$\alpha_2 = 11° \; 26' \; 1{,}71''$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 40° \; 5' \; 12{,}575''$$

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 11° \, 11' \; 52{,}325''$$

$\alpha_1 = 10° \; 57' \; 42{,}94''$
Mola $\varphi_1 = 38° \; 39' \; 56{,}11''$

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0° \; 14' \; 9{,}385''$$

Zu einem Zahlen-Beispiel für die Anwendung der Formel (15) nehmen wir entsprechend vorstehender Fig. 6. eine Mitteilung von Bessel „Astr. Nachr., 19. Band, 1841", S. 112—114, über seine Neuberechnung des südlichen Teiles der alten französisch-spanischen Gradmessung von Dünkirchen bis zu den balearischen Inseln. Der nördliche Punkt Matas liegt an der spanischen Küste bei Barcelona, und der südliche Punkt Mola ist der südlichste Gradmessungspunkt auf der Insel Formentera.

Aus der Triangulierung hat Bessel die geodätische Linie zwischen Matas und Mola, $s = 165\,108{,}586$ Toisen oder $= 321\,802{,}629^m$ berechnet, sowie auch die Azimute α_1 und α_2 reduziert, welche nebst den Breiten φ_1 und φ_2 bei Fig. 6. eingeschrieben sind.

Wenn man damit die Ausrechnung nach der Formel (27) macht, so findet man:

$$m = 315\,678{,}950^m + 2{,}529^m - 0{,}001^m = 315\,681{,}478^m$$

Das letzte Glied der Formel (15) bringt also hier nur 1 Millimeter; dieses Glied wird wohl immer zu vernachlässigen sein.

§ 116. Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen.

Indem wir unserer Einleitung S. 7—10 folgen, kommen wir zu der Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids aus mehr als zwei Breiten-Gradmessungen, oder zu der Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Man geht dabei von der Anschauung aus, dass die astronomische Messung der Polhöhen φ verhältnismässig viel ungenauer ist, als die geodätische Messung der Meridianbögen m, denn ein Fehler von 1'' an der Polhöhe oder Breite φ erzeugt bereits eine Änderung von etwa 31 Meter an dem Meridianbogen m, während der mittlere Fehler der geodätischen Meridianbogen-Messung ein viel geringerer ist.

Allerdings überzeugte man sich bald, dass auch die Messungsfehler der Polhöhen φ nicht genügten zur Erklärung der Widersprüche in den verschiedenen Gradmessungen; allein man behielt doch die Form der Ausgleichungs-Rechnung, wonach die Quadratsumme aller Polhöhen-Änderungen zu einem Minimum gemacht wurde, noch lange bei,