UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 118. Azimut-Übertragung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Visual Library

Die Ausrechnung nach der Formel (1) hat die Bedeutung einer Reduktion der geodätischen Linie s auf den Parallelkreis der Mittelbreite φ, und diese Reduktion spielt hier dieselbe Rolle wie die Reduktion einer Breiten-Gradmessung auf den Meridian, die wir in § 115. ausführlich für sich behandelt haben.

Wir denken nun die Reduktion nach (1) ausgeführt, und wir setzen zur Abkürzung:

$$s \sin \alpha \left\{1 + \left(\frac{s}{c} V\right)^2 \left(\sin^2 \alpha\, t^2 - \cos^2 \alpha \,(1 + \eta^2 - 9\, \eta^2 t^2)\right)\right\} = p \tag{4}$$

Dann ist nach (1) und (2):

$$l \cos \varphi = \frac{p}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{5}$$

Hier erscheint der Parallelbogen p in gleicher Weise als gemessene Grösse wie der Meridianbogen m bei den Breiten-Gradmessungen.

Nun sollen zwei solcher Messungen p vorliegen, nämlich ausser (5) auch noch entsprechend:

$$l' \cos \varphi' = \frac{p'}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) kann man die beiden Unbekannten e'^2 und c bestimmen; wir schreiben hiebei zur Abkürzung:

$$\frac{p\, l' \cos \varphi'}{p'\, l \cos \varphi} = q \tag{7}$$

Dann wird:

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi'} \tag{8}$$

Dann mit Probe aus (5) und (6):

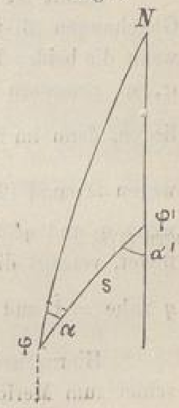
$$c = \frac{p}{l \cos \varphi} \sqrt{1 + e'^2 \cos \varphi} = \frac{p'}{l' \cos \varphi'} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{9}$$

Diese Gleichungen (7), (8), (9) sind ganz entsprechend den früheren für zwei Breiten-Gradmessungen gefundenen Gleichungen in § 114.

§ 118. Azimut-Übertragung.

Nachdem wir gesehen haben, dass die Excentricität der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen bestimmt werden kann, und dass dieselbe Aufgabe auch durch zwei Längen-Gradmessungen gelöst wird, ist drittens noch zu zeigen, dass auch zwei Azimut-Messungen mit den zugehörigen Breiten und mit einer Triangulierungs-Verbindung, zur Bestimmung der Excentricität der Meridian-Ellipse führen.

Fig. 1.



Azimut-Messungen sind auch schon bei den Breiten-Gradmessungen und bei den Längen-Gradmessungen mit benützt worden, aber mehr nur als *Hilfs*-Messungen, zur Reduktion der gemessenen Bögen auf den Meridian oder rechtwinklig zum Meridian; dagegen bei der dritten Aufgabe, die wir nun vorhaben, sind die Azimute gerade die Hauptwerte der Messung.

Wenn man nach Andeutung von Fig. 1. die beiden Breiten φ, φ' und die beiden Azimute α, α' gemessen hat, so kann man zwischen diesen 4 Grössen einerseits, und der Excentrizität der Meridian-Ellipse andererseits, eine Beziehung herstellen durch Vermittlung der reduzierten Breiten.

Bezeichnen wir die reduzierten Breiten mit ψ und ψ', so ist nach (11) § 103. S. 519:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \qquad \cos\psi' = \frac{\cos\varphi'}{V'\sqrt{1-e^2}} \tag{1}$$

oder:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e'^2}}{V} \qquad \cos\psi' = \frac{\cos\varphi'\sqrt{1+e'^2}}{V'} \tag{1a}$$

Die reduzierten Breiten ψ und ψ' geben mit den Azimuten α und α' nach (1) § 104. S. 524 die Gleichung:

$$\cos\psi\sin\alpha = \cos\psi'\sin\alpha' \tag{2}$$

Dieses in Verbindung mit (1a) giebt:

$$\left(\frac{\cos\varphi'\sin\alpha'}{\cos\varphi\sin\alpha}\right)^2 = \frac{V'^2}{V^2} = \frac{1+e'^2\cos^2\varphi'}{1+e'^2\cos^2\varphi}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\cos\varphi'\sin\alpha'}{\cos\varphi\sin\alpha} = q \tag{3}$$

so wird:

$$e'^2 = \frac{1-q^2}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} \tag{4}$$

Damit hat man auch:

$$1+e'^2 = \frac{\sin^2\varphi' - q^2\sin^2\varphi}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} = \frac{1}{1-e^2} \tag{5}$$

Man hat also in (3)—(5) abermals ein Gleichungs-System von derselben Form wie bei zwei Breiten-Gradmessungen in § 114 und bei zwei Längen-Gradmessungen in § 117.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Trunz} & \varphi' = 54^\circ\ 13'\ 11{,}466'' & \alpha' = 67'\ 26'\ 56{,}156'' \\ \text{Berlin} & \varphi = 52^\circ\ 30'\ 16{,}680'' & \alpha = 62'\ 31'\ 15{,}416'' \end{array}\right\} \tag{6}$$

Wenn man diese (6) in die Formeln (3), (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$\log q^2 = 9.999\,9152{\cdot}63 \quad , \quad e'^2 = \frac{0{,}000\,195\,095}{0{,}370\,440\,0839 - 0{,}341\,846\,755} \tag{7}$$

$$\log e'^2 = 7.833\,981 \quad , \quad \log(1+e'^2) = \log\frac{1}{1-e^2} = 9.997\,0468 \tag{8}$$

Damit ist die Excentricität der Meridian-Ellipse bestimmt. Man sieht aus den Gleichungen (3) und (4) unmittelbar, dass das ganze Verfahren unbrauchbar wird, wenn die beiden Punkte, in welchen die Breiten φ, φ' und die gegenseitigen Azimute α, α' gemessen werden, entweder auf demselben Meridian oder auf gleicher Breite liegen, denn im Meridian ist $\alpha = \alpha' = 0$, also $q = \frac{0}{0}$; und wenn $\varphi' = \varphi$ ist, so muss wegen (1) und (2), auch $\alpha' = \alpha$ werden, also wieder $q = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt. Auch wenn φ und φ' beide klein sind, d. h. die Messung in der Nähe des Äquators stattfindet, versagt die Methode, weil dann α und α' sehr wenig verschieden sind, also q nahe $= 1$ und e'^2 nahezu $= \frac{0}{0}$.

Hiernach ist das Verfahren anwendbar in höheren Breiten mit Erstreckung schief zum Meridian.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn ausser den astronomischen Messungs-Ergebnissen φ, φ', α, α' auch die Länge s der verbindenden geodätischen Linie bekannt ist, so kann man auch die Erdaxe bestimmen.

Wir können hiezu die Gleichung (17) § 106. S. 533 benützen, nämlich mit Einsetzung von S nach (10) S. 532:

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = \frac{s}{c}\,V\left\{1-\frac{\eta^2}{24}\left(2\left(\frac{s}{c}\,V\sin\alpha\right)^2 t^2+\left(\frac{s}{c}\,V\cos\alpha\right)^2(1-t^2+\eta^2+6\,\eta^2t^2)\right)\right\}$$

Hier ist nach (9) S. 189 $c\sqrt{1-e^2}=a$, also giebt vorstehende Gleichung, mit Zusetzung des nötigen ϱ:

$$a = s\,V\frac{\varrho}{\sigma}\left\{1-\frac{\eta^2}{24}\left(2\left(\frac{s}{c}\,V\sin\alpha\right)^2 t^2+\left(\frac{s}{c}\,V\cos\alpha\right)^2(1-t^2+\eta^2+6\,\eta^2t^2)\right)\right\} \tag{9}$$

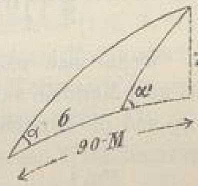
Es kommt also nur noch darauf an, σ zu berechnen, und das ist eine rein sphärische Aufgabe, welche mit Hilfe der Fig. 2. bzw. der ausführlicheren Fig. 2. in § 105. S. 525 gelöst wird.

Als Vorbereitung hiezu berechnet man die beiden reduzierten Breiten ψ und ψ', wobei der zuvor in (5) und (7) ermittelte Excentricitätswert e bzw. e' zu benützen ist.

$$tang\,\psi = \sqrt{1-e^2}\,tang\,\varphi \quad , \quad tang\,\psi' = \sqrt{1-e^2}\,tang\,\varphi' \tag{10}$$

Nun hat man in dem sphärischen Dreieck von Fig. 2. vier Stücke gegeben, nämlich ψ, ψ', α, α''; die Berechnung von σ ist also nicht bloss bestimmt, sondern sogar überbestimmt, wodurch eine Rechenprobe entsteht, denn die reduzierten Breiten ψ und ψ' nach (10) beruhen auf derjenigen Excentricität e bzw. e', welche in (3)—(5) aus den 4 Grössen φ, φ', α, α' selbst abgeleitet worden ist. Würde also die Rechenprobe bei der Doppelbestimmung von σ nicht stimmen, so könnte der Grund entweder in der sphärischen Rechnung nach Fig. 2. oder aber auch in der vorhergehenden Berechnung der reduzierten Breiten nach (10) liegen.

Fig. 2.
(entsprechend Fig.2 .S. 525.)



Die zu der genannten sphärischen Berechnung von σ nach Fig. 2. nötigen Formeln können wir von § 105. S. 526 entnehmen; wir wollen dabei zwei Werte M einführen, den ersten zu ψ und α gehörig, den zweiten zu ψ' und α' gehörig, dann ist:

$$\sigma = M' - M \tag{11}$$

Für M und M' hat man nach (2) S. 526:

$$tang\,M = \frac{tang\,\psi}{\cos\alpha} \quad , \quad tang\,M' = \frac{tang\,\psi'}{\cos\alpha'} \tag{12}$$

Aus (12) und (11) hat man bereits das gewünschte σ. Die dazu gehörige, oben erwähnte Rechenprobe kann man auf verschiedene Art erlangen, z. B. durch Vermittlung des Bogens m, welcher für M und M' derselbe ist. Nach (2) und (3) S. 526 ist:

$$\sin m = \cos\psi\,\sin\alpha = \cos\psi'\,\sin\alpha'$$

dann:

$$\sin M = \frac{\cos m}{\sin\psi} \quad , \quad \sin M' = \frac{\cos m}{\sin\psi'} \tag{13}$$

Damit hat man die zweite Bestimmung von M und M', als Versicherung für (12). Wenn aber M und M' erheblich grösser als 45° sind, so sind die Bestimmungen (13) nicht günstig; dann rechnet man lieber:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$cotg\,\lambda_1 = tang\,M\,sin\,m \quad , \quad cotg\,\lambda_2 = tang\,M'\,sin\,m$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda$$

$$sin\,\sigma = \frac{sin\,\lambda\,cos\,\psi'}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,\lambda\,cos\,\psi}{sin\,\alpha'} \tag{14}$$

Die Anwendung dieser Formeln auf unser Beispiel (6) giebt:

$$\text{Trunz} \quad \psi' = 54^\circ\ 7'\ 38{,}6482'' \qquad \alpha' = 67^\circ\ 26'\ 56{,}152''$$

$$\text{Berlin} \quad \psi = 52^\circ\ 24'\ 37{,}8514'' \qquad \alpha = 62^\circ\ 31'\ 15{,}416''$$

$$M = 70^\circ\ 26'\ 40{,}0950'' \qquad M' = 74^\circ\ 29'\ 58{,}3496''$$

$$M' - M = \sigma = 4^\circ\ 3'\ 18{,}2546'' \quad , \quad m = 32^\circ\ 45'\ 50{,}2488'' \tag{15}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda = 6^\circ\ 8'\ 45{,}6806'' \quad , \quad \sigma = 4^\circ\ 3'\ 18{,}2548'' \tag{16}$$

Die beiden Werte σ nach (15) und (16) stimmen unter sich hinreichend; wir haben mit dem Mittel $\sigma = 4^\circ\ 3'\ 18{,}2547''$ weiter gerechnet, und damit aus (9) erhalten:

$$log\,\eta^2 = 7.385\,5669 \quad , \quad log\,V^2 = 0.001\,0593.6$$

$$a = 6\,380\,516{,}074^{m} - 9{,}543^{m} + 0{,}448^{m} = 6\,380\,506{,}979^{m} \quad , \quad log\,a = 5.804\,8551{\cdot}88 \tag{17}$$

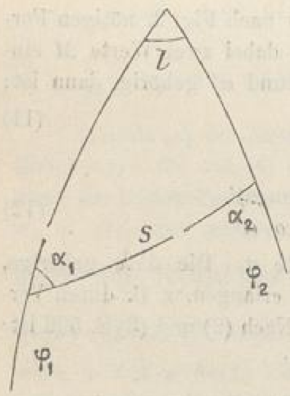
Die Korrektionsglieder von (9) haben also hier nur $9{,}5^{m}$ und $0{,}4^{m}$ ausgemacht, woraus zugleich zu ersehen ist, dass keine Wiederholung der Rechnung nötig ist wegen des in (9) vorläufig benützten $c = a\sqrt{1 + e'^2}$.

Der Grundgedanke, die Excentricität der Meridian-Ellipse aus einer Gradmessung schief zum Meridian zu bestimmen, ist zuerst von J. Tobias Mayer erfasst worden, wie aus „Astr. Nachr. 13. Band, 1836", S. 353, hervorgeht. Die erste Ausführung dieses Gedankens haben wir in der „Gradmessung in Ostpreussen" von Bessel, welcher in der Vorrede S. V—VI seines Werkes über diese Gradmessung Tobias Mayer citiert.

§ 119. Gradmessung schief zum Meridian.

Wenn man nach Fig. 1. eine geodätische Linie s (bzw. eine Dreieckskette) schief zum Meridian anlegt, am Anfangspunkt und am Endpunkt derselben die Azimute α_1, α_2 und die Breiten φ_1, φ_2 und endlich noch den Längenunterschied l astronomisch misst, so hat man alles das, was wir bisher als Breiten-Gradmessung, Längen-Gradmessung und Azimut-Übertragung getrennt behandelt haben, nun vereinigt; und da eine schiefe geodätische Linie mit Azimuten und Breiten an den Endpunkten nach § 118. hinreicht zur Bestimmung der Ellipsen-Dimensionen, so haben wir in der Vereinigung der 6 genannten Messungen bereits eine über das unmittelbare Bedürfnis hinausgehende Bestimmung der Erddimensionen.

Fig. 1



Man kann sich dieses auch so klar machen: Ein sphärisches Dreieck von der Form Fig. 1. ist seiner Form nach bestimmt durch 3 Stücke, z. B. durch φ_1, φ_2, l; um auch den Halbmesser zu bestimmen, auf welchem das sphärische Dreieck liegen soll, braucht man ein viertes Stück, s linear gemessen. Geht man über zu einem Ellipsoid, auf welchem das Dreieck Fig. 1. liegen soll, so tritt eine weitere Unbekannte auf in der Excentricität, so dass nun 5 Messungsstücke erforderlich werden. Wenn also in Fig. 1. im ganzen 6 Stücke gemessen sind, so ist auch für das Ellipsoid noch *eine* Messung überschüssig, oder man hat es mit einer Ausgleichung zu thun.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN