UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Zahlenbeispiel

urn:nbn:de:hbz:466:1-84695

Visual Library

Wenn die horizontale Entfernung beider Punkte erheblich grösser ist als die vertikale (wie bei der Kegelbahn) erlangt die Brachistochrone die in Abb. 13 angegebene Gestalt. Die

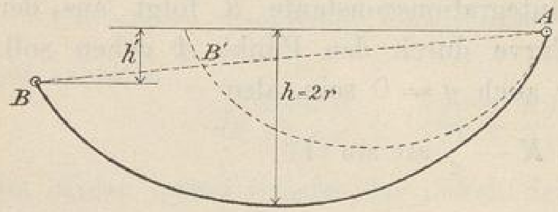

Abb. 13.

Kugel sinkt zuerst viel tiefer, erlangt dadurch eine erheblich grössere Geschwindigkeit und kann daher den etwas grösseren Weg doch in kürzerer Zeit zurücklegen, als bei einer flacheren Form des Rücklaufs. Die Zeit die nun mindestens nöthig ist, um den Punkt auf der günstigsten Curve blos durch den Einfluss der eigenen Schwere von A nach B gelangen zu lassen, folgt leicht aus Gl. (59). Für die in Abb. 13 angegebenen Verhältnisse wird diese Zeit

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ \frac{3\pi}{2} + \text{arc sin} \frac{r - h'}{r} \right\},$$

wobei h' direct gegeben und r aus der vorher beschriebenen Construction zu entnehmen ist.

Ein Zahlenbeispiel möge dies noch näher erläutern. Die horizontale Entfernung der Punkte A und B sei 10 m, der Höhenunterschied 1 m. Dann ist die zum Durchlaufen einer gradlinigen Bahn zwischen A und B erforderliche Zeit, wenn auf Bewegungswiderstände und auf die durch das Rollen der Kugel herbeigeführte langsamere Bewegung wie seither schon keine Rücksicht genommen wird, gleich 4,52 sec. Verbindet man dagegen A und B durch eine Kreisbahn, die in B eine horizontale Tangente hat, so wird die Zeit gleich 3,57 sec. Für die Brachistochrone endlich berechnet sich die Zeit auf 2,06 sec.

Will man die rollende Bewegung berücksichtigen, nimmt aber dafür an, dass in keinem Falle ein Gleiten der Kugel vorkäme, so beachte man, dass zur Geschwindigkeit v des Kugelmittelpunktes eine Winkelgeschwindigkeit $\frac{v}{\varrho}$ gehört, wenn ϱ den Kugelradius bedeutet. Die ganze lebendige Kraft L der Kugel ist daher

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$L = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 + \frac{1}{2} \; \Theta \frac{v^2}{\varrho^2}$$

oder, wenn man für das Trägheitsmoment Θ der Kugel seinen Werth

$$\Theta = \frac{2}{5} \frac{Q}{g} \varrho^2$$

einsetzt (vgl. Bd. I, S. 278, 2. Auflage), so folgt

$$L = 0{,}7 \frac{Q}{g} v^2.$$

Die lebendige Kraft ist gleich der von der Schwere geleisteten Arbeit, also ebenso gross als die lebendige Kraft des materiellen Punktes sein würde, wenn er nur gleitete und nicht rollte. Daher wird v jetzt überall gegenüber dem früher vorausgesetzten Falle im Verhältnisse $\sqrt{\frac{5}{7}}$ verkleinert und die Zeit zum Durchlaufen der Bahn in allen vorher betrachteten Fällen im Verhältnisse $\sqrt{\frac{7}{5}} = 1{,}183$ vergrössert.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass die Cycloide ihre Eigenschaft als Brachistochrone auch zwischen irgend zwei beliebig auf ihr ausgewählten Punkten behält, wie schon daraus hervorgeht, dass es sonst möglich sein müsste, auch bei der ganzen vorher betrachteten Bahn durch eine Abänderung der Curve zwischen diesen beiden Punkten eine kürzere Fallzeit herbeizuführen. Man muss nur beachten, dass in diesem Falle der materielle Punkt, wenn er in den Anfangspunkt des betrachteten Curvenstücks gelangt, schon eine gewisse Geschwindigkeit besass, während seither immer vorausgesetzt wurde, dass die Bewegung vom oberen Punkt A aus mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beginnen sollte.

Wird also die Aufgabe gestellt, eine Brachistochrone zwischen zwei Punkten A und B anzugeben, unter der Voraussetzung, dass der bewegliche Punkt mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 in A auf die Bahn gebracht wird, so berechne man zunächst

$$h'' = \frac{v_0^2}{2g}.$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Grösse h'' giebt an, um wie viel die Abscissenaxe oder mit anderen Worten die Gerade, auf der der Erzeugungskreis der Cycloide rollt, über dem Punkte A liegt. Dann hat man eine hierzu gehörige Cycloide durch die Punkte A und B zu legen; diese ist die verlangte Brachistochrone. Die Aufgabe ist durch die genannten Angaben eindeutig bestimmt und kann auf constructivem Wege mit Berücksichtigung des Umstandes, dass alle Cycloiden einander ähnlich sind, leicht gelöst werden.

Aufgaben.

1. *Aufgabe. Was folgt aus dem Flächensatze, wenn man ihn auf den schiefen Wurf eines Steines im luftleeren Raume anwendet?*

Lösung. Als äussere Kraft wirkt an dem Steine nur die Schwere. Wir können uns diese vom „Mittelpunkte" der Erde ausgehend denken und sie sonach als eine Centralkraft auffassen. Dann muss für diesen Punkt als Momentenpunkt das statische Moment der Bewegungsgrösse constant sein. Um dieses Moment für irgend eine Stelle der Wurfbahn zu berechnen, denken wir uns den Hebelarm dahin gezogen und die dazu senkrechte Componente der Geschwindigkeit mit ihm multiplicirt. Gegenüber dem Erdhalbmesser sind aber die Erhebungen der Wurfbahn nur sehr klein und wir können daher die Hebelarme für alle Stellen der Wurfbahn als gleich gross ansehen. Daher muss auch der andere Faktor des statischen Moments constant sein, d. h. die Horizontalcomponente der Geschwindigkeit wird während des Wurfes nicht geändert.

Hiermit sind wir freilich nur zu einem Resultate gelangt, das vorher schon aus einfacheren Betrachtungen bekannt war. Wie schon früher bemerkt wurde, zeigt sich aber der Nutzen des Flächensatzes erst bei Aufgaben über Punkthaufen oder über starre Körper im rechten Lichte. Bei der Dynamik des einzelnen materiellen Punktes kann er gewöhnlich leicht entbehrt werden.

Wenn die Wurfbahn als sehr hoch im Vergleiche zum Erdhalbmesser vorausgesetzt wird, ist es freilich nicht mehr zulässig, den Hebelarm überall als gleich gross anzusehen. In der That wird aber auch dann die ganze Bewegung geändert. Der Stein (z. B. ein Meteorstein, der in die Nähe der Erdoberfläche gelangt) bewegt sich dann im Allgemeinen nicht mehr in einer Parabel, sondern längs eines elliptischen Bogens, wie es bei der Planetenbewegung besprochen wurde (oder auch längs einer Hyperbel). Die Wurfbahn darf daher immer nur so lange als Parabel auf-