Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Biegungsbeanspruchung der Pleuelstange einer Dampfmaschine

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

$\int P dt$ im Ganzen ist, sondern auch, wie gross die Kraft P zu irgend einer Zeit selbst ist. Je schneller der Stoss bei gegebenem Impuls sich abspielt, um so grösser wird die Biegungsbeanspruchung und bei sehr grossen Werthen von P wird es auch nöthig, die elastische Formänderung des Stabes während des Stosses selbst zu verfolgen, wovon bei der vorausgegangenen Rechnung abgesehen werden konnte.

11. *Aufgabe. Man soll auf Grund des d'Alembert'schen Princips die Biegungsbeanspruchung berechnen, die die Pleuelstange einer schnelllaufenden Dampfmaschine erfährt.*

Lösung. Schon im ersten Bande sind einige Betrachtungen über den Kurbelmechanismus der Dampfmaschine durchgeführt

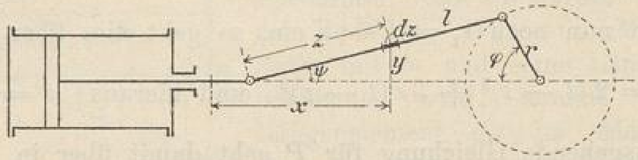

Abb. 41.

worden, an die ich hier anknüpfen kann. Abb. 41 gleicht sonst ganz der Abb. 55 auf S. 206 der 2. Aufl. des ersten Bandes und es ist hier nur noch ein Längenelement dz der Pleuelstange im Abstande z vom Kreuzkopfzapfen besonders hervorgehoben. Die Ordinate von dz ist mit y und die von der linken Todpunktlage aus gerechnete Abscisse mit x bezeichnet.

Mit der schon früher benützten und für den vorliegenden Fall stets hinreichenden Annäherung $\cos\psi = 1$ erhält man

$$x = z + r - r\cos\varphi; \quad y = \frac{z}{l} r \sin\varphi.$$

Beachtet man nun, dass z constant ist, so lange man immer nur dasselbe Massentheilchen ins Auge fasst und dass auch

$$\frac{d\varphi}{dt} = u$$

als constant betrachtet werden kann, so erhält man für die Beschleunigungscomponenten des Massentheilchens

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ru^2\cos\varphi; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{z}{l} ru^2 \sin\varphi = -yu^2.$$

Die zum Längenelemente dz der Stange gehörige Masse sei mit m bezeichnet; dann sind die mit X und Y bezeichneten Componenten der Trägheitskraft, die an dz angebracht werden muss,

$$X = -mru^2 \cos\varphi; \qquad Y = myu^2.$$

Hiernach ist X unabhängig von z, also für alle Massentheilchen der Stange gleich gross (bei gleichem m), während Y mit y oder mit z proportional von dem Kreuzkopfende der Stange zum Kurbelzapfenende hin wächst. Die durch die Vorzeichen ausgewiesenen Richtungen von X und Y sind in Abbildung 42 noch besonders eingetragen.

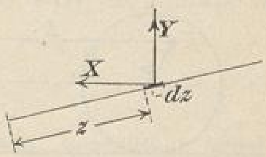

Abb. 42.

Um die Biegungsbeanspruchung der Pleuelstange zu berechnen, muss man sich die Stange, die hierbei als ein auf zwei Stützen ruhender Balken aufzufassen ist, in Ruhe denken und die Trägheitskräfte als Lasten daran anbringen. Es fragt sich dann, bei welcher Stellung der Stange die Biegungsbeanspruchung am grössten wird. Auf die Lastcomponenten X, die im Uebrigen zu den schon im ersten Bande besprochenen Erscheinungen des „Massendrucks“ führen, kommt bei der Biegung offenbar nicht viel an, da sie nur wenig von der Richtung der Stange abweichen, also im Wesentlichen nur eine axiale Beanspruchung der Stange herbeiführen. Die Lastcomponenten Y stehen dagegen in allen Lagen nahezu senkrecht zur Stange und wir müssen uns daher fragen, wann sie am grössten werden. Dies trifft dann zu, wenn $\sin\varphi = 1$ wird, oder (was hier mit Rücksicht auf die Vernachlässigungen, die wir von vornherein machten, auf dasselbe hinauskommt) wenn ψ seinen grössten Werth annimmt.

Das Belastungsschema wird demnach durch Abb. 43 zum Ausdruck gebracht. Die grösste Intensität nimmt die Belastung am rechten Auflager an. Für jedes Massentheilchen m ist dort die Last mru^2 anzubringen. Das ist übrigens genau der Werth der Centrifugalkraft für das den Kurbelwarzenkreis durchlaufende Theilchen und die Last muss auch diese Grösse annehmen, da ja an dieser Stelle die Trägheitskraft sich in der That auf eine einfache Centrifugalkraft reducirt. Vom rechten Auflager nimmt die Belastung nach links hin gleichmässig ab.

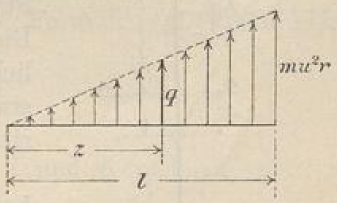

Abb. 43.

Wir haben nun eine einfache Aufgabe der Festigkeitslehre vor uns, die mit der in Aufg. 16 des zweiten Bandes auf graphischem Wege gelösten fast vollkommen übereinstimmt. Die auf die Längeneinheit entfallende Belastung q im Abstande z vom linken Auflager ist

$$q = \frac{Q}{gl} ru^2 \cdot \frac{z}{l},$$

wenn das ganze Gewicht der hierbei als cylindrisch vorausgesetzten Stange mit Q bezeichnet wird. Man kann nun leicht die Auflagerkräfte auf beide Stützpunkte und hiernach das Biegungsmoment für einen Querschnitt z berechnen. Dann sucht man das Maximalmoment auf und berechnet die Biegungsspannung σ mit Hülfe der gewöhnlichen Biegungsgleichung.

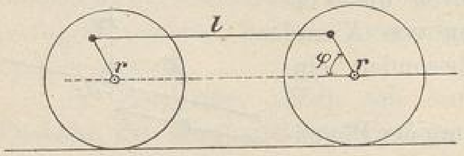

Abb. 44.

12. *Aufgabe. Man soll die Biegungsbeanspruchung einer Kuppelungsstange AB zwischen zwei Treibrädern einer Lokomotive berechnen (vgl. Abb. 44).*

Lösung. Die Aufgabe kann ganz ähnlich wie die vorhergehende behandelt werden; sie ist aber insofern einfacher, als sich die Bewegung der Kuppelungsstange in zwei Antheile zerlegen lässt, von denen der eine die gleichförmige gradlinige Translationsbewegung darstellt, die die Stange mit dem Fahrzeuge zusammen ausführt, während der andere Antheil in der Relativbewegung gegen das Fahrzeug besteht. Der erste Antheil kann zu keinen Trägheitskräften führen; man braucht sich also nur um den zweiten zu kümmern. Dieser besteht ebenfalls in einer Translationsbewegung, bei der alle Punkte Kreise vom Halbmesser r zurücklegen. Die Trägheitskräfte sind daher Centrifugalkräfte von der Grösse mu^2r und gleichmässig über die ganze Stangenlänge vertheilt. Die Biegung wird am grössten, wenn die Centrifugalkräfte senkrecht zur Stange stehen, also in der tiefsten oder in der höchsten Lage der Stange; bei der tiefsten addirt sich noch die Biegung durch das Eigengewicht, das freilich gegenüber den Trägheitswirkungen bei einer schnell laufenden Lokomotive nur gering ist.

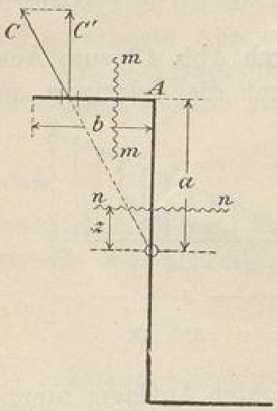

Abb. 45.

13. *Aufgabe. Die Mittellinie eines Stabes hat die in Abb. 45 angegebene Z-förmige Gestalt. Der Stab rotirt um den in der Mitte liegenden Punkt O; man soll die Biegungsbeanspruchung und die elastische Formänderung berechnen, die der Stab erfährt.*

Lösung. Der eigentlich dynamische Theil der Aufgabe ist hier sehr einfach. Man braucht nur überall die Centrifugalkräfte anzubringen, um die Aufgabe auf eine der Festigkeitslehre zurückzuführen. Die Centrifugalkräfte am mittleren Theile tragen zur Biegung nichts bei, sondern nur die an den Seitenfortsätzen. Für einen Querschnitt mm berechnet man die Summe der statischen Momente der links von mm liegenden Centrifugalkräfte C. Da $C = mu^2 r$ ist, hat man für die Vertikalcomponente C' von C den Werth $mu^2 a$, d. h. die Lasten C' sind über den Seitenfortsatz gleichmässig vertheilt. Das grösste Biegungsmoment tritt im Punkte A auf und es ist

$$M_{\max} = \frac{Q}{g} u^2 a \frac{b}{2},$$

wenn mit Q das Gewicht des seitlichen Armes bezeichnet wird. Auch der mittlere Stabtheil wird verbogen und das Biegungsmoment kann für jeden Querschnitt nn ebenfalls sofort angegeben werden. Es ist

$$M = \frac{Q}{g} u^2 a \frac{b}{2} - \frac{Q}{g} u^2 \frac{b}{2} (a - z) = \frac{Q}{g} u^2 \frac{b}{2} z.$$

Für $z = 0$ wird M zu Null. — Nachdem die Biegungsmomente bekannt sind, kann man die auftretenden Verbiegungen so wie bei einem Bogenträger (Band III, § 33) berechnen.

14. Aufgabe. In welchem Abstande vom Schwerpunkte muss ein physisches Pendel aufgehängt werden, wenn die Schwingungsdauer möglichst klein werden soll?

Lösung. Die Schwingungsdauer hängt von der reducirten Pendellänge l ab und diese ist nach den Gleichungen (76) und (77)

$$l = \frac{g\Theta}{Qs} = \frac{t^2}{s}.$$

Das Trägheitsmoment Θ für eine Axe, die den Abstand s vom Schwerpunkte hat, folgt aus dem Trägheitsmomente Θ_0 für die dazu parallele Schwerpunktsaxe nach der Formel (vgl. Band III, Gl. (53),

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{Q}{g} s^2$$

oder, wenn man mit den Trägheitsradien t und t_0 rechnet,

$$t^2 = t_0^2 + s^2.$$

Für l erhält man daher

$$l = s + \frac{t_0^2}{s}.$$

Dieser Ausdruck soll durch geeignete Wahl von s zu einem Minimum gemacht werden. Durch Differentiiren findet man

$$\frac{dl}{ds} = 1 - \frac{t_0^2}{s^2} = 0 \quad \text{oder} \quad s = t_0.$$

Da ferner
$$\frac{d^2 l}{ds^2} = 2\,\frac{t_0^2}{s^3},$$
also positiv ist, hat man für $s = t_0$ in der That ein Minimum und zwar $l_{\min} = 2 t_0$. Man erkennt zugleich, dass die Schwingungsdauer für alle unter einander parallelen Axen, die denselben Abstand vom Schwerpunkte haben, gleich gross ist. Der Kreis vom Halbmesser t_0 um den Schwerpunkt enthält alle Aufhängepunkte, um die der Körper seine schnellsten Schwingungen ausführen kann. Je weiter sich der Aufhängepunkt nach aussen oder nach innen von diesem Kreisumfange entfernt, um so langsamer werden die Schwingungen. Wenn der Aufhängepunkt unendlich nahe dem Schwerpunkte liegt, dauern die Schwingungen unendlich lange und dasselbe gilt auch, wenn der Aufhängepunkt in einen Abstand vom Schwerpunkte rückt, der als unendlich gross angesehen werden kann.

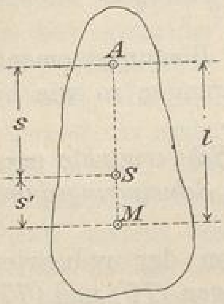

Abb. 46.

15. *Aufgabe. Man soll beweisen, dass der Aufhängepunkt und der Schwingungsmittelpunkt eines physischen Pendels mit einander vertauscht werden können.*

Lösung. In Abb. 46 sei A der Aufhängepunkt, S der Schwerpunkt und M der Schwingungsmittelpunkt. Dann ist nach der Definition des Schwingungsmittelpunktes $AM = l$ und daher nach den schon in der vorhergehenden Aufgabe benutzten Formeln
$$l = s + \frac{t_0^2}{s},$$
woraus, wenn man den Abstand SM mit s' bezeichnet, folgt
$$s' s = t_0^2.$$
Macht man nun M zum Aufhängepunkte, so tritt s' an Stelle von s und daher nach der vorausgehenden Gleichung, die auch im neuen Falle wieder erfüllt sein muss, zugleich s an Stelle von s', d. h. A ist nun in der That der Schwingungsmittelpunkt.

Ein Pendel, das zwei Schneiden bei A und M besitzt, so dass die in der Aufgabe vorkommende Vertauschung von Aufhängepunkt und Schwingungsmittelpunkt sofort praktisch ausgeführt werden kann, heisst ein Reversionspendel. Man benutzt es zur Ausführung absoluter Schweremessungen, d. h. zur Messung der Fallbeschleunigung g. Zu diesem Zwecke werden die Schneiden mit Hülfe von Stellschrauben so eingestellt, dass die Schwingungsdauer