Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1900

§. 12. Zerlegung paralleler Kräfte nach zwei Richtungslinien

urn:nbn:de:hbz:466:1-84532

schreitet, zeigt sich, dass auch alle übrigen Schnittpunkte entsprechender Seilstrahlen auf der zuerst gefundenen Geraden ABC enthalten sein müssen.

Man macht von diesem Satze mit Vortheil Gebrauch, wenn man genöthigt ist, zu gegebenen Lasten nach einander mehrere Seilpolygone zu construiren. Dies kommt, wie man später sehen wird, namentlich bei der Construction der Drucklinien von Gewölben vor. Man erspart dann, nachdem ein Seilpolygon gezeichnet ist, bei den übrigen das Ziehen der Parallelen zu den Polstrahlen im Kräfteplane, das mühsamer ist, als das Ziehen von Verbindungslinien nach den Schnittpunkten der Seilstrahlen des ersten Seilecks mit der zu OO^* parallelen Linie.

§ 12. Zerlegung paralleler Kräfte nach zwei Richtungslinien.

Eine gegebene Kraft $\mathfrak{P}$ lässt sich immer in eindeutiger Weise nach zwei zu ihr parallelen Richtungslinien zerlegen, die mit ihr in derselben Ebene liegen. Man kann diese Aufgabe als einen Sonderfall der schon in § 2 behandelten Aufgabe ansehen, eine Kraft nach zwei Richtungslinien zu zerlegen, die sich mit ihr in einem Punkte schneiden und mit ihr in derselben Ebene liegen. Der gemeinsame Schnittpunkt ist hier nur ins Unendliche gerückt. Mit Hülfe eines Kräftedreiecks lässt sich die Aufgabe freilich nicht mehr lösen. Am einfachsten führt gewöhnlich die Anwendung des Momentensatzes zum Ziele. Man bedenkt, dass die geometrische Summe beider Kräfte gleich der gegebenen sein muss und dass beide für einen auf der Richtungslinie der gegebenen liegenden Momentenpunkt gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Momente haben müssen. Liegen die vorgeschriebenen Richtungslinien zu verschiedenen Seiten der gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$, so sind beide gesuchten Kräfte gleichgerichtet mit $\mathfrak{P}$ und sie theilen sich in die Grösse von $\mathfrak{P}$ im umgekehrten Verhältnisse ihrer Abstände von $\mathfrak{P}$. Im anderen Falle ist die $\mathfrak{P}$ zunächst liegende Kraft mit ihr gleichgerichtet und grösser als 𝔓, die andere entgegengesetzt gerichtet und gleich dem Unterschiede der vorigen. Dabei verhalten sich auch hier die Grössen beider Kräfte umgekehrt wie ihre Abstände von 𝔓. Aus der Verbindung beider Bedingungen folgt sofort die Lösung der Aufgabe. — Sollen die gesuchten Kräfte mit der gegebenen im Gleichgewichte stehen, so kehren sich natürlich ihre Pfeile gegenüber den vorher angegebenen um.

Wenn es sich nur um die Zerlegung einer einzigen Kraft nach gegebenen parallelen Richtungslinien handelt, wird man kaum von dem soeben besprochenen Verfahren abgehen. In anderen Fällen kann aber die Lösung mit Hülfe des Seilpolygons, die ich jetzt und zwar zunächst für die Zerlegung einer einzigen Kraft geben werde, mit grossem Vortheile benutzt werden. In Abb. 31ª sei 𝔓 die Kraft, die nach den Richtungslinien 1 und 2 zerlegt werden soll. Man ziehe die Richtungslinien 3, 4, 5 sonst beliebig, aber so, dass die Ecken des von ihnen gebildeten Dreiecks auf den gegebenen Geraden liegen. Dann sehe man den Linienzug 3, 4, 5 als ein Seilpolygon an, mit dessen Hülfe sich die längs 1 und 2 wirkenden gesuchten Kräfte wieder zu ihrer Resultirenden 𝔓 vereinigen liessen. Zu diesem Seilpolygone lässt sich der Kräfteplan in Abb. 31ᵇ ohne Weiteres zeichnen, indem man 𝔓 im Maassstabe abträgt und durch Ziehen der Parallelen zu 3 und 5 den Pol O aufsucht. Eine Parallele von O zu 4 schneidet dann auf 𝔓 die beiden gesuchten Kräfte 1 und 2 ab. Der Beweis folgt daraus, dass in der That zwei Kräfte von dieser Grösse längs 1 und 2 mit Hülfe des Seilpolygons zur Resultirenden 𝔓 vereinigt werden können.

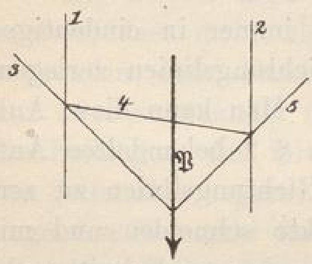

Abb. 31 a.

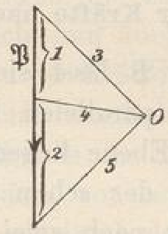

Abb. 31 b.

Liegen 1 und 2 auf derselben Seite von 𝔓, so ändert sich die Figur so ab, wie es in Abb. 32ª und 32ᵇ angegeben ist;

das Verfahren bleibt aber sonst dasselbe. Die Kraft 2 ist gleichgerichtet mit $\mathfrak{P}$ und 1 entgegengesetzt gerichtet. Sollen die Kräfte 1 und 2 mit $\mathfrak{P}$ Gleichgewicht halten, so sind ihre Pfeile umgekehrt zu nehmen.

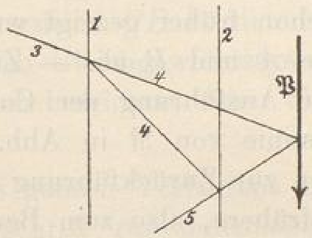

Abb. 32a.

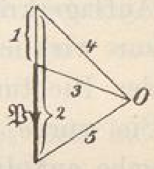

Abb. 32b.

Für einen Balken, der an zwei Stellen unterstützt ist und eine Einzellast $\mathfrak{P}$ trägt, kann man nach diesem Verfahren die Auflagerkräfte ermitteln. Voraussetzung ist dabei, dass die Auflagerung des Balkens so erfolgt, dass unter senkrechten Lasten auch nur senkrecht gerichtete Auflagerkräfte übertragen werden können. Trägt der Balken eine beliebige Zahl senkrecht gerichteter Lasten, so kann man diese erst zu einer Resultirenden vereinigen und diese nach den beiden Auflagervertikalen zerlegen. Die Zusammensetzung zur Resultirenden bewirkt man ebenfalls mit Hülfe des Seilpolygons, wie dies bereits näher auseinandergesetzt wurde.

In Abb. 33ª und 33ᵇ ist dies ausgeführt. Man trägt in Abb. 33ᵇ die Lasten 1, 2, 3, 4 auf einer Lastlinie mit aufeinanderfolgenden Pfeilen im Maassstabe auf, wählt einen beliebigen Pol O und zieht die Polstrahlen. Zu diesen werden in Abb. 33ª die Seilstrahlen parallel gezogen. Der Schnittpunkt E der äussersten Seilstrahlen liefert einen Punkt der Resultirenden $\mathfrak{R}$. Diese wird dann so wie in Abb. 31 in die Auflagerkräfte A und B zerlegt. Den Linien 3 und 5 in Abb. 31 entsprechen hier bereits die äussersten Seilstrahlen; man braucht daher nur noch die Verbindungslinie CD der Schnittpunkte der

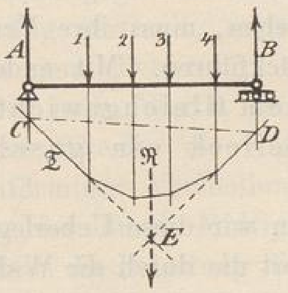

Abb. 33a.

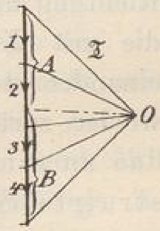

Abb. 33b.

äussersten Seilstrahlen mit den Auflagervertikalen zu ziehen, um die mit 4 in Abb. 31 bezeichnete Linie zu erhalten. Eine Parallele zu dieser im Kräfteplane vom Pole O aus schneidet daher, wie schon früher gezeigt wurde, auf der Lastlinie die Auflagerkräfte A und B ab. — Zugleich erkennt man, dass zur wirklichen Ausführung der Construction die Ermittelung der Richtungslinie von $\mathfrak{R}$ in Abb. 33[a] ganz entbehrlich ist. Sie wurde nur zur Zurückführung der hier behandelten Aufgabe auf die frühere, also zum Beweise, aber nicht zur Aufsuchung von CD und zur Ermittelung von A und B im Kräfteplane gebraucht. Bei der Anwendung des Verfahrens lässt man daher die Linie $\mathfrak{R}$, die desshalb auch nur gestrichelt angegeben wurde, ganz fort.

Man kann dieses Verfahren auch noch auf andere Art begründen, ohne auf die in Abb. 31 ausgeführte Kräftezerlegung zurückzugreifen. Dazu bedenke man, dass die Lasten 1, 2 u. s. f. mit den beiden Auflagerkräften jedenfalls ein Gleichgewichtssystem bilden. Fügt man nun zu Kräften, die im Gleichgewichte stehen, eine neue Kraft $\mathfrak{T}$ willkürlich zu, vereinigt diese mit der ersten zu einer Resultirenden $\mathfrak{S}_1$, diese mit der folgenden zu $\mathfrak{S}_2$ u. s. f., so muss, wenn alle gegebenen Kräfte zusammengesetzt sind, die letzte Resultirende wieder mit $\mathfrak{T}$ nach Lage, Richtung und Grösse übereinstimmen. Denn wenn alle Kräfte, die mit $\mathfrak{T}$ zusammengesetzt waren, im Gleichgewichte mit einander stehen, muss ihre Vereinigung mit $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{T}$ selbst wieder zurückführen. Mit anderen Worten heisst dies, dass das zu einem Gleichgewichtssysteme von Kräften construirte Seileck ein geschlossenes Polygon bilden muss.

Wenden wir diese Ueberlegung auf Abb. 33 an, so finden wir, dass dort die durch die Wahl des Poles O näher bestimmte Kraft $\mathfrak{T}$ der Reihe nach mit den Lasten 1, 2 . . . vereinigt war. Ziehen wir nun noch die Auflagerkräfte A und B in das Seilpolygon herein, so muss die letzte Resultirende wieder $\mathfrak{T}$ ergeben. Die Resultirende aus der vorher letzten Seilspannung mit dem Auflagerdrucke B muss aber durch den Schnittpunkt D gehen und damit sich diese Resultirende mit A wieder zu $\mathfrak{T}$ vereinigen kann, muss sie auch durch den Schnittpunkt C gehen. Die Richtungslinie dieser Resultirenden ist daher durch die Verbindungslinie CD bestimmt, d. h. CD ist die letzte Seite des zu dem Gleichgewichtssysteme gehörigen geschlossenen Seilecks. Man bezeichnet daher diese Linie auch als die Schlussseite.

Die Beschreibung des ganzen Verfahrens lässt sich hiernach in die einfache Vorschrift zusammenfassen: Man vereinige alle Lasten durch ein Seilpolygon, trage die durch die Schnittpunkte der äussersten Seileckseiten mit den Auflagerkraftrichtungen gehende Schlusslinie ein und ziehe zu dieser vom Pole des Kräfteplans aus eine Parallele; diese schneidet dann auf der Lastlinie die beiden Auflagerkräfte ab.

§ 13. Die Seilcurven.

Die vorausgehenden Betrachtungen sind nur so lange anwendbar, als es sich um die Zusammensetzung einer endlichen Anzahl von Einzelkräften handelt. Es kommt aber auch häufig vor, dass z. B. ein Balken eine stetig vertheilte Belastung trägt. Man spricht dann von der Belastungsintensität an einer bestimmten Stelle. Ist die Belastung an dieser Stelle auf eine gewisse Strecke hin gleichförmig vertheilt, so versteht man unter der Belastungsintensität jene Belastung, die auf die Längeneinheit kommt, d. h. also jenen Werth, der durch Multiplikation mit der Länge der Strecke die zugehörige Belastung liefert. Bei ungleichförmiger Vertheilung ist jener Werth darunter zu verstehen, der durch Multiplikation mit einem Längenelemente des Balkens die Belastung dieses Längenelementes angibt. Es ist dies zugleich die auf die Längeneinheit bezogene durchschnittliche Belastung des Längenelementes.

Trägt man in einer Zeichnung des Balkens über jedem Punkte der Mittellinie die Belastungsintensität in einem be-