Vorlesungen über technische Mechanik

Föppl, August

Leipzig, 1901

Ruhiger Gang, durch schnellen Antrieb zu erzielen geringschätzig beurtheilen wollte. Solange man sich nicht theoretisch Rechenschaft über diesen zu geben vermochte, besass man nichts als einige vereinzelte Erfahrungen, über deren Zusammenhang man so wenig auszusagen vermochte, als über die Bedingungen, unter denen die gesehenen Erscheinungen stets sicher zu erwarten seien. Erst durch die theoretische Bearbeitung wurden die vereinzelten Erfahrungen zu einem wohlgeordneten Bilde vereinigt, aus dem sich erkennen lässt, warum und unter welchen Umständen so hohe Umlaufsgeschwindigkeiten zulässig sind.

Ich beginne zunächst mit der Erklärung der zuletzt beschriebenen Erscheinung, bei der die Welle in sehr kurzer Zeit in eine Geschwindigkeit versetzt wird, die über der kritischen liegt. In Abb. 35 sei durch den äusseren Kreis der Umriss des auf der biegsamen Welle sitzenden Rades in der Anfangslage angegeben. Die Zeichenebene steht senkrecht auf der Mittellinie der Welle in der Ruhelage, oder wie wir sagen wollen, senkrecht auf der Verbindungslinie der Zapfenmittelpunkte der Welle, die sich in O projiciren möge. Der Wellenquerschnitt ist in der Zeichnung nicht angegeben. Der Schwerpunkt des rotirenden Körpers soll anfänglich in S liegen. Die Strecke OS giebt also die Excentricität e an; sie ist der Deutlichkeit wegen in der Zeichnung viel grösser angegeben, als sie in Wirklichkeit zu erwarten sein wird.

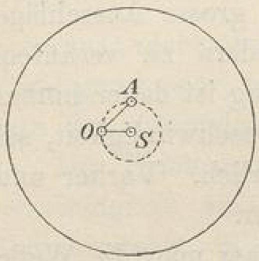

Abb. 35.

Nun möge die Welle und mit ihr das Rad in schnelle Umdrehung versetzt werden. Das Kräftepaar, das wir hierzu am Rade angreifen lassen müssen, wird durch die auf Torsion beanspruchte Welle auf das Rad übertragen. Nun wissen wir aber, dass ein Kräftepaar stets nur eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, aber keine Verschiebung des Schwerpunkts herbeizuführen vermag. Das Rad wird also, sobald wir durch Torsion der Welle drehend auf es einzuwirken beginnen, nicht eine Drehung um O, sondern eine

Drehung um S auszuführen suchen. Da die Welle hinreichend biegsam sein sollte, wird es daran auch nicht merklich gehindert. Wenn die Welle gar keine Biegungssteifigkeit hätte, könnte sogar dauernd überhaupt nur eine Drehung um S erfolgen. Der Befestigungspunkt der Welle, der ursprünglich mit O zusammenfiel, müsste dann einen Kreis um S beschreiben, der in die Abbildung punktirt eingetragen ist. Ganz ohne Biegungswiderstand dürfen wir die Welle freilich nicht voraussetzen. Denken wir uns also den Befestigungspunkt des Rades auf der Welle in seiner kreisförmigen Bahn um den Schwerpunkt S etwa nach A gelangt, so ist OA der Biegungspfeil der Welle und wegen der Biegung wird die Welle ausser dem Kräftepaare, das die Umdrehung herbeiführt, auch noch eine Kraft auf das Rad übertragen, die A nach O zurückzuführen sucht. Erst diese Kraft wird nun auch eine Bewegung des Schwerpunktes S veranlassen. Wir mussten uns aber ohnehin vorstellen, dass das Rad sehr schnell in Umdrehung versetzt werden sollte und können daher annehmen, dass das diese Umdrehung bewirkende Kräftepaar so gross ist, dass es das Rad schon mehrmals umgedreht hat, bevor die durch die Biegungselasticität hervorgerufene Kraft den Schwerpunkt merklich von seiner Stelle rücken konnte. Wie gross das Kräftepaar hierzu sein müsste, liesse sich leicht ausrechnen; wir können aber darauf verzichten, da es sich jetzt nur um eine qualitative Untersuchung handelt und man sich das Kräftepaar jedenfalls immer gross genug vorstellen kann, um die gestellte Bedingung zu erfüllen.

Nach dem Satze vom Antriebe ist die Bewegungsgrösse, die das Rad wegen der Schwerpunktsbewegung während eines Umlaufs erlangt, gleich dem Zeitintegrale der Biegungskraft. Ausserdem kann dieses Zeitintegral gleich der Dauer eines Umlaufs multiplicirt mit dem graphischen Mittelwerthe der Biegungskraft während eines Umlaufs gesetzt werden. Wir wollen uns daher überlegen, welche Richtung diesem Mittelwerthe zukommt. In Abb. 36 (s. S. 246) ist der Kreis, den A in Abb. 35 beschrieb, vergrössert herausgezeichnet. A fällt der Reihe nach mit O, A_1 A_2 u. s. f. zusammen, um dann wieder nach O zu gelangen. In jedem Augenblicke ist die von der gebogenen Welle auf das Rad übertragene „Biegungskraft“ von A aus nach O zu gerichtet; ausserdem ist die Grösse der Kraft der Sehne AO, d. h. dem Biegungspfeile, proportional. Jedem Punkte A_1 auf der oberen Hälfte des Kreises entspricht ein zum Durchmesser durch O symmetrisch liegender Punkt A_5 auf der unteren Hälfte. Die durch die Sehnen $A_1 O$ und $A_5 O$ dargestellten Biegungskräfte haben gleiche und gleichgerichtete horizontale, aber entgegengesetzt gerichtete Vertikalcomponenten. Solange der Punkt A die obere Hälfte des Kreises durchläuft, wird der Schwerpunkt nach links und zugleich nach abwärts beschleunigt; durchläuft A die untere Kreishälfte, so wird S immer noch nach links, aber jetzt zugleich nach aufwärts beschleunigt. Nun durchläuft freilich A den Kreis nicht gleichförmig, sondern beschleunigt. Wir wollen aber, um nicht zu weitläufig zu werden, von diesem Umstande jetzt absehen. Dann können wir sagen, dass der Mittelwerth der Biegungskraft für einen ganzen Umlauf im Allgemeinen nach links hin gerichtet ist. Jedenfalls erkennen wir daraus, dass sich im Mittel S nach O hin verschieben muss und nicht nach aussen hin. Das ist es aber, worauf es ankommt.

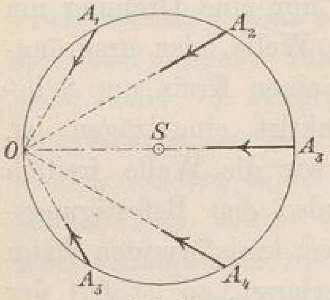

Abb. 36.

Nehmen wir nun an, S sei nach einigen Umläufen so nahe an O hin gerückt, dass es als mit O zusammenfallend betrachtet werden kann, so wird nachher A einen Kreis um O beschreiben, dessen Halbmesser gleich der Excentricität e oder gleich der Strecke OS in der Anfangslage ist. Die Biegungskraft wirkt dann während eines Umlaufs der Reihe nach von allen möglichen Richtungen her mit stets gleicher Stärke auf das Rad ein und $\int \mathfrak{P} dt$ für einen Umlauf wird zu Null. Der Schwerpunkt vermag also späterhin dauernd in der Nähe von O zu bleiben. Die anfängliche Excentricität ist durch die geringe Ausbiegung der Welle ausgeglichen und das Rad hat sich, wenn man so will, von selbst so eingestellt, dass es um eine freie Axe rotirt.

Bei dieser Betrachtung wird man freilich einen Nachweis dafür vermissen, dass diese Bewegung nun auch eine stabile Bewegung ist, d. h. man sieht wohl leicht ein, dass die Bewegung so wie beschrieben weiter gehen kann; aber es bleibt zweifelhaft, ob nicht etwa durch einen zufälligen Stoss von aussen her, der den Schwerpunkt S etwas aus der Nähe von O verrückt, der ganze Charakter der Bewegung geändert und das Rad schliesslich doch noch abgeschleudert werden könnte. Um uns hierüber Gewissheit zu verschaffen, müssen wir nun noch in eine genauere quantitative Untersuchung der Bewegung eintreten.

Hierbei nehme ich an, dass der Anfangszustand des bereits in schneller Rotation begriffenen Rades beliebig gegeben sei und dass es hierauf ohne äussere Einwirkung sich selbst überlassen werde. Ich nehme also mit anderen Worten an, dass von der Welle nur noch ein Torsionsmoment von solcher Grösse und solchem Sinne auf das Rad übertragen werde, um die Rotation auf gleicher Höhe zu erhalten, also um entweder die Bewegungswiderstände aufzuheben oder um (bei einem Turbinenrade) die fernere Beschleunigung durch die daran angreifenden äusseren Kräfte zu verhindern. Ausserdem soll auch das Gewicht des Rades nicht in Berücksichtigung gezogen werden. Man kann sich dessen Einfluss etwa dadurch beseitigt denken, dass die Welle, um die das Rad rotirt, lothrecht steht; im Uebrigen ist aber das Eigengewicht des Rades auch so gering gegenüber den gewaltigen Centrifugalkräften, die bei merklichen Excentricitäten und bei den grossen Geschwindigkeiten, um die es sich hier handelt, vorkommen, dass es ohnehin keine grosse Rolle spielt. Ausserdem soll schliesslich noch vorausgesetzt werden, dass die Excentricität auf jeden Fall gering gegenüber dem Trägheitshalbmesser des Rades ist, so dass sie genau genug diesem gegenüber als unendlich klein betrachtet werden darf.

In Abb. 37 bedeutet wie vorher O die Projektion der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Zapfen, mit denen die Welle im Gestelle gelagert ist. S ist der Ort des Schwerpunktes und A der Ort des Befestigungspunktes zur Zeit t, OA demnach der Biegungspfeil. Alle Strecken sind in die Abbildung stark vergrössert eingetragen. Ausserdem sind zwei Coordinatenaxen gezogen und der Winkel, den AS mit der X-Axe bildet, ist mit φ bezeichnet. Die X-Axe möge man sich in solcher Richtung gezogen denken, dass der Winkel φ zur Zeit $t = 0$, also im Anfange der Bewegung, gleich Null war. Die Rotation des Rades mit der constanten Winkelgeschwindigkeit u möge in solcher Richtung erfolgen, dass der Winkel φ mit der Zeit wächst. Dann kann der Winkel φ zur Zeit t

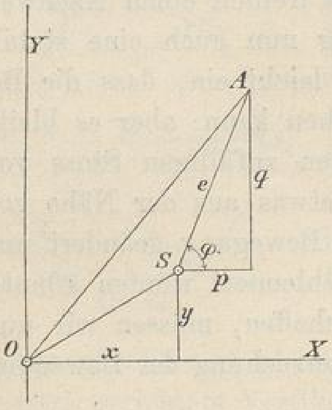

Abb. 37.

$$\varphi = ut$$

gesetzt werden. Die Biegungskraft $\mathfrak{P}$ ist gleichgerichtet mit AO und hat die Grösse $c \,.\, AO$, wenn c einen von der Biegungsfähigkeit der Welle abhängigen constanten Faktor bedeutet, der nach bekannten Sätzen der Festigkeitslehre aus der Spannweite, dem Querschnitte der Welle und dem Elasticitätsmodul stets leicht berechnet werden kann. Die Biegungskraft $\mathfrak{P}$ geht zwar nicht durch den Schwerpunkt S; wenn wir sie uns parallel nach S verlegt denken, tritt vielmehr noch ein Kräftepaar auf. Der Hebelarm dieses Kräftepaars kann aber nach einer schon vorher ausgesprochenen Voraussetzung als unendlich klein angesehen werden, so dass der Einfluss des Kräftepaars auf die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit ausser Betracht bleiben, u also in der That als constant angesehen werden kann.

Horizontal- und Vertikalprojektion der Excentricität e oder