Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 121. Bestimmung der Lotabweichung durch Vergleichung astronomischer und geodätischer Messung

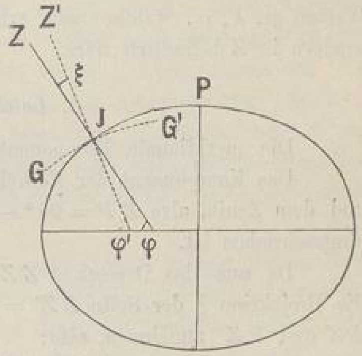
urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

§ 121. Bestimmung der Lotabweichung durch Vergleichung astronomischer und geodätischer Messungen.

Die Lotabweichung ist der Winkel, welchen die physikalische Lotlinie eines Punktes mit der entsprechenden Ellipsoid-Normalen bildet.

Wir wollen zuerst den einfachen Fall der Lotabweichung im Meridian behandeln, d. h. wir wollen annehmen, dass die Lotlinie von der Ellipsoid-Normalen abweicht, aber in der Ebene des Ellipsoid-Meridians sich befindet.

Fig. 1.



Dieser Fall ist in Fig. 1. dargestellt. In einem Punkte J des Ellipsoids haben wir die Ellipsoid-Normale JZ mit der ellipsoidischen oder geodätischen Breite φ, und die Lotlinie JZ' mit der astronomischen Breite φ'. Die Lotlinie JZ' ist rechtwinklig auf der Geoidfläche, welche durch die punktierte Linie GJG' angedeutet ist. Der Winkel ξ zwischen JZ und JZ' ist die Lotabweichung im Meridian, und wir wollen ξ positiv zählen, wenn, wie in Fig. 1. angenommen ist, die Lotlinie JZ' gegen den Nordpol hin von JZ abweicht. Man sagt in diesem Falle auch, die Zenit-Abweichung ξ ist nördlich oder die Lot-Abweichung ξ ist südlich, und wir haben hiefür nach Fig. 1.:

$$\xi = \varphi' - \varphi \tag{1}$$

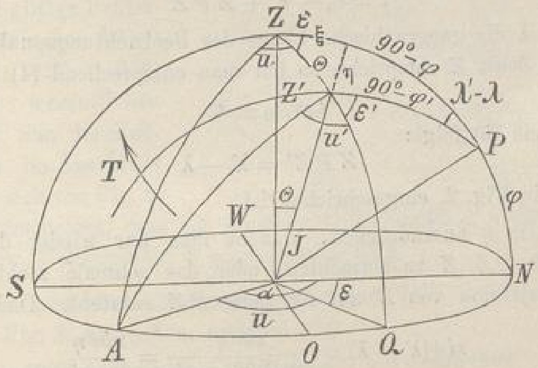
Die Lotabweichung im allgemeinen, d. h. nicht nur im Meridian, kann in zweierlei Weise bestimmt werden: Erstens giebt man die absolute Lotabweichung Θ und ihr Azimut ε an, oder zweitens bestimmt man die beiden Komponenten ξ und η der Lotabweichung nach Norden und Osten, dieselben sind:

$$\xi = \Theta \cos \varepsilon \qquad \eta = \Theta \sin \varepsilon \tag{2}$$

Diese zwei Gleichungen, welche nach dem Vorhergehenden wohl unmittelbar zu verstehen sind, werden wir auch wieder bestätigt finden durch die nachfolgende Fig. 2., zu welcher wir nun übergehen.

Fig. 2.

Z = Geodätisches Zenit, dem Ellipsoid entsprechend, φ = geodätische (ellipsoidische) Breite.
Z' = Astronomisches Zenit, dem Geoid entsprechend, φ' = astronomische Breite (Polhöhe).



In Fig. 2. S. 585 sei Z das geodätische Zenit und Z' das astronomische Zenit. P ist der Pol, welcher zu beiden Zeniten in Beziehung steht. J ist ein Punkt der Erdoberfläche, auf welchem geodätische und astronomische Beobachtungen gemacht werden. Durch astronomische Beobachtungen soll die Polhöhe φ', die geographische Länge λ, und ein Azimut α' bestimmt werden, und es handelt sich um die Auffindung von Beziehungen zwischen diesen Grössen φ', λ', α' und den entsprechenden geodätischen Werten φ, λ, α, welche man erhalten haben würde, wenn das Zenit nicht in Z' sondern in Z befindlich wäre.

I. Lotabweichung in Breite, ξ.

Die meridionale Komponente ξ der Lotabweichung ist leicht zu bestimmen.

Das Komplement der Polhöhe ist immer gleich dem Bogen zwischen dem Pol und dem Zenit, also $ZP = 90° - \varphi$, $Z'P = 90° - \varphi'$, wie auch bereits in Fig. 2. eingeschrieben ist.

Da nun das Dreieck PZZ' bei Z' nur die kleine Ordinate η hat, kann man die Projektion ξ der Seite $ZZ' = v$ hinreichend genau als Differenz der beiden Seiten PZ und PZ' annehmen, also:

$$\xi = (90° - \varphi) - (90° - \varphi')$$

oder

$$\xi = \varphi' - \varphi \tag{3}$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, die wir schon bei (1) unmittelbar gefunden haben.

II. Lotabweichung in Länge, $\eta \sec \varphi$.

Bei Vergleichung der geographischen Längen hat man zu beachten, dass alle astronomische Längen-Bestimmung auf Ortszeit-Bestimmung beruht. Wenn λ' die astronomisch bestimmte geographische Länge des Punktes J ist, bezogen auf einen westlich von J liegenden Anfangspunkt J_0 (z. B. Ferro, Paris, Greenwich), so heisst das so viel als: Ein Gestirn T, welches in J_0 zur Zeit t_0 kulminiert, kulminiert in J zur Zeit:

$$t' = t_0 - \lambda' \tag{4}$$

Diese Kulmination findet statt beim Durchgang des Gestirns durch den Deklinationskreis PZ'; dagegen der Durchgang durch den Deklinationskreis PZ, welcher dem geodätischen Zenit angehört, erfolgt später, und zwar um den Winkelbetrag ZPZ'; oder die geodätische Kulmination erfolgt zur Zeit:

$$t = t_0 - \lambda' + ZPZ' \tag{4a}$$

Wenn nun λ die geographische Länge des Beobachtungspunktes J ist, welche dem geodätischen Zenit Z entspricht, so hat man entsprechend (4):

$$t = t_0 - \lambda \tag{5}$$

Aus (4a) und (5) folgt:

$$ZPZ' = \lambda' - \lambda \tag{6}$$

wie auch bereits in Fig. 2. eingeschrieben ist.

Um $\lambda' - \lambda$ in η auszudrücken, braucht man nur wieder das schmale langgestreckte Dreieck $PZ'Z$ zu betrachten, oder das schmale rechtwinklige Dreieck, welches durch Projektion von Z' auf die Seite PZ entsteht. Dadurch erhält man:

$$\sin(\lambda' - \lambda) = \frac{\sin \eta}{\sin(90° - \varphi')} = \frac{\sin \eta}{\cos \varphi'}$$

Da hier $\lambda' - \lambda$ und η beide klein sind, und auch φ' sich von φ nur wenig unterscheidet, kann man aus der vorstehenden Gleichung bilden:

$$\lambda' - \lambda = \eta \sec \varphi \tag{7}$$

III. Lotabweichung im Azimut, η tang φ.

Bei astronomischer Azimutmessung handelt es sich um den Horizontalwinkel zwischen der Richtung nach dem Pol P und der Richtung nach einem geodätischen Zielpunkt, der in Fig. 2. im Horizonte liegend als Punkt A angenommen sei. Die astronomische Azimutmessung wird daher den Winkel am astronomischen Zenit Z' geben, welcher in Fig. 2. als eine Summe $\varepsilon' + u'$ bezeichnet ist. Dabei war die vertikale Theodolit-Axe nach dem astronomischen Zenit Z' oder nach der physikalischen Lotlinie JZ' gerichtet, und das Messungs-Ergebnis $\varepsilon' + u'$ ist von der Lotabweichung beeinflusst.

Wenn wir andererseits dasjenige Azimut kennen lernen wollen, welches man ohne Lotabweichung erhalten haben würde, d. h. das geodätische Azimut, so muss man die vertikale Theodolit-Axe nach dem geodätischen Zenit JZ gerichtet denken, und damit erhält man das Azimut, welches bei Z als eine Summe $\varepsilon + u$, und in der Horizontal-Ebene bei J als ein Winkel $\alpha = \varepsilon + u$ dargestellt ist. Zur Vergleichung haben wir also nun:

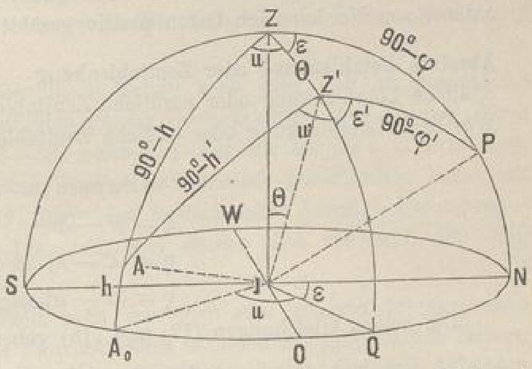
$$\text{Geodätisches Azimut} \quad \alpha = \varepsilon + u \tag{8}$$

$$\text{Astronomisches Azimut} \quad \alpha' = \varepsilon' + u' \tag{9}$$

$$\text{Differenz} \quad \alpha - \alpha' = (\varepsilon - \varepsilon') + (u - u') \tag{10}$$

Von diesen beiden Teilen $\varepsilon - \varepsilon'$ und $u - u'$ ist der zweite Teil $u - u'$ immer sehr klein und meist zu vernachlässigen, wenn der geodätische Zielpunkt A im Horizonte selbst liegt, oder wenigstens nur einen kleinen Höhen- oder Tiefenwinkel hat.

Fig. 3.
Z = Geodätisches Zenit. Z' = Astronomisches Zenit.



Die Differenz $u - u'$ ist zu vergleichen dem Fehler einer Horizontal-Winkelmessung, der dadurch entsteht, dass die Theodolitaxe nicht genau vertikal, sondern etwas schief gestellt wird.

Die hiefür giltige Fehler-Formel haben wir schon früher (Band II, 4. Aufl. 1895, S. 203) entwickelt, im wesentlichen ebenso, wie wir nun die Entwicklung machen, im Anschluss an Fig. 3., welche sich von Fig. 2. nur dadurch unterscheidet, dass der geodätische Zielpunkt A nicht mehr im Horizont, sondern mit einem Höhenwinkel h angenommen wird.

Indem wir nun eine Cotang-Gleichung von § 27. S. 164 auf das sphärische Dreieck $ZZ'A$ Fig. 3. anwenden, erhalten wir:

$$cotg\,(90° - h)\, sin\, \Theta = cos\, \Theta\, cos\, u + sin\, u\; cotg\,(180° - u') \tag{11}$$

Indem man Θ als klein behandelt, erhält man:

$$\Theta \, tang \, h = cos \, u - sin \, u \, cotg \, u'$$

$$\Theta \, tang \, h = \frac{cos \, u \, sin \, u' - sin \, u \, cos \, u'}{sin \, u} = \frac{sin \, (u' - u)}{sin \, u'}$$

also: $$u' - u = \Theta \, sin \, u \, tang \, h \tag{12}$$

Wenn der Höhenwinkel h klein ist, wie es bei geodätischen Zielpunkten gewöhnlich der Fall ist, so ist $\Theta \, tang \, h$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung, welche wir vernachlässigen, oder besonderer Berücksichtigung vorbehalten.

Es bleibt also noch der erste Teil der Formel (10), d. h. $\varepsilon - \varepsilon'$ zu untersuchen, und hiezu machen wir eine ganz ähnliche Entwicklung wie soeben (11) — (12), nochmals in Bezug auf das sphärische Dreieck $Z Z' P$.

Wir nehmen also wieder eine Cotang-Gleichung von § 27. S. 164 und finden durch deren Anwendung auf das Dreieck $Z Z' P$:

$$cotg \, (90° - \varphi) \, sin \, \Theta = cos \, \Theta \, cos \, \varepsilon + sin \, \varepsilon \, cotg \, (180° - \varepsilon')$$

$$\Theta \, tang \, \varphi = cos \, \varepsilon - sin \, \varepsilon \, cotg \, \varepsilon'$$

$$\Theta \, tang \, \varphi = \frac{cos \, \varepsilon \, sin \, \varepsilon' - sin \, \varepsilon \, cos \, \varepsilon'}{sin \, \varepsilon'} = \frac{sin \, (\varepsilon' - \varepsilon)}{sin \, \varepsilon'}$$

also: $$\varepsilon' - \varepsilon = \Theta \, sin \, \varepsilon \, tang \, \varphi \tag{13}$$

Statt der absoluten Lotabweichung Θ kann man hier auch die Quer-Komponente $\eta = \Theta \, sin \, \varepsilon$ einführen, und indem wir mit der bei (12) besprochenen Vernachlässigung wieder die Azimut-Differenz $\alpha - \alpha'$ selbst betrachten, haben wir:

$$\alpha' - \alpha = \eta \, tang \, \varphi \tag{14}$$

Zusammenfassung der Grundformeln für Lotabweichung.

Bezeichnungen.

	Geodät.	Astron.	
Geographische Breite oder Polhöhe	φ	φ'	
Geographische Länge von Westen nach Osten positiv gezählt	λ	λ'	
Azimut von Norden nach Osten positiv gezählt	α	α'	(15)
Absolute Lotablenkung oder Zenitablenkung	$= \Theta$		
Südliche Lotablenkung oder nördliche Zenitablenkung	$= \xi$		
Westliche Lotablenkung oder östliche Zenitablenkung	$= \eta$		

Formeln.

$$\xi = \varphi' - \varphi \tag{16}$$

$$\eta = (\lambda' - \lambda) \, cos \, \varphi \tag{17}$$

$$\eta = (\alpha' - \alpha) \, cotg \, \varphi \tag{18}$$

Die beiden Gleichungen (17) und (18) geben die Kontroll-Gleichung:

$$\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda) \, sin \, \varphi \tag{19}$$

Zur Bestimmung der Lotabweichung ξ im Meridian giebt es nur *ein* Mittel, nämlich nach (16) die Vergleichung astronomischer und geodätischer Breiten. Dagegen für die Querabweichung η kann man nach (17) und (18) die Längen-Vergleichung $\lambda' - \lambda$ *oder* die Azimut-Vergleichung $\alpha' - \alpha$ benützen; oder hat man beides, so ergiebt sich eine sehr erwünschte Probe, entsprechend der Gleichung (19).

Diese Gleichung (19) $\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda) \sin \varphi$ heisst Laplace sche Gleichung; dieselbe ist sehr wichtig, weil sie eine Beziehung giebt zwischen den beiden aus Lotablenkung entstandenen Differenzen $\alpha' - \alpha$ und $\lambda' - \lambda$, ohne dass die Lotablenkungsbeträge ξ und η selbst bekannt zu sein brauchen.

Wir wollen den Sinn dieser Gleichung nochmals mit geodätischer Anwendung zurechtlegen: Von einem Punkte O ohne Lotablenkung geht eine geodätische Linie nach einem Punkte J (in Fig. 3. S. 587) und es wird Länge und Azimut von A nach J geodätisch übertragen mit den Ergebnissen λ und α. Diese Übertragung wollen wir als fehlerfrei annehmen, und wenn nun im Punkt J auch astronomisch fehlerfrei gemessen wird, und keine Lotablenkung stattfindet, so müssten wieder die Werte λ und α erhalten werden. Wegen der in J stattfindenden Lotablenkung wird aber astronomisch λ' und α' gemessen, und dazu besteht die Laplace sche Probe $\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda) \sin \varphi$.

Es besteht also eine Probe für die geodätischen Übertragungen von Azimut und Länge, unabhängig von den Lotablenkungen.

Dieses ist nur eine summarische Erläuterung des Wesens der Laplace schen Gleichung, deren nähere Betrachtung an die zwei letzten Gleichungen der Gruppe (6) im folgenden § 122. S. 592 anzuschliessen wäre.

§ 122. Astronomisch-geodätisches Netz.

Um die Bedeutung eines astronomisch-geodätischen Netzes zunächst im ganzen zu erklären, wollen wir nochmals zurückschauen auf das rein geodätische Netz der Preussischen Landesaufnahme, welches in § 102. mit der Zeichnung auf S. 520—521 vorgeführt worden ist. Dort war nur *ein* Zentralpunkt, Berlin, astronomisch nach Breite, Länge und Azimut bestimmt, und daran hängt die ganze astronomische Orientierung des Netzes.

Im Gegensatz hiezu betrachten wir in Fig. 1. S. 590 das astronomisch-geodätische Netz, welches dem „Arbeitsplane des geodätischen Institutes für das nächste Dezennium“, Berlin 1886, entnommen ist. (Abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1886, S. 497—506.)

Die geraden Verbindungslinien dieses Netzes kann man sich als geodätische Linien denken, welche als Repräsentanten ganzer Dreiecksketten etwa in dem Sinne von § 72. Fig. 2. und Fig. 3. S. 388—389 auftreten; oder wir können z. B. annehmen, dass die Verbindung Leipzig—Brocken in dem astronomisch-geodätischen Netze aus den Dreiecken von § 102. S. 520—521 längs den Dreiecksseiten Leipzig—Petersberg—Kyffhäuser—Brocken als geodätische Linie berechnet worden sind, wie auf S. 389—390 gezeigt wurde.

Mag das nun im einzelnen Falle nach der einen oder anderen Art geschehen sein; wir können annehmen, dass alle Punkte unseres astronomisch-geodätischen Netzes, jeder für sich nach geographischer Breite, geographischer Länge und mit Azimuten astronomisch bestimmt, und dass alle diese Punkte unter sich durch geodätische Linien verbunden seien. Nun bestehen ausser den rein geodätischen Bedingungen in unserem Netze die Laplaceschen Gleichungen, welche wir am Schlusse von § 121. oben kennen gelernt haben, und dadurch kann eine Ausgleichung des Netzes viel schärfer gemacht werden, als nach den geodätischen Bedingungen allein möglich wäre.