Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 116. Ausgleichung mehrerer Breiten-Grandmessungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Fig. 6.
Süd-Ende der französisch-spanischen Gradmessung von 1792. Massstab 1 : 10000000).

Matas $\varphi_2 = 41° \ 30' \ 29{,}04''$

$\alpha_2 = 11° \ 26' \ \ 1{,}71''$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 40° \ 5' \ 12{,}575''$$

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 11° 11' \ 52{,}325''$$

$\alpha_1 = 10° \ 57' \ 42{,}94''$

Mola $\varphi_1 = 38° \ 39' \ 56{,}11''$

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0° \ 14' \ 9{,}385''$$

Zu einem Zahlen-Beispiel für die Anwendung der Formel (15) nehmen wir entsprechend vorstehender Fig. 6. eine Mitteilung von Bessel „Astr. Nachr., 19. Band, 1841“, S. 112—114, über seine Neuberechnung des südlichen Teiles der alten französisch-spanischen Gradmessung von Dünkirchen bis zu den balearischen Inseln. Der nördliche Punkt Matas liegt an der spanischen Küste bei Barcelona, und der südliche Punkt Mola ist der südlichste Gradmessungspunkt auf der Insel Formentera.

Aus der Triangulierung hat Bessel die geodätische Linie zwischen Matas und Mola, $s = 165\,108{,}586$ Toisen oder $= 321\,802{,}629^m$ berechnet, sowie auch die Azimute α_1 und α_2 reduziert, welche nebst den Breiten φ_1 und φ_2 bei Fig. 6. eingeschrieben sind.

Wenn man damit die Ausrechnung nach der Formel (27) macht, so findet man:

$$m = 315\,678{,}950^m + 2{,}529^m - 0{,}001^m = 315\,681{,}478^m$$

Das letzte Glied der Formel (15) bringt also hier nur 1 Millimeter; dieses Glied wird wohl immer zu vernachlässigen sein.

§ 116. Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen.

Indem wir unserer Einleitung S. 7—10 folgen, kommen wir zu der Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids aus mehr als zwei Breiten-Gradmessungen, oder zu der Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Man geht dabei von der Anschauung aus, dass die astronomische Messung der Polhöhen φ verhältnismässig viel ungenauer ist, als die geodätische Messung der Meridianbögen m, denn ein Fehler von $1''$ an der Polhöhe oder Breite φ erzeugt bereits eine Änderung von etwa 31 Meter an dem Meridianbogen m, während der mittlere Fehler der geodätischen Meridianbogen-Messung ein viel geringerer ist.

Allerdings überzeugte man sich bald, dass auch die Messungsfehler der Polhöhen φ nicht genügten zur Erklärung der Widersprüche in den verschiedenen Gradmessungen; allein man behielt doch die Form der Ausgleichungs-Rechnung, wonach die Quadratsumme aller Polhöhen-Änderungen zu einem Minimum gemacht wurde, noch lange bei, obgleich man wusste, dass die Polhöhen-Widersprüche zum grossen Teil gar nicht in Messungsfehlern, sondern in Lotabweichungen ihren Grund haben. Die Methode der kleinsten Quadrate hat bei solcher Anwendung nur die Bedeutung einer empirischen Vermittlung widerstrebender Elemente, und die dabei übrig bleibenden Fehler v geben erste Fingerzeige, an welchen Stellen Lotablenkungen zu suchen sind.

Wir wollen nun einen Teil einer solchen Ausgleichung von Breiten-Gradmessungen vornehmen, und dazu die von Bessel 1837—1841 gesammelten und gesichteten Gradmessungs-Ergebnisse benützen, aus welchen Bessel 1841 seine berühmten, heute noch benützten Erddimensionen (vgl. S. 190) abgeleitet hat.

Wir wollen aber nicht die Besselsche Rechnung selbst hier vorführen, sondern wir wollen nur einige Zahlenwerte derselben herausgreifen, um daran den Rechnungsgang zu zeigen.

Von der französischen Gradmessung sollen folgende 5 Stationen benützt werden:

Station	Polhöhe φ	$\Delta\varphi$	Meridianbogen	
1. Formentera	$\varphi_1 = 38° 39' 56{,}1''$	. .	. .	
2. Barcelona	$\varphi_2 = 41\ 22\ 47{,}9$	2° 42′ 51,8″	301 354^m	
3. Carcassonne	$\varphi_3 = 43\ 12\ 54{,}3$	4 32 58,2	505 137	(1)
4. Pantheon	$\varphi_4 = 48\ 50\ 49{,}4$	10 10 53,3	1 131 050	
5. Dünkirchen	$\varphi_5 = 51\ 2\ 8{,}8$	12 22 12,7	1 374 572	

Um die Fehler-Gleichungen für eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen zu erhalten, legen wir die Besselschen Erd-Dimensionen a und e^2 nach § 81. S. 193 zu Grunde, und bestimmen solche Verbesserungen von a und von e^2, welche die Quadratsumme aller an den Polhöhen φ anzubringenden Verbesserungen zu einem Minimum machen.

Dazu müssen wir zuerst Beziehungen zwischen den Polhöhen-Differenzen $\Delta\varphi$ und den zugehörigen Meridianbögen m ermitteln; und um hiebei einfache Rechnung zu haben, verfahren wir nach dem Satze von § 35. S. 210, welcher sagt, dass man einen Meridian-Bogen m als Kreisbogen berechnen darf, mit dem Meridian-Krümmungs-Halbmesser M der Mittelbreite und mit dem Centriwinkel $\Delta\varphi$. Da wir die Breiten φ auf 0,1″, entsprechend 3 Meter, abgerundet haben, so ist die angegebene Näherung zulässig.

Die zwei ersten gemessenen Polhöhen φ_1 und φ_2 sind mit dem dazwischen liegenden Meridianbogen m verbunden durch die Beziehung:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}\varrho$$

wobei nach (17) und (15) S. 196 für M die Formel gilt:

$$\frac{1}{M} = \frac{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)} \text{ mit } \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \tag{2}$$

Da die hier vorkommenden Erddimensionen a und e^2 für unsere Ausgleichung die Unbekannten sind, zerlegen wir dieselben in Näherungswerte a_0 und e_0^2 mit zugehörigen Verbesserungen δa und δe^2, d. h. wir setzen:

$$a = a_0 + \delta a \qquad e^2 = e_0^2 + \delta e^2 \tag{3}$$

Wir bezeichnen auch mit M_0 denjenigen Wert von M, welcher durch die Näherungs-Annahmen $a = a_0$ und $e^2 = e_0^2$ entsteht; und demnach entwickeln wir nach dem Taylorschen Satz:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0} + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{M}\right)\delta a + \frac{\partial}{\partial e^2}\left(\frac{1}{M}\right)\delta e^2 \tag{4}$$

Die beiden hier gebrauchten partiellen Ableitungen der Funktion $\frac{1}{M}$ entwickeln wir nur in erster Näherung, nach (2), mit Vernachlässigung aller Glieder mit e^2:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{M}\right) = -\frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial e^2}\left(\frac{1}{M}\right) - \frac{1}{a}\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right) \tag{5}$$

Nun kann man zur Bildung der Fehler-Gleichungen schreiten. Die Gleichung (1), welche wegen der Beobachtungsfehler im allgemeinen nicht erfüllt sein wird, wird dadurch zum Stimmen gebracht, dass den beobachteten φ_1 und φ_2 ihre Verbesserungen v_1 und v_2 zugesetzt werden, also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\,\varrho\left(\frac{1}{M}\right) \tag{6}$$

Wenn man hier (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\,\varrho\left\{\frac{1}{M_0} - \frac{\delta a}{a^3} + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right)\frac{\delta e^2}{a}\right\} \tag{7}$$

Hier darf man in den Gliedern mit δa und mit δe^2 statt der Unbekannten a, deren Näherungswert a_0 setzen; ja wir wollen sogar, da ohnehin schon alle Glieder mit e^2 in den Coëfficienten von δa und δe^2 vernachlässigt sind, hier $a = M$, also nach (1) das Produkt $\frac{m\,\varrho}{a} = \frac{m\,\varrho}{M} = \varphi_2 - \varphi_1$ setzen, und damit wird (7):

$$v_2 - v_1 = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0}\,\delta a + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right)(\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta e^2 + \frac{m\,\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{8}$$

Um bequeme Zahlen zur Rechnung zu bekommen, wollen wir nicht δa und δe^2 selbst bestimmen, sondern von δa das Tausendel und von δe^2 das Tausendfache; d. h. wir wollen zwei neue Unbekannte x und y einführen durch die Gleichungen:

$$x = \frac{\delta a}{1000} \qquad y = 1000\,\delta e^2 \tag{9}$$

Dieses in (8) eingesetzt, wird geben:

$$v_2 - v_1 = a'\,x + b'\,y + l' \tag{10}$$

wobei a', b' und l' folgende Bedeutungen haben:

$$a' = -1000\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0} \qquad b' = +\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1000}\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right) \tag{11}$$

$$l' = \frac{m\,\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{12}$$

Als Näherungswerte a_0 und e_0^2 nehmen wir die bekannten Besselschen, vom Jahre 1841 nach § 31. S. 193, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 6\,377\,397{,}155^{\mathrm{m}} & \log a_0 &= 6.804\,6434.6 \\ e_0^2 &= 0{,}006\,674\,372 & \log e_0^2 &= 7.824\,4104.2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir werden dadurch die Annehmlichkeit haben, dass unsere Absolutglieder l' in (12) geradezu gleich den Besselschen endgiltigen $v_2 - v_1$ u. s. w. werden; doch wollen wir hier davon zunächst keinen Gebrauch machen, sondern die Anwendung der Formeln (10), (11), (12) an den zwei ersten Werten der Tabelle (1) von S. 573 zeigen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Formentera } \varphi_1 = 38^\circ\,39'\,56{,}1'' & \\ \text{Barcelona } \quad \varphi_2 = 41^\circ\,22'\,47{,}9'' & m = 301\,354^{\mathrm{m}} \\ \hline \varphi_2 - \varphi_1 = 2^\circ\,42'\,51{,}8'' = 9771{,}8'' & \\ \text{Mittel } \varphi = 40^\circ\ \ 1'\,22{,}0'' & \end{array}\right\} \tag{14}$$

Damit man nach den Formeln (11) sofort berechnen:

$$a' = -1{,}532 \qquad b' = +3{,}709 \tag{15}$$

Auch die Berechnung von l nach (12) hat keine Schwierigkeit, indem dabei M_0 derjenige Wert ist, welcher den Werten a_0 und e_0^2 von (13) entspricht, d. h.:

$$M_0 = \frac{a_0\,(1-e_0^2)}{(1-e_0^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \;,\quad \log M_0 = 6.803\,5358 \tag{16}$$

Indessen können wir wohl auch den günstigen Umstand ausnützen, dass die a_0 und e_0^2 von (13) die bekannten Bessel schen sind, welche auch unseren Hilfstafeln S. [8]—[29] des Anhangs zu Grunde liegen; und wir können daher, statt nach (16) $\log M_0$ auszurechnen, dasselbe auch von Seite [18] des Anhangs entnehmen, oder lieber noch sofort von Seite [19]:

$$\text{für } \varphi = 40°\,1'\,22'' \qquad \log[1] = \log\frac{\varrho}{M_0} \quad 8.510\,8893$$

$$\text{hiezu von (14) } \log m = \log 301\,354 \quad 5.479\,0770$$

$$\log\frac{m\,\varrho}{M_0} \quad 3.989\,9663 \qquad \frac{m\,\varrho}{M_0} = 9771{,}6''$$

$$\begin{aligned} \text{hiezu von (14) } \varphi_2 - \varphi_1 &= 9\,771{,}8'' \\ \text{also} \qquad l' &= \;-0{,}2'' \end{aligned} \tag{17}$$

Nimmt man dieses mit (15) zusammen, so hat man die erste Gleichung von der Form (10):

$$v_2 - v_1 = -1{,}53\,x + 3{,}71\,y - 0{,}2'' \tag{18}$$

Nachdem wir so die Aufstellung einer Gleichung mit Ausrechnung der Coëfficienten und des Absolutgliedes in aller Ausführlichkeit gezeigt haben, werden wir das Ergebnis der Berechnung für die 4 übrigen, welche zu den bei (1) angegebenen französischen Gradmessungen gehören, kurz anschreiben.

Fehlerdifferenz-Gleichungen.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Formentera-Barcelona} & v_2 - v_1 & = -1{,}53\,x + 3{,}71\,y - 0{,}2'' \\ \quad\text{„ -Carcassone} & v_3 - v_1 & = -2{,}57\,x + 5{,}83\,y - 1{,}4 \\ \quad\text{„ -Pantheon} & v_4 - v_1 & = -5{,}75\,x + 10{,}36\,y - 2{,}1 \\ \quad\text{„ -Dünkirchen} & v_5 - v_1 & = -6{,}98\,x + 11{,}31\,y + 1{,}2 \end{array}\right\} \tag{19}$$

Ähnliche Gleichungsgruppen entstehen auch für alle anderen Gradmessungen, Bessels Ausgleichung hat im Ganzen 10 solcher Gleichungsgruppen mit zusammen $38 - 10 = 28$ solcher Gleichungen, wie aus unserer Zusammenstellung von § 1. S. 9 unten zu ersehen ist, wozu wir aber bemerken, dass schon in der Gruppe (1) nur 5 Stationen aufgenommen sind, während nach S. 9 die Zahl der französischen Stationen 7 ist; wir haben deren 2 weggelassen.

Die Gleichungen (19) sind keine Fehler-Gleichungen in dem gewöhnlichen Sinne, weil in jeder Gleichung zwei Verbesserungen v auftreten. Die Trennung der v geschieht dadurch, dass man für jede Gradmessung eine Polhöhen-Verbesserung v selbst als Unbekannte einführt. Der Fall ist ganz entsprechend der Ausgleichung geodätischer Richtungsmessungen, wo man auch für jeden Satz von Messungen eine Nullpunkts-Korrektion als Unbekannte einführen muss.

Auf diese Weise entstehen aus den 4 Gleichungen (19) folgende 5 wirkliche Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{llll} v_1 = v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_2 = v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & -1{,}53\,x & +\;3{,}71\,y & -0{,}2'' \\ v_3 = v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & -2{,}57\,x & +\;5{,}83\,y & -1{,}4'' \\ v_4 = v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & -5{,}75\,x & +10{,}36\,y & -2{,}1'' \\ v_5 = v_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & -6{,}98\,x & +11{,}31\,y & +1{,}2'' \end{array}\right\} \quad (20)$$

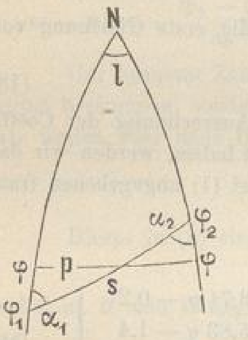
Jede der 10 Gradmessungen giebt eine solche Gruppe von Fehlergleichungen, und da jede Gradmessung eine besondere Unbekannte v hereinbringt, wie z B. v_1 in der Gruppe (20), so überblickt man, dass die Zahl aller Umbekannten $= 10 + 2$ sein muss, nämlich die 10 besonderen v und dann die 2 eigentlichen Unbekannten x und y.

Nun steht nichts im Wege, die zugehörigen 12 Normalgleichumgen zu bilden, aus denen man die 10 Hilfsunbekannten v so rasch als möglich eliminieren wird.

Da der Gang der Ausgleichung hierdurch genügend klar gemacht ist, wollen wir dabei abbrechen. Eine ausführlichere, auf die ganze Ausgleichung mit 6 Gradmessungen in Europa und mit zusammen 20 Stationen sich erstreckende Berechnung war in unserer 3. Auflage dieses Bandes 1890, § 104. S. 507—516, enthalten.

§ 117. Längen-Gradmessung.

Fig. 1.



Wenn man eine Triangulierungskette in der Haupterstreckung von West nach Ost anlegt, und die beiden Endpunkte durch eine astronomische Längen-Bestimmung verbindet, so erhält man eine Längen-Gradmessung.

Während in früherer Zeit, namentlich im vorigen Jahrhundert, wegen der grossen Unsicherheit der astronomischen Längen-Bestimmungen, diese Form der Gradmessung wenig Bedeutung hatte, ist jetzt, seit die elektro-telegraphischen Zeitübertragungen nahezu die Genauigkeit der Breitenmessungen erreicht haben, das Verhältnis ein anderes geworden, und die Längen-Gradmessungen sind jetzt den Breiten-Gradmessungen nahezu gleichberechtigt.

Um die Theorie der Längen-Gradmessung in ihren Grundzügen zu behandeln, brauchen wir nur die Gleichung (16) § 77. S. 404 für Mittelbreite φ vorzuführen:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha \left\{1 + \frac{S^2}{24}\left(\sin^2 \alpha\, t^2 - \cos^2 \alpha\,(1 + \eta^2 - 9\,\eta^2 t^2)\right)\right\} \quad (1)$$

Dabei ist noch (1a) S. 403, da $N = c : V$ die Bedeutung von S diese:

$$S = \frac{s}{c}\,V = \frac{s}{c}\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{und} \quad t = \tang \varphi \quad (2)$$

dazu auch
$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad (3)$$

Ausser dem astronomischen Längenunterschied l und dem geodätischen Bogen s sind auch noch die Breiten φ_1, φ_2 und die Azimute α_1, α_2 durch Messung zu bestimmen (vgl. Fig. 1.). Wenn die Messung unter niederen Breiten (in der Nähe des Äquators) stattfindet, braucht φ nicht sehr genau zu sein, und wenn der Bogen s wesentlich west-östliche Erstreckung hat (α nahezu $= 90°$), braucht α nicht sehr genau zu sein.