Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 117. Längen-Grandmessung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

$$\left.\begin{array}{llll} v_1 = v_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_2 = v_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & -1{,}53\,x & +\ 3{,}71\,y & -0{,}2'' \\ v_3 = v_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & -2{,}57\,x & +\ 5{,}83\,y & -1{,}4'' \\ v_4 = v_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & -5{,}75\,x & +10{,}36\,y & -2{,}1'' \\ v_5 = v_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots & -6{,}98\,x & +11{,}31\,y & +1{,}2'' \end{array}\right\} \quad (20)$$

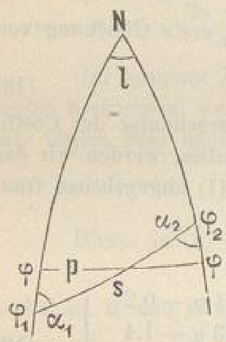
Jede der 10 Gradmessungen giebt eine solche Gruppe von Fehlergleichungen, und da jede Gradmessung eine besondere Unbekannte v hereinbringt, wie z B. v_1 in der Gruppe (20), so überblickt man, dass die Zahl aller Umbekannten $= 10 + 2$ sein muss, nämlich die 10 besonderen v und dann die 2 eigentlichen Unbekannten x und y.

Nun steht nichts im Wege, die zugehörigen 12 Normalgleichumgen zu bilden, aus denen man die 10 Hilfsunbekannten v so rasch als möglich eliminieren wird.

Da der Gang der Ausgleichung hierdurch genügend klar gemacht ist, wollen wir dabei abbrechen. Eine ausführlichere, auf die ganze Ausgleichung mit 6 Gradmessungen in Europa und mit zusammen 20 Stationen sich erstreckende Berechnung war in unserer 3. Auflage dieses Bandes 1890, § 104. S. 507—516, enthalten.

§ 117. Längen-Gradmessung.

Fig. 1.



Wenn man eine Triangulierungskette in der Haupterstreckung von West nach Ost anlegt, und die beiden Endpunkte durch eine astronomische Längen-Bestimmung verbindet, so erhält man eine Längen-Gradmessung.

Während in früherer Zeit, namentlich im vorigen Jahrhundert, wegen der grossen Unsicherheit der astronomischen Längen-Bestimmungen, diese Form der Gradmessung wenig Bedeutung hatte, ist jetzt, seit die elektro-telegraphischen Zeitübertragungen nahezu die Genauigkeit der Breitenmessungen erreicht haben, das Verhältnis ein anderes geworden, und die Längen-Gradmessungen sind jetzt den Breiten-Gradmessungen nahezu gleichberechtigt.

Um die Theorie der Längen-Gradmessung in ihren Grundzügen zu behandeln, brauchen wir nur die Gleichung (16) § 77. S. 404 für Mittelbreite φ vorzuführen:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha \left\{1 + \frac{S^2}{24}\left(\sin^2 \alpha\, t^2 - \cos^2 \alpha\,(1 + \eta^2 - 9\,\eta^2 t^2)\right)\right\} \quad (1)$$

Dabei ist noch (1a) S. 403, da $N = c : V$ die Bedeutung von S diese:

$$S = \frac{s}{c}\, V = \frac{s}{c}\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{und} \quad t = \operatorname{tang} \varphi \quad (2)$$

dazu auch
$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad (3)$$

Ausser dem astronomischen Längenunterschied l und dem geodätischen Bogen s sind auch noch die Breiten φ_1, φ_2 und die Azimute α_1, α_2 durch Messung zu bestimmen (vgl. Fig. 1.). Wenn die Messung unter niederen Breiten (in der Nähe des Äquators) stattfindet, braucht φ nicht sehr genau zu sein, und wenn der Bogen s wesentlich west-östliche Erstreckung hat (α nahezu $= 90°$), braucht α nicht sehr genau zu sein.

Die Ausrechnung nach der Formel (1) hat die Bedeutung einer Reduktion der geodätischen Linie s auf den Parallelkreis der Mittelbreite φ, und diese Reduktion spielt hier dieselbe Rolle wie die Reduktion einer Breiten-Gradmessung auf den Meridian, die wir in § 115. ausführlich für sich behandelt haben.

Wir denken nun die Reduktion nach (1) ausgeführt, und wir setzen zur Abkürzung:

$$s \sin \alpha \left\{1 + \left(\frac{s}{c} V\right)^2 \left(\sin^2 \alpha\, t^2 - \cos^2 \alpha\, (1 + \eta^2 - 9\, \eta^2 t^2)\right)\right\} = p \tag{4}$$

Dann ist nach (1) und (2):

$$l \cos \varphi = \frac{p}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{5}$$

Hier erscheint der Parallelbogen p in gleicher Weise als gemessene Grösse wie der Meridianbogen m bei den Breiten-Gradmessungen.

Nun sollen zwei solcher Messungen p vorliegen, nämlich ausser (5) auch noch entsprechend:

$$l' \cos \varphi' = \frac{p'}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) kann man die beiden Unbekannten e'^2 und c bestimmen; wir schreiben hiebei zur Abkürzung:

$$\frac{p\, l' \cos \varphi'}{p'\, l \cos \varphi} = q \tag{7}$$

Dann wird:
$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi'} \tag{8}$$

Dann mit Probe aus (5) und (6):

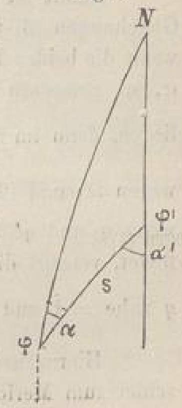
$$c = \frac{p}{l \cos \varphi} \sqrt{1 + e'^2 \cos \varphi} = \frac{p'}{l' \cos \varphi'} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{9}$$

Diese Gleichungen (7), (8), (9) sind ganz entsprechend den früheren für zwei Breiten-Gradmessungen gefundenen Gleichungen in § 114.

§ 118. Azimut-Übertragung.

Nachdem wir gesehen haben, dass die Excentricität der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen bestimmt werden kann, und dass dieselbe Aufgabe auch durch zwei Längen-Gradmessungen gelöst wird, ist drittens noch zu zeigen, dass auch zwei Azimut-Messungen mit den zugehörigen Breiten und mit einer Triangulierungs-Verbindung, zur Bestimmung der Excentricität der Meridian-Ellipse führen.

Fig. 1.



Azimut-Messungen sind auch schon bei den Breiten-Gradmessungen und bei den Längen-Gradmessungen mit benützt worden, aber mehr nur als *Hilfs*-Messungen, zur Reduktion der gemessenen Bögen auf den Meridian oder rechtwinklig zum Meridian; dagegen bei der dritten Aufgabe, die wir nun vorhaben, sind die Azimute gerade die Hauptwerte der Messung.

Wenn man nach Andeutung von Fig. 1. die beiden Breiten φ, φ' und die beiden Azimute α, α' gemessen hat, so kann man zwischen diesen 4 Grössen einerseits, und der Excentrizität der Meridian-Ellipse andererseits, eine Beziehung herstellen durch Vermittlung der reduzierten Breiten.