Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 122. Astronomisch-geodätisches Netz

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Diese Gleichung (19) $\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda)\ sin\ \varphi$ heisst Laplace sche Gleichung; dieselbe ist sehr wichtig, weil sie eine Beziehung giebt zwischen den beiden aus Lotablenkung entstandenen Differenzen $\alpha' - \alpha$ und $\lambda' - \lambda$, ohne dass die Lotablenkungsbeträge ξ und η selbst bekannt zu sein brauchen.

Wir wollen den Sinn dieser Gleichung nochmals mit geodätischer Anwendung zurechtlegen: Von einem Punkte O ohne Lotablenkung geht eine geodätische Linie nach einem Punkte J (in Fig. 3. S. 587) und es wird Länge und Azimut von A nach J geodätisch übertragen mit den Ergebnissen λ und α. Diese Übertragung wollen wir als fehlerfrei annehmen, und wenn nun im Punkt J auch astronomisch fehlerfrei gemessen wird, und keine Lotablenkung stattfindet, so müssten wieder die Werte λ und α erhalten werden. Wegen der in J stattfindenden Lotablenkung wird aber astronomisch λ' und α' gemessen, und dazu besteht die Laplace sche Probe $\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda)\ sin\ \varphi$.

Es besteht also eine Probe für die geodätischen Übertragungen von Azimut und Länge, unabhängig von den Lotablenkungen.

Dieses ist nur eine summarische Erläuterung des Wesens der Laplace schen Gleichung, deren nähere Betrachtung an die zwei letzten Gleichungen der Gruppe (6) im folgenden § 122. S. 592 anzuschliessen wäre.

§ 122. Astronomisch-geodätisches Netz.

Um die Bedeutung eines astronomisch-geodätischen Netzes zunächst im ganzen zu erklären, wollen wir nochmals zurückschauen auf das rein geodätische Netz der Preussischen Landesaufnahme, welches in § 102. mit der Zeichnung auf S. 520—521 vorgeführt worden ist. Dort war nur *ein* Zentralpunkt, Berlin, astronomisch nach Breite, Länge und Azimut bestimmt, und daran hängt die ganze astronomische Orientierung des Netzes.

Im Gegensatz hiezu betrachten wir in Fig. 1. S. 590 das astronomisch-geodätische Netz, welches dem „Arbeitsplane des geodätischen Institutes für das nächste Dezennium", Berlin 1886, entnommen ist. (Abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm." 1886, S. 497—506.)

Die geraden Verbindungslinien dieses Netzes kann man sich als geodätische Linien denken, welche als Repräsentanten ganzer Dreiecksketten etwa in dem Sinne von § 72. Fig. 2. und Fig. 3. S. 388—389 auftreten; oder wir können z. B. annehmen, dass die Verbindung Leipzig—Brocken in dem astronomisch-geodätischen Netze aus den Dreiecken von § 102. S. 520—521 längs den Dreiecksseiten Leipzig—Petersberg—Kyffhäuser—Brocken als geodätische Linie berechnet worden sind, wie auf S. 389—390 gezeigt wurde.

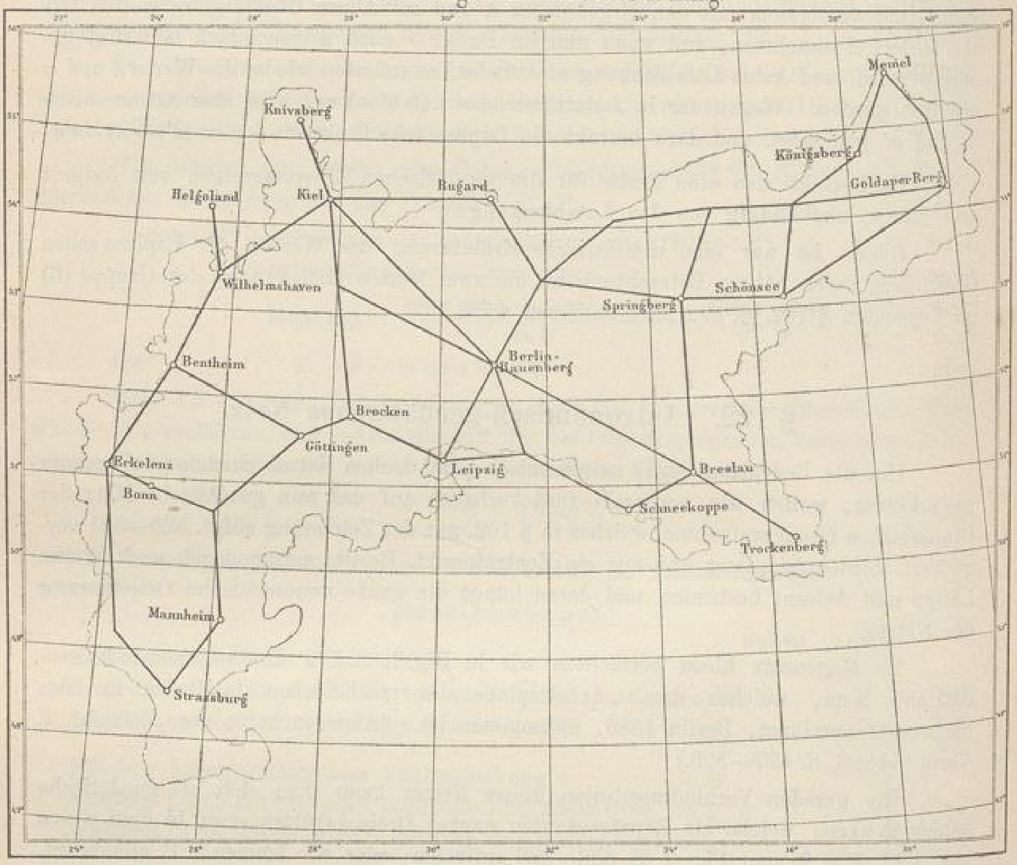
Mag das nun im einzelnen Falle nach der einen oder anderen Art geschehen sein; wir können annehmen, dass alle Punkte unseres astronomisch-geodätischen Netzes, jeder für sich nach geographischer Breite, geographischer Länge und mit Azimuten astronomisch bestimmt, und dass alle diese Punkte unter sich durch geodätische Linien verbunden seien. Nun bestehen ausser den rein geodätischen Bedingungen in unserem Netze die Laplaceschen Gleichungen, welche wir am Schlusse von § 121. oben kennen gelernt haben, und dadurch kann eine Ausgleichung des Netzes viel schärfer gemacht werden, als nach den geodätischen Bedingungen allein möglich wäre.

Denken wir uns ein Netz von der Art der Fig. 1. mit p Punkten und s Linien, und nehmen wir an, jede Linie sei geodätisch hin und her nach Richtungen beobachtet, so hat unter Voraussetzung *einer* gemessenen Seite s das Netz verschiedene geodätische Bedingungsgleichungen, deren Anzahl nach unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 176 ist:

$$2s - 3p + 4 \tag{1}$$

Fig. 1.

Astronomisch - geodaetisches Netz I Ordnung.



Massstab 1 : 10 800 000.

Dabei sind aber die geodätischen Linien selbst nicht als gemessene Grössen gezählt, sondern nur *eine* davon als Basis, und wenn die übrigen $s - 1$ Linien als lineare Messungen eingeführt werden, so kommt zu (1) noch die Zahl $s - 1$ hinzu und wir haben dann:

$$2s - 3p + 4 + s - 1 = 3s - 3(p - 1) \text{ geodätische Bedingungen} \tag{2}$$

Dazu kommen für s Linien noch s Laplacesche Gleichungen, indem wir annehmen, es sei jede Linie am Anfang und am Ende mit astronomischem Azimut gemessen und der geographische Längenunterschied zwischen den Endpunkten der Linie sei astronomisch-telegraphisch bestimmt. Also noch s Laplace sche Gleichungen zu (2) hiezugenommen giebt:

$$4s - 3(p - 1) \text{ astronomisch-geodätische Gleichungen} \tag{3}$$

Z. B. unser astronomisch-geodätisches Netz von Fig. 1. hat $p = 31$ Punkte und $s = 42$ Linien, wobei auch alle die Punkte, an welchen Brechung stattfindet, ohne dass ein Name beigesetzt wäre, als Punkte unter der Zahl $p = 31$ genommen sind. Also $s = 42$ und $p = 31$ giebt nach (3):

$$168 - 90 = 78 \text{ Gleichungen zu Fig. 1} \tag{4}$$

Man wird also eine Correlatenausgleichung mit 78 Normalgleichungen zu machen haben, wobei als Beobachtungsgrössen sowohl die linearen geodätischen Linien als auch die astronomischen Breiten-, Längen- und Azimut-Messungen auftreten (und als Azimutdifferenzen zugleich die geodätischen Winkel). Welche Annahmen von mittleren Fehlern a priori für alle diese Messungen zu machen, oder welche Messungsgewichte einzuführen sind, das ist eine Sache, welche für sich auf Grund des vorhandenen Materials zu entscheiden ist (z. B. geodätisch nach den Betrachtungen unseres früheren § 24. S. 154—157).

Obgleich hiemit eine solche astronomisch-geodätische Netzausgleichung nach ihrem Grundgedanken beschrieben ist und obgleich wir hier nicht viel weiter hierin gehen können, mag es doch am Platze sein, die Aufstellung der Gleichungen noch etwas näher zu betrachten, auf Grund des Werkes von Helmert: „Veröffentlichung des königl. Preussischen Geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft I. Berlin 1886“ und Helmert: „Höhere Geodäsie I. S. 279—296“ mit Benützung unserer früheren Behandlung dieser Sache in der 3. Auflage dieses Bandes 1890, S. 539—549.

Fig. 2. Kugel mit reduzierten Breiten.

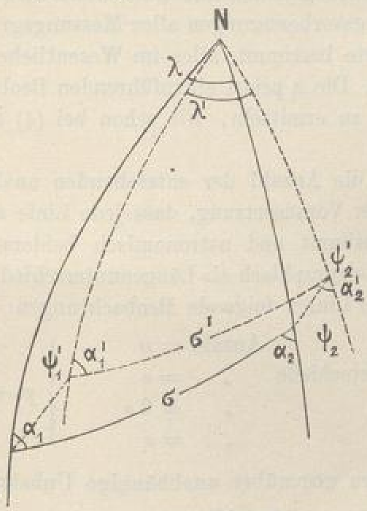
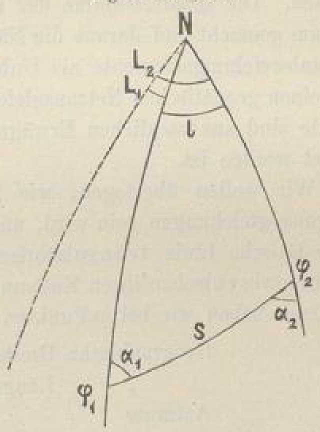


Fig. 3. Ellipsoid.



Hiezu nehmen wir ein geodätisches Polar-Dreieck in Fig. 2. sphärisch mit reduzierten Breiten und in Fig. 3. sphäroidisch; d. h. wir wollen die Theorieen von Kap. IX, § 106. benützen.

Das erste ist die Aufstellung von sphärischen Differentialformeln zwischen den Breitenänderungen $\psi'_1 - \psi_1 = d\,\psi_1$ und $\psi'_2 - \psi_2 = d\,\psi_2$ den Längenänderungen $\lambda' - \lambda = d\,\lambda$ und den Azimutänderungen $\alpha'_1 - \alpha_1 = d\,\alpha_1$ und $\alpha'_2 - \alpha_2 = d\,\alpha_2$, alles bezogen auf Fig. 2. Diese Differentialformeln erhält man durch Differentiieren sphärisch-trigonometrischer Formeln (in ähnlicher Weise wie z. B. bei Mond-Distanzen vorkommt). Die Ergebnisse sind:

$$\left.\begin{aligned} d\,\psi_2 &= \cos\lambda\, d\psi_1 + \cos\alpha_2\, d\,\sigma - \sin\alpha_2 \sin\sigma\, d\,\alpha_1 \\ d\,\lambda &= \sin\lambda\, tang\,\psi_2\, d\,\psi_1 + \frac{\sin\alpha_2}{\cos\psi_2}\, d\,\sigma + \frac{\cos\alpha_2 \sin\sigma}{\cos\psi_2}\, d\,\alpha_1 \\ d\,\alpha_2 &= \sin\lambda\, \sec\psi_2\, d\,\psi_1 + \sin\alpha_2\, tang\,\psi_2\, d\,\sigma + \cos\lambda \cos\varphi_1 \sec\psi_2\, d\,\alpha_1 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese Gleichungen müssen auf das Ellipsoid übertragen werden, was am besten nach unserem § 106. geschieht und in erster Näherung giebt:

$$\left.\begin{aligned} d\,\varphi_2 &= \cos l\, d\,\varphi_1 + V^3 \cos\alpha_2 \frac{d\,s}{c} - V^2 \sin\alpha_2 \sin S\, d\,\alpha_1 \\ d\,L_2 - d\,L_1 = d\,l &= \frac{\sin l \sin\varphi_2}{V^2 \cos\varphi_2}\, d\,\varphi_1 + V \frac{\sin\alpha_2}{\cos\varphi_2} \frac{d\,s}{c} + \frac{\cos\alpha_2}{\cos\varphi_2} \sin S\, d\,\alpha_1 \\ d\,\alpha_1 &= \frac{\sin l}{\cos\varphi_2}\, d\,\varphi_1 + V \frac{\sin\alpha_2 \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} \frac{d\,s}{c} + \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \cos l\, d\,\alpha \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Dabei ist $S = \frac{s}{N} = \frac{s}{c} V$, und es bezieht sich V auf die Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$.

Weiter wollen wir in der Formelentwicklung nicht gehen; es mag genügen, einzusehen, dass es möglich ist, lineare Gleichungen zwischen den 6 Differentialen $d\,\varphi_1$, $d\,\varphi_2$, $d\,\alpha_1$, $d\,\alpha_2$, $d\,l$, $d\,s$ aufzustellen, auf welche dann eine Ausgleichung gegründet werden kann.

Es wird nämlich nun diesen Differentialen die Bedeutung untergelegt teils von Beobachtungsfehlern und von Näherungsverbesserungen, teils auch von Lotabweichungseinflüssen. Die Quadratsumme der Beobachtungsfehler mit Gewichten wird zu einem Minimum gemacht und daraus die Näherungsverbesserungen aller Messungsgrössen und die Lotabweichungselemente als Unbekannte bestimmt, alles im Wesentlichen wie bei einer reinen geodätischen Netzausgleichung. Die a priori einzuführenden Beobachtungsgewichte sind aus sachlichen Erwägungen zu ermitteln, wie schon bei (4) S. 591 angedeutet worden ist.

Wir wollen überlegen, wie gross die Anzahl der entstehenden unabhängigen Bedingungsgleichungen sein wird, unter der Voraussetzung, dass jede Linie des Netzes als geodätische Linie triangulatorisch bestimmt und astronomisch beiderseits durch Azimute sowie zwischen ihren Endpunkten telegraphisch als Längenunterschied gemessen sei. Dann haben wir bei p Punkten und s Linien folgende Beobachtungen:

Geographische Breiten	Anzahl $= p$	$p + 4\,s$ (7)
„ Längenunterschiede	„ $= s$	
Azimute	„ $= 2\,s$	
Geodätische Linien	„ $= s$	

Diesen $p + 4\,s$ Beobachtungen stehen gegenüber unabhängige Unbekannte:

Geograpische Breiten	Anzahl $= p$	$4\,p - 3$ (8)
„ Längenunterschiede	„ $= p - 1$	
Lotabweichungs-Componenten ξ, η	„ $= 2\,(p - 1)$	

Die Längenunterschiede sind nur in der Zahl $p - 1$ vorhanden, weil *ein* Punkt (Zentralpunkt Berlin) willkürlich ist und es sich nur um die relativen Längen gegen den Zentralpunkt handelt. Ebenso ist es mit den Lotabweichungen ξ, η, welche nur relativ gegen den Zentralpunkt bestimmbar sind.

Aus (7) und (8) hat man die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen:

$$p + 4\,s - (4\,p - 3) = 4\,s - 3\,(p - 1) \quad (9)$$

Dieses stimmt mit dem früheren (3) S. 590 und giebt für das astronomisch-geodätische Netz von Fig. 1. S 590 wieder die schon bei (4) gefundene Zahl von 78 unabhängigen Bedingungsgleichungen.

Bei der bisherigen Betrachtung sind die Erddimensionen etwa a und e^2 oder c und e'^2 als gegeben vorausgesetzt. Es ist aber auch möglich, diese Dimensionen so zu bestimmen, dass sie sich dem Netz-Material möglichst anpassen; und dann muss man die Gleichungen auch noch nach c und e'^2 differentiieren und man bekommt noch entsprechende zwei neue Unbekannte in die Ausgleichung.

Dieses sind die Grundgedanken einer astronomisch-geodätischen Netzausgleichung, deren Anfänge in dem auf S. 591 citierten Helmert schen Werk des geodätischen Instituts enthalten sind, deren Ausführung im Grossen der Zukunft vorbehalten ist.