Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 120. Allgemeines über Lotabweichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Wie gewöhnlich wird diese Ausgleichung dadurch behandelt, dass man Näherungswerte der Erddimensionen einführt, und durch Differentiieren Beziehungen herstellt zwischen Verbösserungen jener Näherungswerte einerseits und Änderungen der beobachteten Grössen andererseits.

Man überblickt auch sofort, dass man *mehrere* solcher Systeme, wie das in Fig. 1. dargestellte, in eine Gesamtausgleichung zusammenfassen kann.

Dieses ist der Grundgedanke der heutigen internationalen Erdmessung. Eine wichtige Rolle spielen dabei die Lotabweichungen, von welchen wir im nächsten Kapitel XII noch das Nötigste behandeln werden.

Kapitel XII.

Lotabweichungen.

§ 120. Allgemeines über Lotabweichungen.

Anknüpfend an das, was wir schon in der Einleitung S. 11 über den Begriff der Lotabweichungen und des Geoids erwähnt haben, gehen wir nun zu näherer Betrachtung der Lotabweichungen über.

Wenn wir bei unseren Triangulierungen die unmittelbar gemessenen Grundlinien auf die Höhe des Meeres, (bzw. auf Normal-Null) reduzieren (vgl. S. 67), so legen wir damit unseren Messungen und Berechnungen eine ideale Erdoberfläche zu Grunde, welche, in erster Näherung, mit der Oberfläche der Weltmeere zusammenfallend, und unter den Kontinenten stetig fortgesetzt, angenommen wird.

Wenn wir ferner bei unseren geodätischen und astronomischen Winkelmessungen die vertikale Axe der Instrumente durch die Wasserwage einstellen, und die so erhaltenen Messungen in üblicher Weise weiter rechnerisch behandeln, so nehmen wir die durch die Wasserwage bestimmte Schwere-Richtung als geometrische Normale jener idealen Erdoberfläche an, und führen für diese Fläche ein Umdrehungs-Ellipsoid von gewissen Dimensionen in die Rechnung ein.

Nun haben aber schon die ersten zusammenfassenden Berechnungen der Gradmessungen ergeben, dass jene ideale Erdoberfläche nicht genau ein Ellipsoid ist, und man kann durch eine einfache physikalische Betrachtung zeigen, dass die ideale Erdoberfläche, welche wir den geodätischen Messungen und Berechnungen zu Grunde legen, kein Ellipsoid sein kann, weil auch die physische Erdoberfläche mit ihren Bergen und Thälern, Kontinenten und Meeren, selbst nicht ellipsoidisch ist.

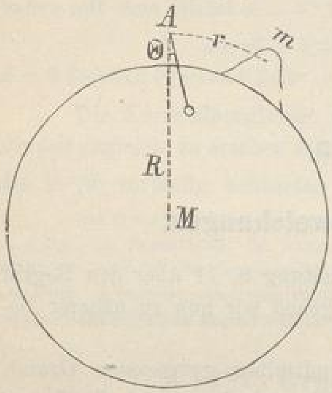
Die Schwerkraft, welche auf einen Punkt (bzw. ein Massen-Element) an der Erdoberfläche einwirkt, ist die Resultante der Anziehungen, welche alle einzelnen Massenteile des Erdkörpers auf den Punkt ausüben, in Verbindung mit der Einwirkung der Centrifugalkraft.

Zwischen zwei Massenteilen m_1 und m_2, welche sich im Abstand r von einander befinden, besteht eine Anziehung, welche proportional $\frac{m_1 \, m_2}{r^2}$ ist.

In Fig. 1. unten, ist die Erde kugelförmig angenommen, und über die kugelförmige Erdoberfläche soll eine Gebirgsmasse m hervorragen. Wenn es sich um Bestimmung der Lotrichtung in einem ausserhalb der kugelförmigen Erdoberfläche liegenden Punkte A handelt, so kann man die ganze Masse der Erde im Erdmittelpunkt konzentriert annehmen. (Der Beweis für die Zulässigkeit dieser Annahme lässt sich in elementarer Weise aus der Definition der Gravitation herleiten.) Es sei nun M die Masse der Erde und m die Masse eines Gebirges, dann bekommt man für einen Punkt A, dessen horizontaler Abstand von dem Schwerpunkt des Gebirges $= r$ ist, eine durch das Gebirge erzeugte Lotabweichung Θ, entsprechend der Gleichung:

$$tang\ \Theta = \frac{m}{r^2} : \frac{M}{R^2} = \frac{m\,R^2}{M\,r^2} \tag{1}$$

Fig. 1.
Lotabweichung Θ.



Das Volumen der Erde ist $= \frac{4}{3}\pi R^3$, und wenn γ die mittlere Dichte der Erde ist, so hat man die Masse der Erde:

$$M = \frac{4}{3}\gamma\,\pi\,R^3 \tag{2}$$

Das Volumen des Gebirges sei V, dessen Dichte sei δ, dann ist die Gebirgs-Masse:

$$m = V\,\delta \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) findet man die Lotabweichung Θ als kleinen Winkel:

$$\Theta = \frac{3}{4}\,\frac{\delta}{\gamma}\,\frac{V}{R r^2}\,\frac{\varrho}{\pi} \tag{4}$$

Nach Listing „Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers", aus den „Nachr. der Königl. Gesellsch. der Wissensch., Göttingen 1878", S. 61, ist die mittlere Dichte der Erde: $\gamma = 5{,}63$; der mittlere Erdhalbmesser ist in runder Zahl (nach S. 225): $R = 6\,370\,000^m$. Setzt man dieses in (4) ein, so erhält man:

$$\Theta = 0{,}001373\,\frac{V\,\delta}{r^2} \text{ in Sekunden} \tag{5}$$

Dabei ist V das Volumen des Gebirges in Kubikmetern und r die Entfernung in Metern zu nehmen.

Als Beispiel nehmen wir die summarische Schätzung des Einflusses des nördlichen Schwarzwaldes mit dem Zentralpunkt Hornisgrinde auf die meridionale Lotrichtung in Durlach. Das Volumen dieses Gebirgsstocks stellt sich ungefähr dar als Produkt von $65\,000^m$ Breite, $43\,000^m$ Länge und 800^m Höhe; die mittlere Entfernung von Durlach mag $r = 46\,000^m$ angenommen werden und die Dichte $\delta = 2{,}3$ (bunter Sandstein und Granit). Mit diesen Zahlen bekommt man aus (5):

$$v = 3{,}3''$$

Durch eine ähnliche Überschlagsrechnung bekommt man für den südlichen Schwarzwald $1{,}0''$ und für die schwäbische Alb $1{,}6''$ zusammen $5{,}9''$.

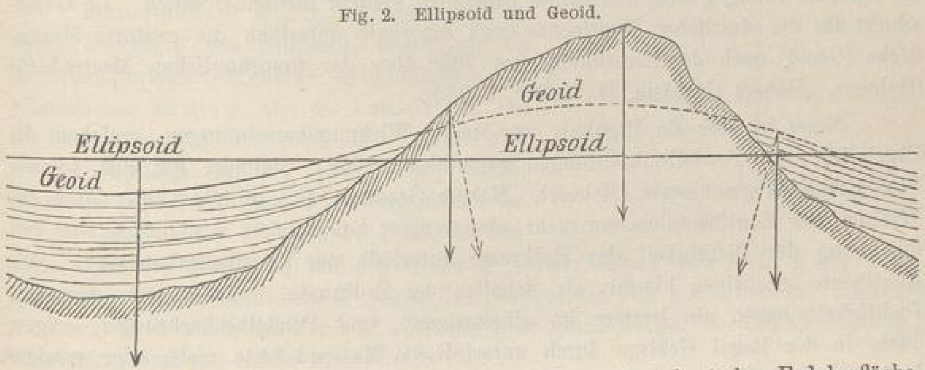
In dieser Weise kann man mit Sicherheit schliessen, dass die sichtbaren Ungleichheiten der Massenverteilung an der Erdoberfläche erhebliche Lotablenkungen im Vergleiche mit den Lotrichtungen eines mittleren Ellipsoids erzeugen müssen, d. h. Lotablenkungen, welche bei den Mittelgebirgen $5''$—$10''$ betragen, und bei Hochgebirgen bis $1'$ steigen müssen.

Ausser den sichtbaren Ungleichheiten der Massenverteilung an der Oberfläche der Erde giebt es aber auch Massen-Ungleichheiten unterhalb der Erdoberfläche, welche nicht durch geometrische Volumen-Berechnung bestimmt werden können.

Das Geoid.

Nachdem erkannt ist, dass die Schwerkraft-Richtungen im allgemeinen nicht mit den Ellipsoid-Normalen zusammenfallen, kommt man zu der Annahme einer anderen krummen Fläche, welche von allen Schwerkraft-Richtungen rechtwinklig geschnitten wird, und in Hinsicht der Höhenlage sich der physischen Erdoberfläche möglichst anpasst. Diese Fläche nennt man das Geoid (nach Listing, vgl. Einleitung S. 11).

Fig. 2. Ellipsoid und Geoid.



In vorstehender Fig. 2. ist die gegenseitige Lage der physischen Erdoberfläche, eines mittleren Ellipsoids und des Geoids in grob schematischer Weise dargestellt. Die Linie für das Ellipsoid ist gerade gezogen, insofern es sich nur um einen kleinen Teil der Erdoberfläche handeln soll und die Zeichnung nur dazu dient, die realitiven Krümmungen zwischen dem mittleren Ellipsoid und dem Geoid zu veranschaulichen.

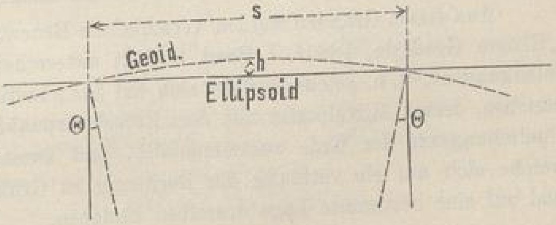
Die ausgezogenen Pfeillinien stellen die geometrischen Normalen des Ellipsoids, und die punktierten Pfeillinien stellen die physikalischen Lotlinien vor, welche rechtwinklig zur Geoidfläche sind. Der kleine Winkel zwischen einer Ellipsoid-Normalen und der Schwerkraft-Richtung ist die Lotablenkung; fällt die Schwerkraft-Richtung mit der Ellipsoid-Normalen zusammen, wie in Fig. 1. über der Wasserfläche und in der Höhe des Berges angenommen ist, so ist die Lotablenkung gleich Null.

Die Geoid-Falten.

Wenn nur die sichtbaren Massen-Ungleichheiten wirksam sind, so kann man z. B. in dem einfachen Falle von Fig. 2., wo ein Gebirge zwischen zwei Meeren angenommen ist, sofort sagen, dass unter dem Gebirge das Geoid über das mittlere Ellipsoid emporgehoben, und über den Meeren das Geoid unter das Ellipsoid gesenkt sein muss.

Um zu schätzen, wie hoch oder wie tief die Falten zwischen dem Geoid und einem mittleren Ellipsoid etwa sein werden, denken wir nach Andeutung von Fig. 3. eine solche Falte von kreisförmigem Profil mit einer Lotablenkung Θ am Anfange und am Ende, auf eine Erstreckung s, so wird die Höhe h als Pfeilhöhe eines flachen

Fig. 3.



Kreisbogens vom Centriwinkel $2\,\Theta$ mit der Sehne oder Bogenlänge s für einen Halbmesser r, woraus folgt:

$$r = \frac{s}{2\,\Theta}, \qquad \text{also } h = \frac{1}{2\,r}\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,s\,\Theta \text{ bzw.} = \frac{1}{4}\,s\,\frac{\Theta}{\varrho}.$$

Nehmen wir $s = 100\,000^m$ und $\Theta = 10''$, so giebt dieses $h = 1{,}2^m$.

Im Mittel-Gebirge handelt es sich bei den Geoid-Falten immer nur um Höhen von einigen Metern. So giebt das Geoid des Harzes nur Höhen von 1^m—2^m gegen das Ellipsoid (s. Helmert, „Höhere Geodäsie, I, 1880" S. 570).

Viel grössere Erhebungen und Vertiefungen der Geoid-Falten ergeben sich bei der Massenwirknng ganzer Kontinente gegenüber weniger dichten Oceanen. Im Durchschnitt für die sämtlichen Kontinente liegt innerhalb derselben die gestörte Meeresfläche (Geoid) nach der Berechnung um 700^m über der ursprünglichen Meeresfläche (Helmert, „Höhere Geodäsie, II., 1884", S. 356).

Dieses ist aber ein Ergebnis aus Massen-Wirkungsberechnungen, welchem die Ergebnisse von Pendelbeobachtungen gegenüber stehen. Helmert hat aus solchen Vergleichungen geschlossen (Helmert, „Höhere Geodäsie, II.", S. 364—365), „dass die Wirkung der Kontinentalmassen mehr oder weniger kompensiert wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinentalmassen". „Die Kontinente erscheinen hiermit als Schollen der Erdkruste, welche etwas geringere Dichtigkeit haben als letztere im allgemeinen", und Pendelbeobachtungen zeigen, „dass in der Regel Gebirge durch unterirdische Massendefekte mehr oder weniger kompensiert sind".

Hieraus folgt, dass die Höhe der Geoid-Falten eine geringere ist, als die Verteilung zwischen Wasser und Land nach der schematischen Darstellung von Fig. 2. S. 583 vermuten lässt.

Lotablenkung und Lotabweichung.

Durch astronomisch-geodätische Hilfsmittel kann man immer nur *Differenzen* von Lotablenkungen, oder relative Lotablenkungen bestimmen, aus zwei Gründen: Erstens braucht man zu der Berechnung die Annahme eines Vergleich-Ellipsoids (z. *B.* des Besselschen Ellipsoides), und das ist eine innerhalb ziemlich weiter Grenzen willkürliche Annahme, und je nachdem man ein Ellipsoid zur Vergleichung annimmt, bekommt man verschiedene Lotablenkungen.

Ausserdem braucht man zu Lotablenkungs-Berechnungen irgend einen festen Ausgangspunkt, z. B. hat das geodätische Institut hiefür den Punkt Rauenberg bei Berlin. Nun geben alle Berechnungen nur die Vergleichung der Lotablenkungen anderer Punkte mit der Lotablenkung des Ausgangspunktes, welche selbst unbekannt, zuweilen schlechthin gleich Null gesetzt, oder dem negativen Mittel aller anderen Ablenkungen entsprechend angenommen werden kann.

Aus diesen Gründen werden verschiedene Benennungen eingeführt; nach Helmert („Höhere Geodäsie, 1880", I. Band, S. 514) unterscheiden wir erstens: absolute „Lotablenkungen", d. h. solche, welche sich auf das günstigste mittlere Vergleichs-Ellipsoid beziehen, dessen Mittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt, und dessen kleine Axe mit der Umdrehungsaxe der Erde zusammenfällt, und zweitens relative „Lotabweichungen", welche sich auf ein vorläufig der Rechnung zu Grunde gelegtes Vergleichs-Ellipsoid und auf eine bestimmte Lage desselben beziehen.