Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

Erste Abteilung. Geometrie.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Erste Abteilung.

Geometrie.

I. Konstruktion der Kegelschnitte mit alleiniger Hülfe des Lineals.

1) Pascalscher Satz.

In Teil II ist auf zweifache Art bewiesen worden, daß der Pascalsche Satz zunächst vom Kreise gilt. Sodann ist er durch senkrechte und und schräge Parallelprojektion und ebenso durch Centralprojektion auf die Kegelschnitte übertragen worden. Er lautet für die letzteren:

Bei jedem Kegelschnitte schneiden sich die Gegenseiten des Sehnensechsecks in drei Punkten, die auf einer geraden Linie liegen.

Der Satz gilt von gewöhnlichen und überschlagenen Sechsecken. Er gilt ebenso vom einbeschriebenen Fünfeck und der Tangente in einer seiner Ecken, vom einbeschriebenen Viereck und den Tangenten in zwei Ecken, vom einbeschriebenen Dreieck und den Tangenten in den drei Ecken. Er gilt nicht nur für Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel, sondern auch von zwei parallelen oder zwei sich schneidenden Geraden (die der Ellipse bezw. Hyperbel entsprechen).

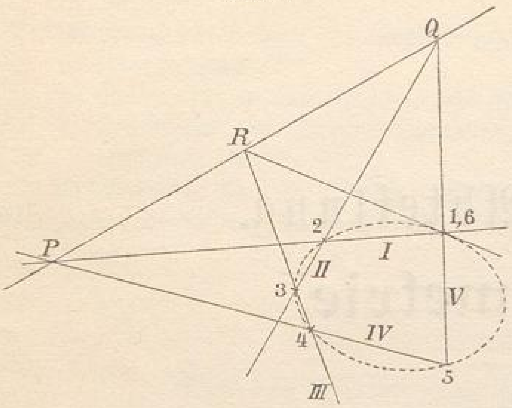
Es ist zweckmäßig die Figuren 40, 41, 42 und 43 von Teil II für jede Art von Kegelschnitten zu zeichnen und die entsprechenden Sätze auszusprechen.

Nach diesen Bemerkungen lassen sich verschiedene Konstruktions-Aufgaben mit dem Lineal allein lösen.

2) **Aufgabe.** Diejenigen Tangenten des durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts zu konstruieren, die ihn in diesen Punkten berühren.

Auflösung. Sind 1, 2, 3, 4, 5 die gegebenen Punkte, so bilde man P als Schnitt von $\overline{1, 2}$ und $\overline{4, 5}$, Q als Schnitt von $\overline{2, 3}$ und $\overline{5, 1}$, R als Schnitt von $\overline{3, 4}$ und PQ. Die Gerade von R nach 1 ist die Tangente im letzteren Punkte. In derselben Weise sind die übrigen Tangenten zu konstruieren. — Der Beweis beruht darauf, daß 1 als Doppelpunkt 1, 6 betrachtet wird.

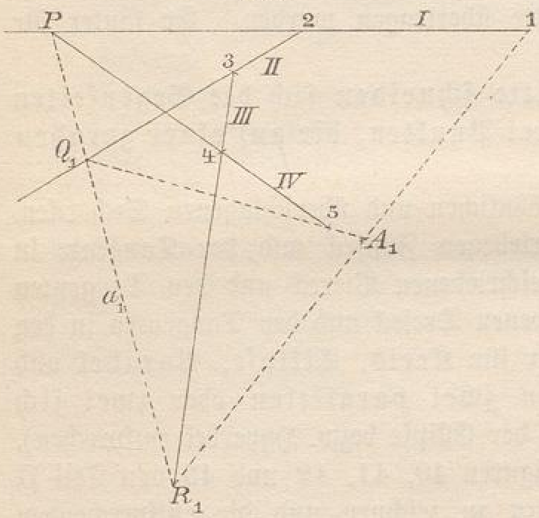
Fig. 1.



3) **Aufgabe.** Den durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitt zu konstruieren.

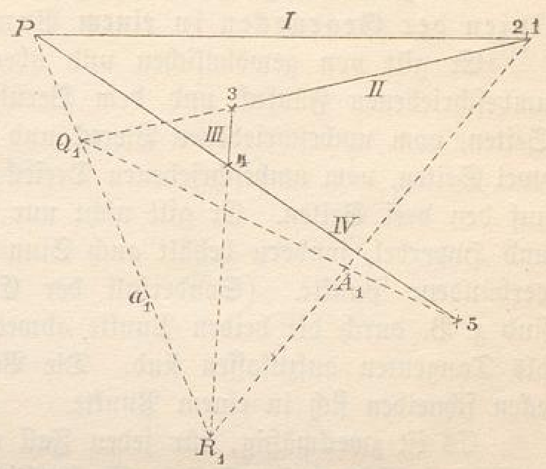
Auflösung. Sind 1, 2, 3, 4, 5 die gegebenen Punkte, so ziehe man die Geraden $\overline{1, 2}$ oder I, $\overline{2, 3}$ oder II, $\overline{3, 4}$ oder III, $\overline{4, 5}$ oder IV und bilde den Durchschnitt P von I und IV. Durch P lege man eine beliebige Pascalsche Gerade a_1, die von II und III in den Punkten Q_1 und R_1 getroffen wird. Man ziehe jetzt die Geraden $\overline{Q_1 5}$ und $\overline{R_1 1}$. Der Durchschnittspunkt A_1 dieser Geraden ist der zur Pascalschen Geraden a_1 gehörige sechste Punkt des Kegelschnitts. Zieht man beliebig viele Strahlen durch P, so kann man beliebig viele Punkte A konstruieren. Zu jeder Pascalschen Geraden gehört ein bestimmter Punkt A. Zwischen dem Strahlenbüschel durch P und den zugehörigen Punkten A auf dem Kegelschnitte findet also eine Art von Reciprocität statt, auf die noch näher eingegangen werden soll. Die Reihenfolge der Punkte ist gleichgültig. Jede Konstruktion ist eindeutig, durch fünf Punkte ist also nur ein Kegelschnitt bestimmt.

Fig. 2.



4) **Aufgabe.** Den Kegelschnitt aus vier Punkten und der Tangente in einem davon zu konstruieren.

Fig. 3.

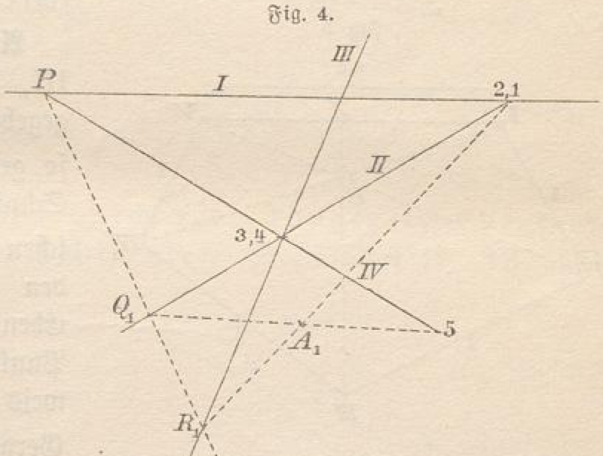


Auflösung. Ist Punkt 1 mit der Tangente I gegeben, außerdem Punkt 3, 4 und 5, so betrachte man 1 als Doppelpunkt (1, 2). Die Geraden I, II, III, IV haben dann dieselbe Bedeutung wie vorher, und die Konstruktion gestaltet sich ganz ebenso.

5) **Aufgabe.** Den Kegelschnitt aus drei Punkten und den Tangenten in zweien davon zu konstruieren.

Auflösung. Sind I und III die gegebenen Tangenten mit den Berührungspunkten (Doppelpunkten) (1, 2) und (3, 4), und ist 5 der Punkt ohne Tangente, so ziehe man noch $\overline{2, 3}$ oder II und $\overline{4, 5}$ oder IV. Mit den Geraden I, II, III, IV verfahre man dann wie vorher.

Fig. 4.



Bemerkung. Es ist anzuraten, nach jedem Quadranten hin einige Pascalsche Linien zu ziehen. Auch die Fälle, wo Q, R oder A in unendliche Entfernung fallen, müssen Berücksichtigung finden. — Die Art des entstehenden Kegelschnitts läßt sich im allgemeinen durch geeignete Wahl der Punkte vorherbestimmen, nur in der Nähe des Grenzfalles der Parabel ist die Entscheidung schwieriger.

6) Satz des Brianchon.

Mit Hülfe von Pol und Polare wurde der Pascalsche Satz in

Teil II in den des Brianchon verwandelt. Durch Projektion wurde dieser auf beliebige Kegelschnitte übertragen. Er lautet:

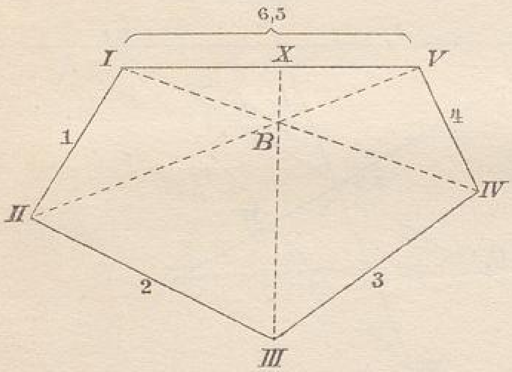
Bei jedem Kegelschnitte schneiden sich die Verbindungslinien der Gegenecken in **einem** Punkte.

Er gilt von gewöhnlichen und überschlagenen Sechsecken, vom umbeschriebenen Fünfeck und dem Berührungspunkte auf einer der Seiten, vom umbeschriebenen Viereck und den Berührungspunkten auf zwei Seiten, vom umbeschriebenen Dreieck und den Berührungspunkten auf den drei Seiten. Er gilt nicht nur von Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel, sondern behält auch Sinn für zwei durch eine Gerade verbundene Punkte. (Sonderfall der Ellipse.) Im letzteren Falle sind z. B. durch die beiden Punkte abwechselnd Gerade zu legen, die als Tangenten aufzufassen sind. Die Verbindungslinien der Gegenecken schneiden sich in einem Punkte.

Es ist zweckmäßig, für jeden Fall eine Zeichnung wirklich auszuführen. Die entsprechenden Konstruktionsaufgaben (mit alleinigem Gebrauch des Lineals zu lösen) sind folgende:

7) **Aufgabe.** Die Berührungspunkte des Kegelschnitts zu konstruieren, der sich einem gegebenen Fünfeck einbeschreiben läßt.

Fig. 5.

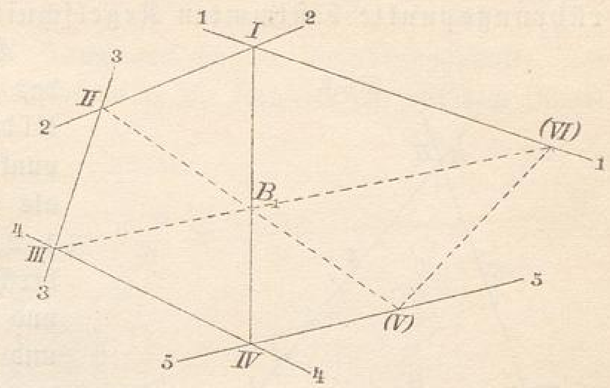


Auflösung. Sind I, II, III, IV, V die Ecken des gegebenen Tangentenfünfecks, so geben $\overline{\mathrm{I\,IV}}$ und $\overline{\mathrm{II\,V}}$ als Schnittpunkt den Brianchonschen Punkt B; $\overline{\mathrm{III}\,B}$ giebt den Berührungspunkt X. Ebenso werden die übrigen Punkte bestimmt. Der Beweis beruht darauf, daß die Gerade $\overline{\mathrm{I, V}}$ als gebrochene Linie 5, 6 betrachtet wird, deren Teile 5 und 6 einen Winkel von 180^0 einschließen.

8) **Aufgabe.** Den durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt durch beliebig viele andere Tangenten auszuschattieren.

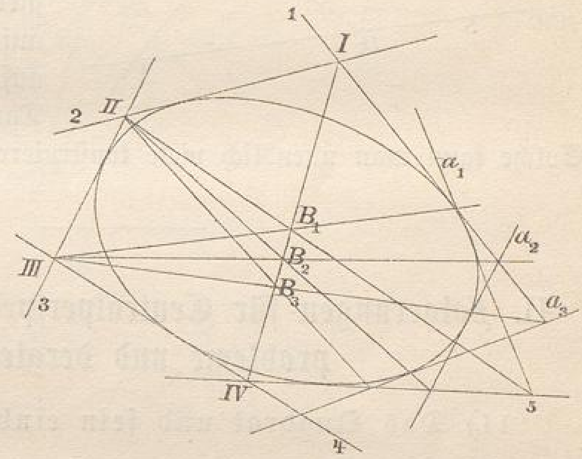
Auflösung. Die Geraden 1, 2, 3, 4, 5 seien die gegebenen Tangenten, die vorhandenen Eckpunkte seien I, II, III und IV. Man ziehe $\overline{I\,IV}$, nehme auf dieser Linie einen beliebigen Brianchon-Punkt B_1 an, ziehe $\overline{II\,B_1}$ bis zum Schnitte V mit 5, und $\overline{III\,B_1}$ bis zum Schnitte VI auf 1, dann ist $\overline{V\,VI}$ eine der gesuchten Tangenten.

Fig. 6.



Solche kann man beliebig viele konstruieren, indem man B_1 auf der Geraden I IV und ihrer Verlängerung beliebig verschiebt. Dies ist z. B. in Figur 7 geschehen.

Fig. 7.

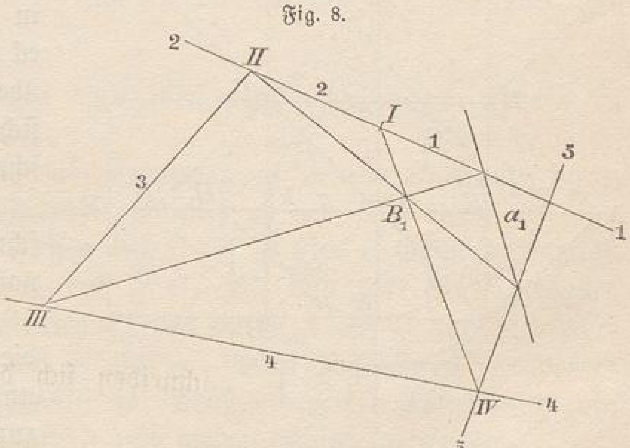


Zu jedem Punkte B_1 gehört also eine bestimmte Tangente a_1. Auf die Art des gegenseitigen Entsprechens soll noch näher eingegangen werden.

9) **Aufgabe.** Den durch vier Tangenten und einen Berührungspunkt bestimmten Kegelschnitt zu konstruieren.

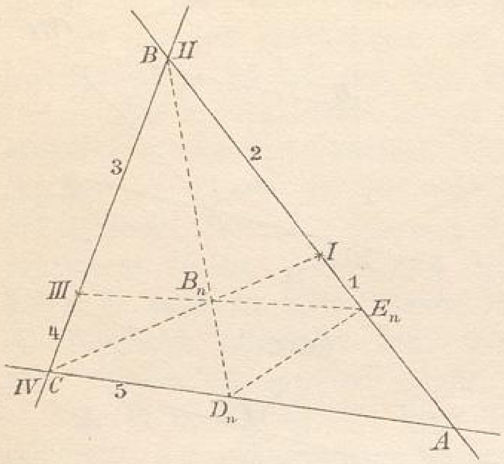
Auflösung. Die gebrochen zu denkende Gerade 1,2 mit dem Berührungspunkte I sei gegeben, ebenso die Geraden 3, 4 und 5. Die vorhandenen Schnittpunkte seien II, III, IV. Man ziehe I IV und verfahre wie vorher.

Fig. 8.



10) **Aufgabe.** Den durch drei Tangenten und zwei Berührungspunkte bestimmten Kegelschnitt zu konstruieren.

Fig. 9.

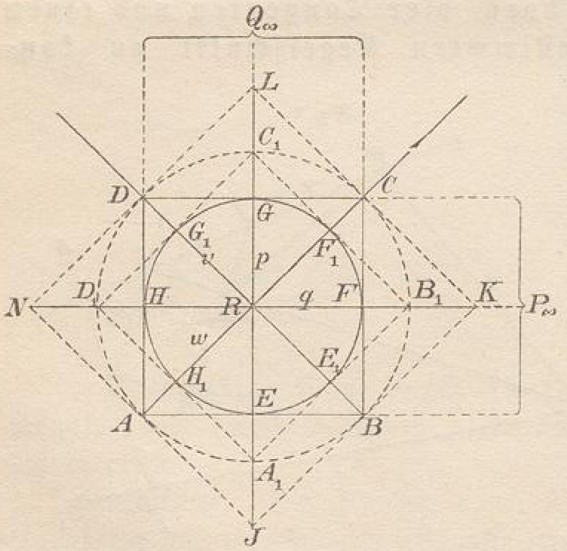


Auflösung. ABC sei das gegebene Dreiseit, I und III die gegebenen Berührungspunkte. Man betrachte AB als in I gebrochene Gerade 1, 2, BC als in III gebrochene Gerade 3, 4, B und C als die Punkte II und IV. Auf I IV nehme man willkürlich den Brianchon-Punkt B_n an. Dann giebt BB_n den Punkt D_n auf 5 und IIIB_n giebt E_n auf 1. $D_n E_n$ ist eine der Tangenten des Kegelschnitts. Solche kann man unendlich viele konstruieren.

II. Folgerungen für Centralperspektive, Schließungsprobleme und dergleichen.

11) Das Quadrat und sein einbeschriebener Kreis in Centralperspektive.

Fig. 10.



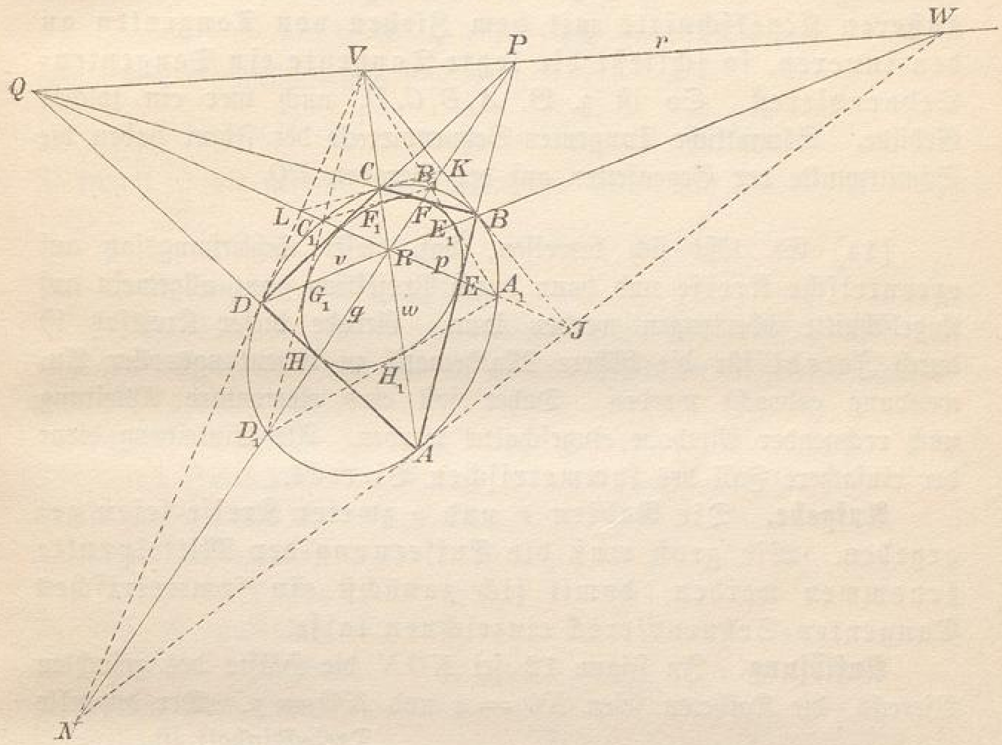
Durch Centralprojektion geht das Quadrat $ABCD$ (in Figur 10) in ein allgemeines Viereck $ABCD$ (Figur 11) über, dessen Gegenseiten sich in Punkten P und Q schneiden.

In beiden Figuren schneiden sich die Diagonalen in R.

PR in Figur 11 giebt die Berührungspunkte F und H, QR die Berührungspunkte E und G eines dem Viereck einbeschriebenen Kegelschnitts, der dem einbeschriebenen Kreise entspricht.

Man kennt also 4 Tangenten und 4 Berührungspunkte desselben, d. h. 8 Stücke, von denen 5 zur Konstruktion mit dem Lineal

Fig. 11.



allein ausreichen. — Die Gerade PQ mit den harmonischen Punkten $PQVW$ entspricht dem unendlichen Bereiche der Ebene von Figur 10. Man vergleiche in beiden Figuren die harmonischen Strahlen und Punkte.

12) Das Quadrat und sein umbeschriebener Kreis in Centralperspektive.

In Figur 10 sind die Tangenten in A und C parallel zu v, die in B und D berührenden parallel zu w. Sie bilden ein umbeschriebenes Quadrat, dessen Ecken auf p und q liegen. Folglich: In Figur 11 sind WA und WC, VB und VD die Tangenten des perspektivisch dargestellten Kreises durch A, B, C und D. Auch hier schneiden sie sich auf p und q. Man hat also 4 Tangenten und ihre 4 Berührungspunkte zur Konstruktion des Kegelschnitts mit dem Lineal allein, während 5 von diesen Stücken ausreichen.

13) Das entsprechende Schließungsproblem.

Beginnt man in Figur 10 in einem beliebigen Punkte des größeren Kreises mit dem Ziehen von Tangenten, so schließt das Tangenten-Sehnen-Quadrat stets. So ist z. B. $B_1 C_1 D_1 E_1$ ein solches Quadrat. Folglich:

Beginnt man in Figur 11 an irgend einer Stelle des äußeren Kegelschnitts mit dem Ziehen von Tangenten an den inneren, so schließt die letzte Tangente ein Tangenten-Sehnenviereck. So ist z. B. $A_1 B_1 C_1 D_1$ auch hier ein solches Gebilde. Sämmtliche Tangenten-Sehnenvierecke der Figur haben die Schnittpunkte der Gegenseiten auf der Geraden PQ.

[14) Es läßt sich beweisen, daß dieser Schließungssatz auf excentrische Kreise und dann durch Projektion ganz allgemein auf Kegelschnitte übertragen werden kann. Gerade dieser Kreissatz ist durch Jacobi für die höhere Mathematik zu bedeutungsvoller Anwendung gebracht worden. Daher soll eine elementare Ableitung nach rechnender Methode eingeschaltet werden. Als Einleitung diene der einfachere Fall des symmetrischen Vierecks.

Aufgabe. Die Radien r und ϱ zweier Kreise seien gegegeben. Wie groß muß die Entfernung der Mittelpunkte genommen werden, damit sich zunächst ein symmetrisches Tangenten-Sehnenviereck einzeichnen lasse.

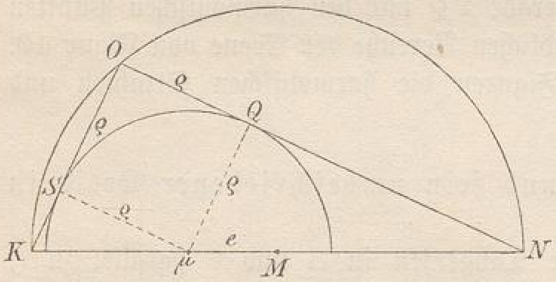
Auflösung. In Figur 12 sei KON die Hälfte des gesuchten Vierecks, die Katheten seien $NO = x$ und $KO = y$. Der doppelte Dreiecksinhalt ist

1) $xy = \varrho(x + y)$,

außerdem ist

2) $x^2 + y^2 = 4r^2$.

Fig. 12.



Aus beiden Gleichungen läßt sich folgende bilden:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4r^2 + 2\varrho(x + y),$$

oder

$$(x + y)^2 = 4r^2 + 2\varrho(x + y),$$

woraus folgt

3) $$x + y = \varrho \pm \sqrt{4r^2 + \varrho^2}.$$

Das negative Zeichen, bei dem es sich um ein Problem der äußeren Berührung (An-Kreis) handelt, soll jetzt nicht berücksichtigt werden.

Statt x und y zu berechnen, setze man $M\mu = e$ und bilde die pythagoreischen Gleichungen

$$K\mu^2 = (r - e)^2 = (y - \varrho)^2 + \varrho^2 = y^2 + 2\varrho^2 - 2\varrho y,$$
$$N\mu^2 = (r + e)^2 = (x - \varrho)^2 + \varrho^2 = x^2 + 2\varrho^2 - 2\varrho x.$$

Durch Addition folgt

$$2r^2 + 2e^2 = (x^2 + y^2) + 4\varrho^2 - 2\varrho(x + y),$$

also unter Berücksichtigung von 2) und 3)

$$2r^2 + 2e^2 = 4r^2 + 4\varrho^2 - 2\varrho\left[\varrho + \sqrt{4r^2 + \varrho^2}\right].$$

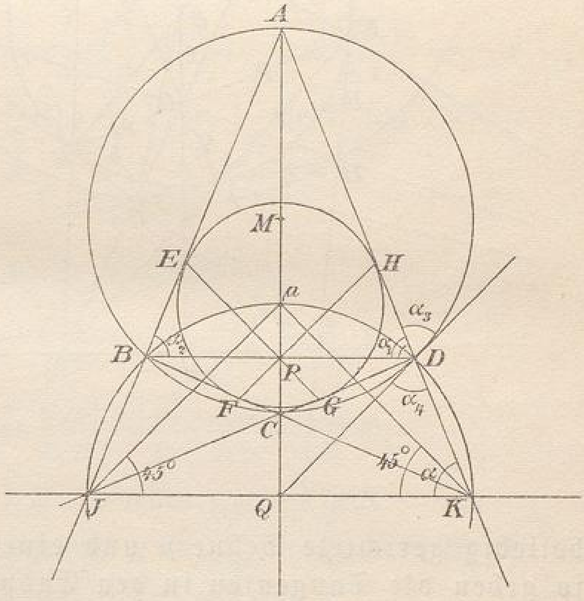
Demnach ist die gesuchte Entfernung zu finden mit Hülfe von

$$e^2 = r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{4r^2 + \varrho^2},$$

was leicht konstruiert werden kann.

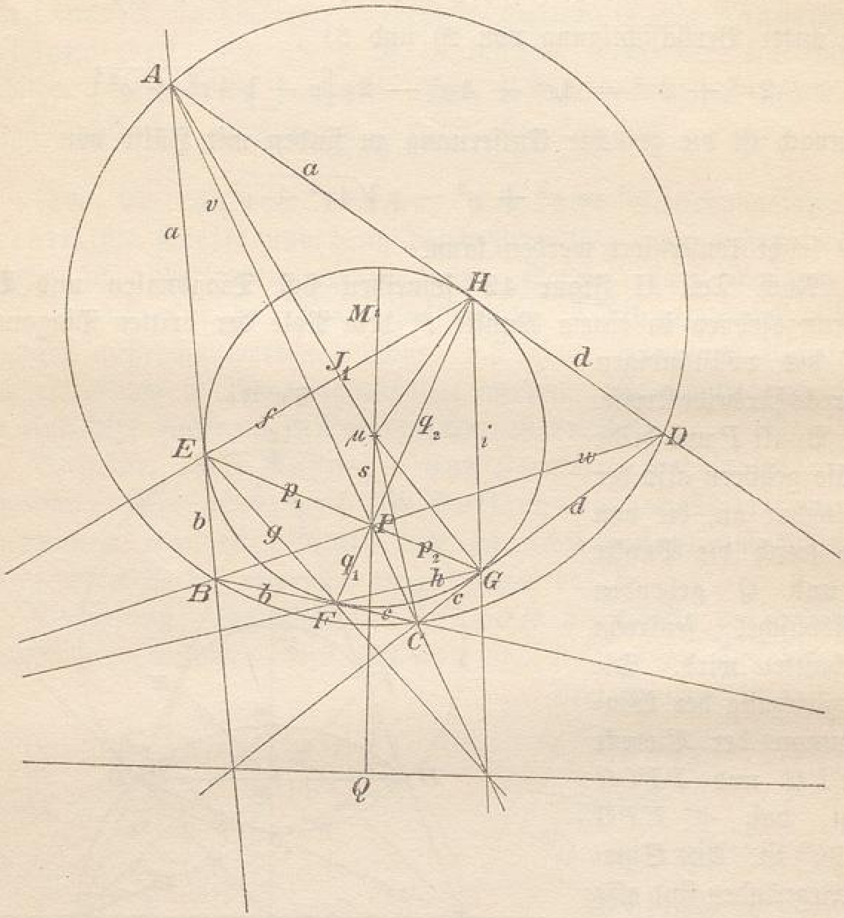
Nach Teil II Figur 42 schneiden sich Diagonalen und Berührungssehnen in einem Punkte P, dem Pole der dritten Diagonale JK des vollständigen Vierecks für beide Kreise. Der Punkt P und beide Kreise gehören also der Kreisschar an, die von dem durch die Punkte P und Q gehenden Kreisbüschel senkrecht geschnitten wird. Die Vergleichung der Winkelsumme der Vierecke $AEPH$ und $PFCG$ zeigt, daß $\sphericalangle EPH = 90^0$ ist. Aus Symmetriegründen sind also EG und FH unter 45^0 geneigt, also auch μJ und μK, und es ist $QK = Q\mu$. Aus $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ folgt $QK = QD = Q\mu$. Folglich geht der um Q mit $Q\mu$ geschlagene Kreis durch die Eckpunkte B und D und außerdem durch J und K. Sämmtliche Tangenten an den größeren Kreis, die von Punkten der Geraden JK ausgehen, sind also gleich den Entfernungen dieser Punkte von μ. Hieraus ergiebt sich eine große Zahl von Konstruktionsaufgaben.

Fig. 12a.



14b) Daß die Berührungssehnen EG und FH auf einander senkrecht stehen, gilt von jedem Tangenten-Sehnenviereck, wie die entsprechende Betrachtung für $AEPH$ und $CFPG$ zeigt. Umgekehrt: Ist ein Kreis mit Radius ϱ gegeben und legt man durch einen gegebenen Punkt P innerhalb desselben eine

Fig. 12b.



beliebig gerichtete Sehne p und eine auf ihr senkrechte q, so geben die Tangenten in den Endpunkten dieser Sehnen ein Tangenten-Sehnen-Viereck.

Es läßt sich nun zeigen, daß die umbeschriebenen Kreise sämtlicher zu P und dem gegebenen Kreise μ gehörigen Tangenten-Sehnen-Vierecke denselben Radius r und denselben Mittelpunkt M haben. Man setze zum Beweise die Entfernung $\mu P = s$, so daß $\varrho^2 - s^2$ oder k^2 der absolute Betrag der Potenz des Punktes P in Bezug auf den kleineren Kreis ist. Mit Hülfe der Abstände der

Sehnen p und q von μ ist dann leicht zu zeigen, daß $p^2 + q^2 = 4(2\varrho^2 - s^2)$ also konstant ist, welche Sehnenrichtung p man auch wähle. Aus der Gleichheit des Peripheriewinkels mit dem zugehörigen halben Centriwinkel folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke EFP und $CG\mu$, so daß $c:\varrho = q_1 : p_1 = p_2 : q_2$ ist, wo p_1, p_2, q_1, q_2 die Abschnitte der Sehnen p und q bedeuten. Daraus folgt $CD = c + d = \frac{q_1 + q_2}{p_1}\varrho = \frac{q}{p_1}\varrho$. Ebenso ergiebt sich der Wert für die anderen Vierecksseiten, und man hat:

$$AB = \frac{q\varrho}{p_2}, \quad BC = \frac{p\varrho}{q_2}, \quad CD = \frac{q\varrho}{p_1}, \quad DA = \frac{p\varrho}{q_1}.$$

Nach Ptolemäus folgt nun für die Diagonalen v und w von $ABCD$

$$v \cdot w = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

$$= \frac{q^2\varrho^2}{p_1 p_2} + \frac{p^2\varrho^2}{q_1 q_2} = \frac{p^2 + q^2}{q_1 q_2}\varrho^2 = \frac{4(2\varrho^2 - s^2)}{\varrho^2 - s^2}\varrho^2.$$

Das Produkt der Diagonalen ist also für alle hier möglichen Tangenten-Sehnen-Vierecke unveränderlich.

Die Summe zweier Gegenseiten ist

$$BC + DA = AB + CD = q\varrho\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) = q\varrho\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} = \varrho\frac{pq}{\varrho^2 - s^2}.$$

Da ferner $(BC + DA)\varrho = F$, d. h. gleich dem Inhalte von $ABCD$ ist, so folgt

$$F = \frac{pq\varrho^2}{\varrho^2 - s^2}.$$

Zugleich ist das Produkt zweier Nachbarseiten

$$AB \cdot BC = \frac{pq\varrho^2}{p_2 q_2} = \frac{p_1}{q_2} \cdot \frac{pq\varrho^2}{p_1 p_2} = \frac{p_1}{q_2} F,$$

bezw.

$$CD \cdot DA = \frac{pq\varrho^2}{p_1 q_1} = \frac{q_2}{p_1} \cdot \frac{pq\varrho^2}{q_1 q_2} = \frac{q_2}{p_1} F.$$

Die Seiten des Vierecks $EFGH$ sollen f, g, h, i sein.

Nach bekanntem Dreieckssatze ($r = \frac{abc}{4F}$, vergl. Teil II, Nr. 9) ist für die Inhalte der Dreiecke ABC und CDA

$$F = F_1 + F_2 = \frac{v \cdot AB \cdot BC + v \cdot CD \cdot DA}{4r} = \frac{vF}{4r}\left(\frac{p_1}{q_2} + \frac{q_2}{p_1}\right)$$

$$= \frac{vF}{4r}\frac{p_1^2 + q_2^2}{p_1 q_2} = \frac{vF}{4r}\frac{f^2}{p_1 q_2},$$

also

$$4r = v\frac{f^2}{p_1 q_2}$$

und ebenso

$$4\,r = w\frac{g^2}{p_1 q_1},$$

folglich

$$16\,r^2 = \frac{vwf^2g^2}{p_1{}^2 q_1 q_2},$$

oder, da $\triangle JH\mu \sim EFP$, also $\frac{fg}{2\,p_1} = \varrho$ ist, unter Berücksichtigung des obigen Resultates für $v \cdot w$,

$$r^2 = \frac{(2\,\varrho^2 - s^2)\,\varrho^4}{(\varrho^2 - s^2)^2}.$$

Für sämtliche zum Diagonalschnitt P gehörigen Tangenten-Sehnenvierecke ist demnach r konstant.

Sämtliche diese Vierecke haben aber die Schnitte ihrer Gegenseiten auf der Polare von P, und da (nach Teil II Figur 42) die Polare und P auch für den umbeschriebenen Kreis als solche zu einander gehören, so müssen M, μ und P auf einer Geraden liegen und P gehört mit den beiden Kreisen wiederum zu einer Kreisschar. Aber nur ein Kreis auf der betrachteten Seite dieser Schar kann den Radius r haben, folglich haben sämtliche zu P gehörigen Tangenten-Sehnenvierecke denselben Mittelpunkt und Radius für den umbeschriebenen Kreis. Man darf also von dem Falle des symmetrischen Vierecks Figur 12a ausgehen und findet dabei den Satz:

Sind r und ϱ die Radien zweier Kreise und ist die Entfernung der Kreismittelpunkte

$$e = \sqrt{r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{4\,r^2 + \varrho^2}},$$

so schließen sämtliche Tangenten-Sehnenvierecke, wo man auch beginnen möge.

(Unter den zahlreichen Invarianten der Vierecksschar bei gegebenen ϱ und s (und $k^2 = \varrho^2 - s^2$) seien noch folgende genannt: $fghi = 4\,\varrho^2 k^2$; $\frac{F}{F_1} = \frac{2\,\varrho^2}{k^2}$, wo F_1 der Inhalt des kleineren Vierecks $EFGH$ ist, denn

$$pq = (p_1 + p_2)(q_1 + q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_1 + p_1 q_2 + p_2 q_2 = 2\,F;$$

$$ac = bd = \varrho^2; \quad \sin A \cdot \sin B = \frac{k^2}{\varrho^2} = \frac{2\,F_1}{F}.$$

Auch auf die Beziehung $AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = F^2$ sei aufmerksam gemacht.)

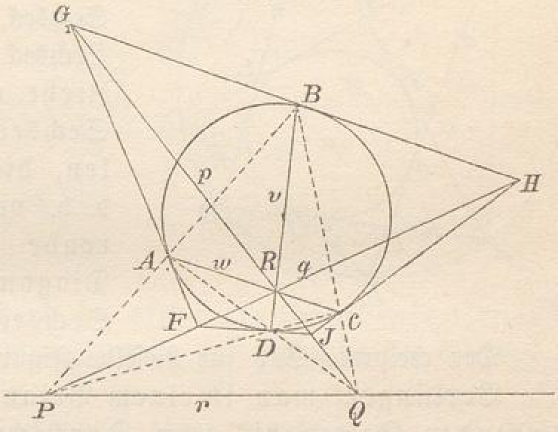
Durch Projektion folgt nun der Satz:

Wird einem Viereck ein beliebiger Kegelschnitt umbeschrieben und ein beliebiger einbeschrieben, so schließen sämtliche Tangenten-Sehnenvierecke, wo man auch beginnen möge.

Mit dem Gegebenenen hängt eine große Reihe von Konstruktionsaufgaben zusammen.]

15) Ist ein Kreis und innerhalb desselben ein Punkt R gegeben, so ist dessen Polare r bestimmt. Zu jedem Punkte P der Polare r gehört eine Polare p, die von r in Q geschnitten wird. Die Polare q von Q geht ebenso durch P, so daß P und Q zugeordnete Punkte sind und das Dreieck PQR zu sich selbst reciprok ist. Zieht man von P aus eine beliebige Sekante PAB, sodann BCQ und CDP, so giebt QD stets ein in A schließendes Sehnenviereck, dessen Diagonalen sich in R schneiden. (Warum?) Entsprechendes gilt von $ACDB$ und $ABDC$.

Fig. 13.



16) Reciprok folgt: Zieht man von einem beliebigen Punkte F auf q eine Tangente FA bis zum Schnitte G mit p, sodann GB bis zum Schnitte H mit q, sodann HC bis zum Schnitte J mit p, so giebt die Tangente JD ein in F schließendes Viereck, dessen Berührungssehnen sich in R schneiden.

Beide Schließungssätze gelten von allen Kegelschnitten.

P, Q und R sind ein sogenanntes Tripel von Punkten.

17) Das Schließungsproblem der Tangenten-Sehnendreiecke.

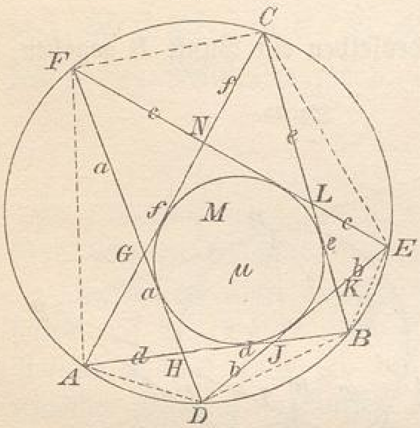
In Teil II, Geometrie Nr. 14 war gezeigt worden, daß, wenn die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien r und ϱ die Entfernung $e = \sqrt{r^2 - 2r\varrho}$ haben, sich unendlich viele Tangenten-Sehnen-Dreiecke einzeichnen lassen. Wo man auch auf der Peripherie des Außenkreises beginnen möge, Tangenten zu ziehen, stets schließt die Reihe.

Der Satz gilt auch von den äußeren Berührungskreisen des Dreiecks und dem Umkreise, nur ist dann $e = \sqrt{r^2 + 2r\varrho}$. Durch

Projektion gilt er auch von Kegelschnitten. Dort kann er folgendermaßen ausgesprochen werden:

Schließt bei zwei Kegelschnitten **ein** Tangenten-Sehnendreieck, so schließen sämtliche, wo man auch beginne.

Fig. 14.



Es giebt aber auch noch andere Ausdrucksweisen. In Figur 14 z. B. sind zwei solche Dreiecke dargestellt, ABC und DEF. Dabei ist $GHJLN$ ein Brianchon-Sechseck, $ADBECF$ ein Pascal-Sechseck. Es ergiebt sich Folgendes: Zieht man in einem Pascal-Sechseck sämtliche Diagonalen, die Dreiecke abschneiden, d. h. verbindet man alternierende Ecken, so bilden die Diagonalen ein Brianchon-Sechseck.

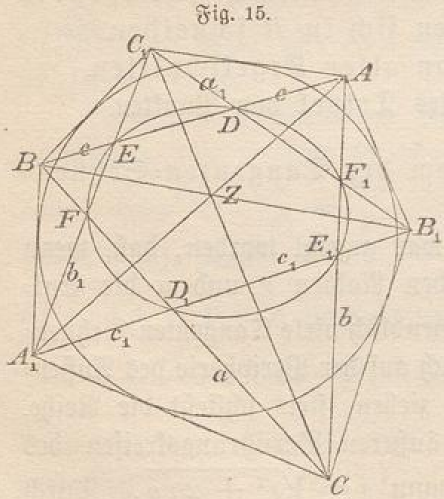
Der reciproke Satz für dieselbe Figur lautet:

Verlängert man in einem Brianchon-Sechseck die alternierenden Seiten bis zum Durchschnitt, so entstehen zwei Dreiecke, deren Ecken ein Pascal-Sechseck bilden.

18) Ein Gegenstück zum vorigen Problem.

Verlängert man die alternierenden Seiten eines Pascal-Sechsecks bis zum Durchschnitt, so entstehen zwei Dreiecke, deren Ecken ein Brianchon-Sechseck bilden.

Fig. 15.

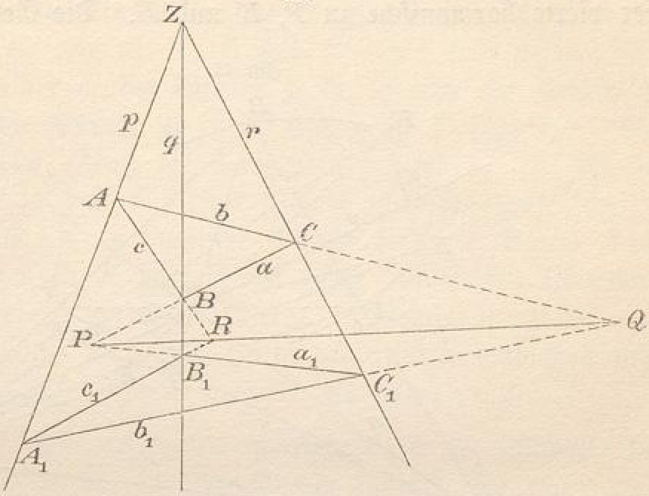


Oder: Schneidet man von einem Brianchon-Sechseck mittels der entsprechenden Diagonalen lauter Dreiecke ab, so bilden die sechs Diagonalen ein Pascal-Sechseck.

Der Beweis läßt sich auf verschiedene Weise führen. Eine räumliche Beweisführung ergiebt sich aus Figur 16.

ABC und $A_1B_1C_1$ seien zwei Dreiecke, deren entsprechende Verbindungslinien sich in einem Punkte Z schneiden; dann läßt sich $Z(A_1 B_1 C_1)$ als Zeichnung einer dreiseitigen Pyramide betrachten, die durch die Fläche ABC schräg abgeschnitten ist. Da nun bei dieser Anschauung a und a_1 in derselben Ebene liegen, so schneiden sie sich in einem Raumpunkte P. Ebenso schneiden sich b und b_1 in einem Raumpunkte Q, c und c_1 in einem Raumpunkte R. Da aber die Schnittebenen ABC und $A_1 B_1 C_1$ sich in einer Geraden schneiden, so müssen P, Q, R in einer geraden Linie liegen.

Fig. 16.



Das entsprechende gilt von Figur 15 und damit ist der Sechsecksatz bewiesen.

Der Hülfssatz lautet: Liegen zwei Dreiecke so, daß die Verbindungslinien ihrer Ecken durch einen Punkt gehen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten in Punkten, die auf einer Geraden liegen.

Der reciproke Satz für dieselbe Figur lautet:

Schneiden sich die entsprechenden Seiten zweier Dreiecke in Punkten, die auf einer Geraden liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken in einem Punkte.

Auf Grund des Reciprocität ist ein besonderer Beweis nicht nötig. Er läßt sich selbständig durch eine ähnliche Raumbetrachtung führen.

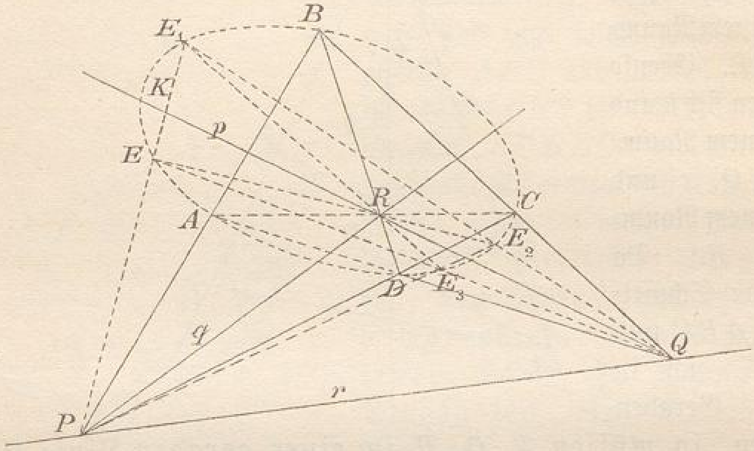
Dreiecke solcher Art bezeichnet man als perspektivische Dreiecke.

In dem Satze sind zahlreiche andere als specielle Fälle enthalten. Man vergl. z. B. Figur 43 in Teil II und den Satz über das Fußpunktdreieck der durch einen Punkt gelegten Ecktransversalen eines Dreiecks.

19) Durch vier Punkte A, B, C und D lassen sich unendlich viele Kegelschnitte legen. Bildet man noch die Schnittpunkte P, Q und R und die zugehörigen Polaren p, q und r, so ist das Dreieck PQR für diese sämtlichen Kegelschnitte sich selbst reciprok. Die Polare p wird also von sämtlichen Kegelschnitten so geschnitten, daß die Tangente im Schnittpunkte durch P geht. Entsprechendes findet mit q bezw. r statt.

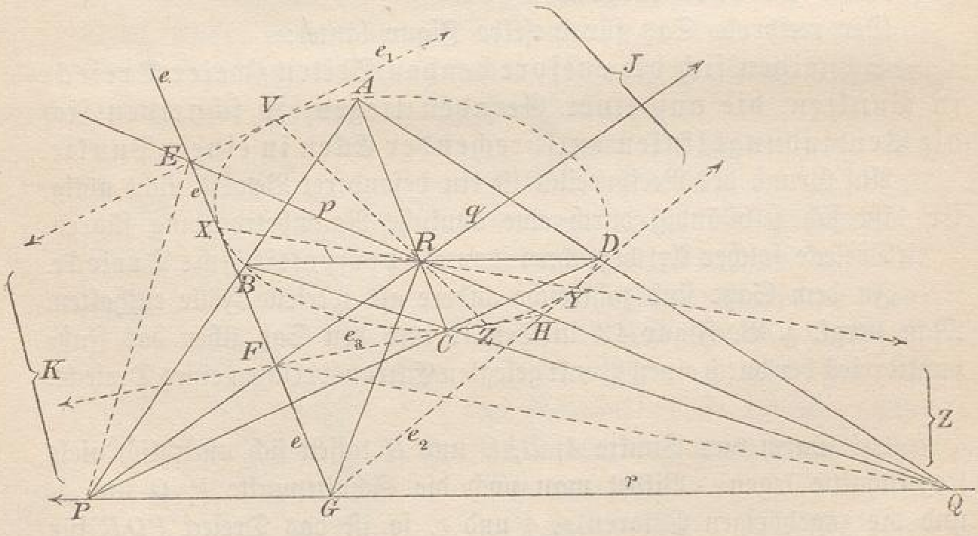
Wird noch ein fünfter Punkt E des Kegelschnitts gegeben, so kann man letzteren nach Pascal durchkonstruieren. Man findet aber auch sofort mit Hülfe der Polaren drei weitere Punkte E_1, E_2 und E_3. So ist E_1 der vierte harmonische zu P, K und E. Die Geraden $E_1 Q$ und ER

Fig. 17.



geben als Schnitt E_2, $E_2 P$ und EQ geben E_3. (Vergl. das Schließungsproblem unter 15.) Bildet man jetzt aus vier beliebigen von den acht Punkten ein neues Viereck, so ergeben sich $3 \cdot 4 = 12$ neue Punkte u. s. w. Jede Konstruktion ist eindeutig, also ist wiederum der Kegelschnitt durch 5 Punkte eindeutig bestimmt.

Fig. 18.



Statt des Punktes E kann auch eine Tangente e gegeben sein (ohne Angabe des Berührungspunktes). Hier versagt die Konstruktion nach Pascal, man findet aber sofort drei weitere Tangenten e_1, e_2

und e_3 durch folgende Überlegung. Wird die Polare r von e in G geschnitten, so muß die von G aus gezogene Tangente e_2 der vierte e zugeordnete Strahl zu GQ, GR und e sein. Sind nämlich X und Y die Berührungspunkte mit dem zu konstruierenden Kegelschnitte, so geht XY durch R, und X, Y, R und Z auf r sind harmonische Punkte. Nun schneidet e_2 die Gerade p in H und die Gerade q in J, während e die Gerade p in E und q in F schneidet. Die Geraden EJ und HF geben die Tangenten e_1 und e_3, die sich in K auf r schneiden, so daß auf jeder Polare zwei Tangentenschnitte liegen. Da P, Q, G, K harmonische Punkte sind, so können auch die zweiten Tangenten in E und F mit Hülfe des vierten harmonischen Strahles konstruiert werden. (Vergl. Schließungsproblem 16.) Die fertige Konstruktion kann mit Hülfe des Involutionssatzes von Desargues durchgeführt werden. (Siehe Anhang.)

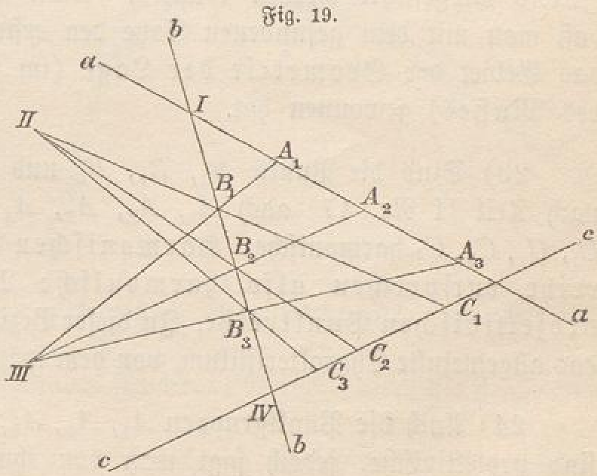
20) **Aufgabe.** Die reciproken Betrachtungen zu Abschnitt 19 anzustellen, bei denen es sich um Kegelschnitte handelt, von denen vier Tangenten gegeben sind, zu denen noch eine fünfte, oder ein Punkt tritt.

Bemerkung. Aus den letzten Betrachtungen ergiebt sich, daß, wenn von einem Kegelschnitte vier Tangenten und ein Punkt, oder vier Punkte und eine Tangente gegeben sind, man acht Stücke kennt, nämlich vier Tangenten und vier Punkte. Durch diese sind aber im allgemeinen jedesmal zwei Kegelschnitte bestimmt.

III. Projektivische Punktreihen.

21) Betrachtet man eine der Kegelschnittkonstruktionen nach Brianchon, z. B. die Konstruktion aus fünf Tangenten, so erkennt man leicht, daß sie sich aus dem Zusammenhange mit dem betreffenden Satze (über Kreis oder Kegelschnitte) ganz herauslösen läßt. Was hat dabei eigentlich stattgefunden? Gegeben waren die Punkte I, II, III, IV als Schnittpunkte der gegebenen Geraden a, $\overline{\text{I II}}$, $\overline{\text{II III}}$, $\overline{\text{III IV}}$

Fig. 19.



und c. Man hat die Gerade $\overline{\mathrm{I\,IV}}$ oder b gezogen. Jeder Punkt B_n derselben ist von II aus auf c und von III aus auf a projiziert worden, was die Punkte C_n und A_n gegeben hat. Jede Verbindungslinie $A_n B_n$ wurde Tangente des gesuchten Kegelschnitts.

Durch Projektion der Figur 19 wird nichts Wesentliches geändert. Demnach gilt Folgendes:

Projiziert man die (nummerierten) Punkte einer festen Geraden von zwei festen Punkten aus auf zwei andere gegebene Gerade, und verbindet man je zwei zusammengehörige (gleichzahlige) Projektionspunkte mit einander, so umhüllen die Verbindungslinien einen Kegelschnitt, der auch die Träger der neuen Punktreihen und die Verbindungslinien zwischen den beiden Projektionscentren unter sich und mit den Schnitten der projizierten Geraden zu Tangenten hat.

22) Punktreihen wie $A_1, A_2, A_3, \ldots, C_1, C_2, C_3, \ldots$, die durch zwei verschiedene Projektionen aus ein und derselben Punktreihe entstanden sind, bezeichnet man als projektivische Punktreihen.

Der gefundene Satz läßt sich jetzt folgendermaßen ausdrücken:

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektivischer Punktreihen umhüllen einen Kegelschnitt, der auch die Träger der Punktreihen zu Tangenten hat.

Man kann diesen Satz als eine neue Definition des Kegelschnitts betrachten. Diese Erklärung ist unabhängig von jeder Maßbeziehung. Daß eine solche Definition möglich ist, charakterisiert die Kegelschnitte als rein projektivische Gebilde und klärt darüber auf, daß manche Konstruktionen ohne Hülfe des Zirkels ausgeführt werden konnten. Man wird schon jetzt erkennen, daß man mit dem gefundenen Satze den ersten wirklichen Einblick in das Gebiet der Geometrie der Lage (im Gegensatz zur Geometrie des Maßes) gewonnen hat.

23) Sind die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 harmonische, so sind nach Teil II Nr. 47) auch A_1, A_2, A_3, A_4 harmonische und ebenso C_1, C_2, C_3, C_4 harmonische. Harmonischen Punkten einer Punktreihe entsprechen also harmonische Punkte jeder zu ihr projektivischen Punktreihe. In dieser Beziehung liegt aber noch nicht das allgemeinste Charakteristikum, von dem später gesprochen werden soll.

24) Auch die Punktgruppen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sind projektivische, jedoch sagt man von ihnen, sie befinden sich in

perspektivischer Lage. Verbindet man die gleichnamigen Punkte, so gehen sämtliche Verbindungslinien durch einen Punkt, umhüllen also einen unendlich kleinen Kegelschnitt.

Man braucht nur die eine Gerade aus ihrer Lage zu verschieben und zu verdrehen, um den perspektivischen Charakter aufzuheben. Dann treffen die Strahlen nicht mehr denselben Punkt, sondern sie umhüllen einen Kegelschnitt.

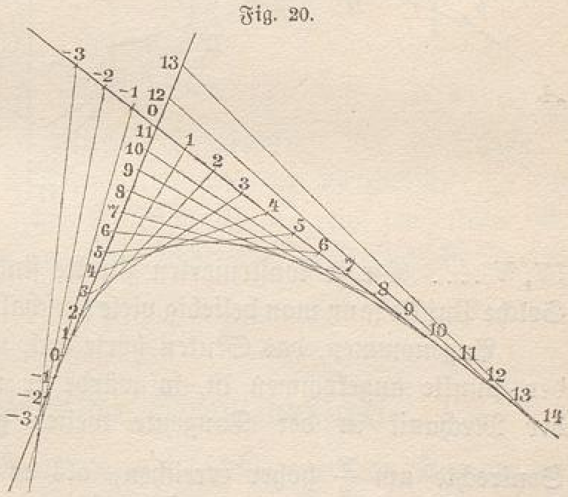
25) Nun lassen sich zwei Gruppen harmonischer Punkte dadurch in perspektivische Lage bringen, daß man zwei gleichnamige Punkte aufeinanderlegt. Vergl. Teil II, Geom. Nr. 50. Folglich:

Projektivische Punktreihen lassen sich stets in perspektivische Lage bringen. Die eine Gruppe läßt sich also auch direkt aus der andern durch Projektion erzeugen.

26) Sind die Träger a und b parallel, so nennt man die perspektivischen Punktreihen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ähnliche. Sind dabei auch die projizierenden Strahlen parallel, so nennt man sie congruente Punktreihen. Sind die Träger a und b nicht parallel, die projizierenden Strahlen aber parallel, so sind die Punktreihen ebenfalls ähnliche.

Bringt man ähnliche oder congruente Punktreihen in eine nicht perspektivische gegenseitige Lage, so muß die Umhüllungscurve der Verbindungslinien zusammengehöriger Punkte ein Kegelschnitt sein. Dieser Kegelschnitt hat nur einen Arm, reicht aber ins Unendliche, er ist also eine Parabel. Folglich:

Fig. 20.



Folgen auf zwei Geraden Punktreihen in gleichem Abstande auf einander, so ist die Umhüllungscurve der Verbindungslinien einander entsprechender Punkte im allgemeinen eine Parabel.

Im Falle gleichen Abstandes für beide Geraden wird die Zeichnung eine symmetrische.

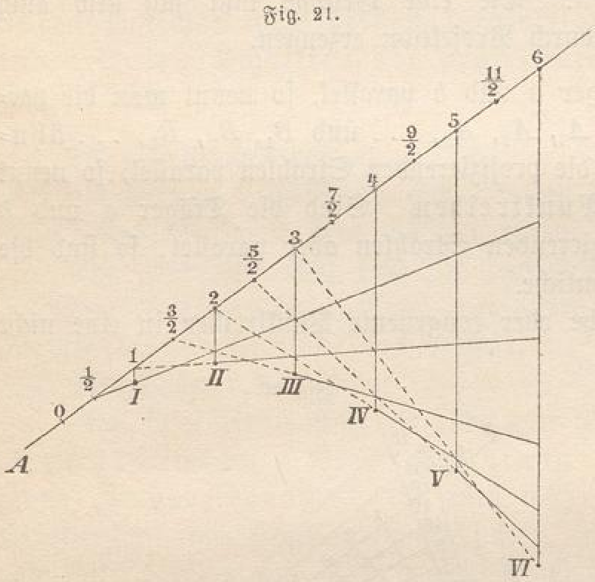
Durch die Kongruenz und Ähnlichkeit, ebenso durch die gleichen

Abstände, hat man wieder eine Maßbeziehung in die Betrachtung eingeführt, jedoch erleichtert dies für die Schulzwecke die Betrachtung.

27) Die Hochschule beginnt die neuere Geometrie der Kegelschnitte mit der Definition durch projektivische Punktreihen. Für unsern Zweck reicht es aus, die folgende Möglichkeit einer Umkehrung des früheren Lehrganges anzudeuten:

a) Die Erklärung der Parabel kann auf dem Wege der Mechanik oder Kinematik (Kinetik) gegeben werden. Ein Punkt bewege sich auf der Geraden AB mit konstanter Geschwindigkeit, diese senke sich aber dabei mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit. Nach dem Fallgesetze (vgl. Teil II, Geom. Nr. 104) ist dann der Senkungsweg in t Sekunden $h = \frac{1}{2} g t^2$, wo $\frac{g}{2}$ die Senkung in der ersten Sekunde ist. Die Senkung ist also nach 1, 2, 3, 4, 5, ... Sekunden $\frac{g}{2}$, $4\frac{g}{2}$, $9\frac{g}{2}$, $16\frac{g}{2}$, $25\frac{g}{2}$ u. s. w. Statt also nach 1, 2, 3, 4, 5 ... zu gelangen, gelangt der Punkt nach I, II, III, IV, V .... Die so konstruierten Punkte sind Punkte einer Parabel. Solche Punkte kann man beliebig viele einschalten. (Vgl. Teil II, Fig. 187.)

Fig. 21.

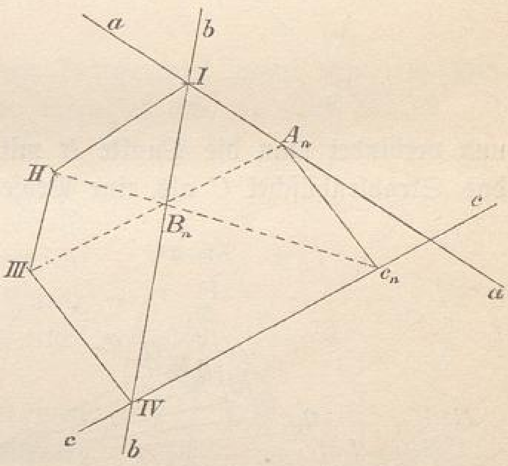


Angenommen, das Senken hörte auf, wenn der „Körper" in einem der Punkte angekommen ist, so würde er nach dem Beharrungsgesetze der Mechanik in der Tangente weiter gehen und die benachbarte Senkrechte um $\frac{g}{2}$ höher erreichen, als es vorher geschah. Also sind die Tangenten der Parabel sehr bequem mit Hülfe der Länge $\overline{1\,\mathrm{I}} = \frac{g}{2}$ zu konstruieren. Zieht man die Tangenten bis zur größten der Senkrechten durch, so sieht man auf dieser das Fallgesetz für die einzelnen Sekunden 1 : 3 : 5 : 7 : 9 ... veranschaulicht. Auf der Tangente AB aber schneiden die gezeichneten Tangenten gleiche Stücke ab. Dasselbe geschieht ebenso auf jeder andern der gezeichneten Tangenten. Folglich stimmt die Definition der Mechanik mit der Definition aus den Verbindungslinien der Punkte, die auf zwei Trägern in gleichem Abstande auf einander folgen, überein.

b) Jetzt definiert man jeden Kegelschnitt als Projektion einer Parabel. Daraus folgt, daß man durch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projektivischer Punktreihen einen Kegelschnitt erhält.

c) Ist nun b die ursprüngliche Punktreihe, c die von II aus projizierte, a die von III aus projizierte, und sind A_n und C_n die Projektionen von B_n, so ist A_nC_n eine Tangente des Kegelschnitts, der außerdem, wie die Konstruktion zeigt, die Geraden a, c, $\overline{\text{I II}}$, $\overline{\text{II III}}$, $\overline{\text{III IV}}$ berührt. Demnach ist A_n I II III IV C_n ein Tangentensechseck, und in diesem treffen sich die Diagonalen I IV, II C_n und III A_n in einem Punkte. Damit ist der Brianchon-Satz, wenn man von der Parabeldefinition absieht, ohne die Geometrie des Maßes bewiesen. Die Hochschule ist imstande, jeden Rest von Maßgeometrie aus der Betrachtung zu entfernen. (Vgl. Thomae: Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung. Dort wird alles aus dem Satze über perspektivische Dreiecke abgeleitet.)

Fig. 21 b.

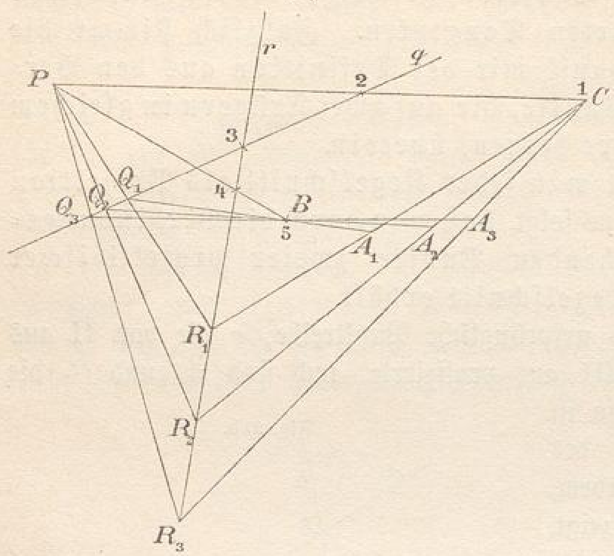


IV. Projektivische Strahlenbüschel.

28) Die reciproke Betrachtung läßt sich an jede Aufgabe der Pascalschen Gruppe, z. B. Aufgabe 3, anschließen. Bei dieser ist im Grunde nur Folgendes geschehen.

Die Punktreihe der R_n auf einer festen Geraden r ist mit zwei Punkten P und C verbunden worden, was die Strahlenbüschel P und C giebt. Das Strahlenbüschel P ist durch eine Gerade q geschnitten, was die Punktreihe der Q_n giebt. Die Punktreihe der Q_n

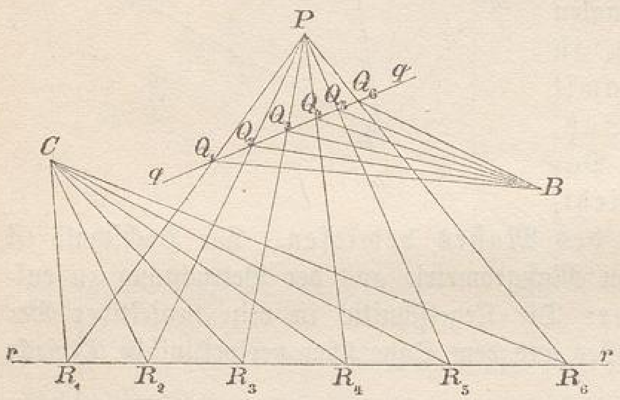
Fig. 22.



ist mit einem festen Punkte B verbunden worden, was ein Strahlenbüschel B giebt. Die gleichnamigen Strahlen der Büschel B und C schneiden sich in Punkten A_n, die einem Kegelschnitte angehören, der durch C, 2, 3, 4, B geht.

Schneidet man das Strahlenbüschel P durch eine Gerade r, und verbindet man die Punkte R mit einem Punkte C, so kann man das Strahlenbüschel C als eine Projektion des Büschels P, vermittelt durch die Gerade r, betrachten. Ebenso ist das Büschel B eine Projektion vom Büschel P. Die Büschel B und C, die durch verschiedene Projektionen aus demselben Büschel P entstanden sind, bezeichnet man als *projektivische Strahlenbüschel*.

Fig. 23.



Von den Büscheln P und C sagt man, sie befinden sich in *perspektivischer Lage*, ebenso von den Büscheln P und B. Die Gerade heißt Perspektivitätsachse.

Die ganze Ausdrucksweise ist die reciproke zu der im vorigen Abschnitte angewandten. An Stelle der Punkte sind Strahlen, an Stelle der Punktreihen Strahlenbüschel getreten und umgekehrt.

Aus der oben genannten Konstruktion folgt der Satz: *Die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen projektivischer Strahlenbüschel liegen auf einem Kegelschnitte, der auch durch die Büschelpunkte geht.*

Dieser Satz ist unabhängig von jeder Maßbeziehung.

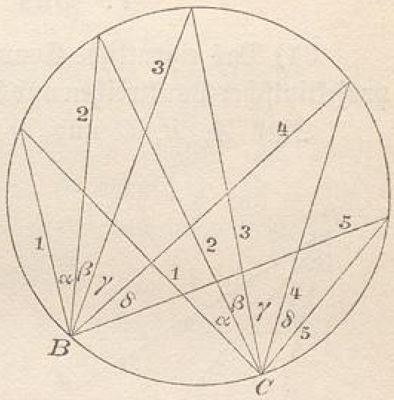
Er kann zu einer neuen Definition des Begriffs Kegelschnitt verwandt werden.

29) Auch hier gehören, wie aus der Projektion hervorgeht, zu harmonischen Strahlen des Büschels C solche von P, und zu harmonischen Strahlen von P solche von B. Folglich gilt dasselbe von B und C. Also: Bei projektivischen Strahlenbüscheln gehören zu harmonischen Strahlen des einen harmonische Strahlen des andern. Aber auch hier giebt es eine noch allgemeinere Beziehung, deren Behandlung noch folgt.

Da sich übrigens zwei Gruppen harmonischer Strahlen stets in perspektivische Lage bringen lassen, so folgt, daß projektivische Strahlenbüschel stets in perspektivische Lage gebracht werden können.

30) Strahlenbüschel können kongruent bezw. ähnlich sein. Sieht man von der Länge der Strahlen ab, so sind ähnlich und kongruent hier identisch.

Fig. 24.



Nach dem Satze von der Gleichheit der Peripheriewinkel am Kreise geben aber zwei kongruente Strahlenbüschel B und C als Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen einen Kreis. (Fig. 24.)

Projektion des letzteren giebt einen Kegelschnitt, die Projektion kongruenter Strahlenbüschel giebt aber projektivische Strahlenbüschel. (Es sind gewissermaßen mit demselben Büschel zwei Projektionen vorgenommen worden.)

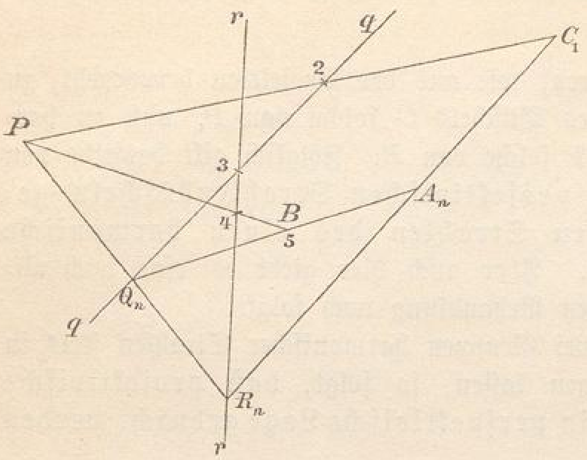
Man könnte also auch hier den Unterrichtsgang umkehren und sagen:

a) Kongruente Strahlenbüschel geben einen Kreis.

b) Demnach geben projektivische Strahlenbüschel einen Kegelschnitt.

c) Ist nun P ein Strahlenbüschel, geschnitten durch r und q, und sind $B_{(5)}$ und $C_{(1)}$ feste Punkte, sind ferner Q_n und R_n, ebenso Q_n und A_n zusammengehörige Punkte der Projektivbüschel durch P, B und C, so ist der Ort für A_n, wie die Konstruktion zeigt, ein Kegelschnitt, der durch folgende Punkte geht: durch C_1, durch 2, d. h. den Durchschnitt von q und dem gemeinschaftlichen Strahle PC_1, durch 3, den Schnitt von q und r, durch 4, den Schnitt von r und dem gemeinschaftlichen Strahle PB und durch B_5. Man hat also in $C_1 2 3 4 B_5 A_n$ ein Sehnen-

Fig. 25.



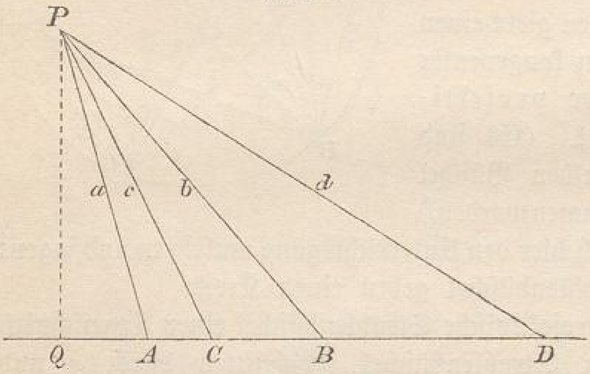
sechseck eines Kegelschnitts. P, Q_n und R_n sind die Schnittpunkte der Gegenseiten desselben, und diese liegen auf einer Geraden. Damit ist, wenn man von der Definition des Kreises bezw. der gleichen Winkel absieht, der Pascalsche Satz ohne jede Maßbeziehung bewiesen. Die Hochschule kann auch hier jeden Rest von Maßbeziehungen entfernen.

V. Das Doppelverhältnis.

31) Das eigentliche Charakteristikum der gegenseitigen Beziehungen projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel ergiebt sich folgendermaßen.

Sind A, B, C und D harmonische Punkte, so ist

Fig. 26.



$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD},$$

oder wenn man $-BC$ für CB schreibt,

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1.$$

Ist aber D nicht der vierte harmonische, sondern ein beliebiger Punkt der Geraden, so ist $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ verschieden von -1 und hat für jede Lage von D einen bestimmten Wert. Da es sich um das Verhältnis zweier Verhältnisse handelt, nennt man den Ausdruck das Doppelverhältnis der vier Punkte und bezeichnet es als $(ABCD)$.*)

*) Bei der hier gewählten Schreibweise sind die zugeordneten Punkte nebeneinander geschrieben.

32) Es fragt sich nun, ob, wenn man die Punkte A, B, C, D mit einem beliebigen Punkte P verbindet, für die Strahlen etwas Entsprechendes gilt.

Bezeichnet man den Winkel zwischen a und c mit (ac), so ist

$$2 \cdot \triangle APC = PA \cdot PC \sin(ac) = AC \cdot PQ,$$

folglich

$$\frac{AC}{\sin(ac)} = \frac{PA \cdot PC}{PQ}, \text{ und ebenso } \frac{BC}{\sin(bc)} = \frac{PB \cdot PC}{PQ},$$

durch Division also

1) $$\frac{AC}{BC} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}.$$

Ebenso ist

$$\frac{AD}{\sin(ad)} = \frac{PA \cdot PD}{PQ}, \quad \frac{BD}{\sin(bd)} = \frac{PB \cdot PD}{PQ},$$

also durch Division

2) $$\frac{AD}{BD} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Durch Division ergiebt sich aus 1) und 2) die Beziehung

3) $$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Die linke Seite ist das Doppelverhältnis der vier Punkte. Die rechte Seite heißt analog das **Doppelverhältnis der vier Strahlen.** Es wird mit $(abcd)$ bezeichnet. A und B, ebenso C und D sind zugeordnete Punkte, a und b, ebenso c und d zugeordnete Strahlen. Gleichung 3 lautet in der vereinfachten Schreibweise

4) $$(ABCD) = (abcd).$$

Also: **Das Strahlenbüschel und die schneidende Gerade haben für je vier Elemente dasselbe Doppelverhältnis.**

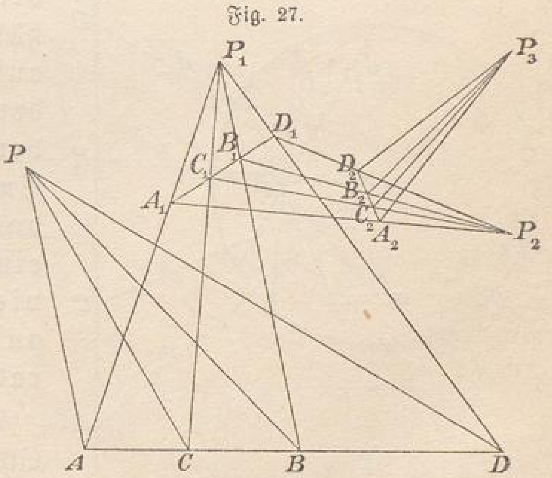
33) Bildet man nun aus dem Strahlenbüschel P auf projektivischem Wege ein perspektivisches P_1, so ist

$$(abcd) = ABCD = (a_1 b_1 c_1 d_1).$$

Bildet man aus der Punktreihe $ABCD$ eine perspektivische $A_1 B_1 C_1 D_1$, so ist

$$ABCD = (abcd) = A_1 B_1 C_1 D_1.$$

Fig. 27.



Wie man nun auch projektivisch fortfahren möge, stets bleibt der Wert der Doppelverhältnisse unveränderlich.

Folglich gelten die Sätze:

Bei projektivischen Punktreihen haben je vier Punkte des einen stets dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Punkte des andern.

Bei projektivischen Strahlenbüscheln haben je vier Strahlen des einen dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Strahlen des andern.

Da aber auch die Doppelverhältnisse der Strahlen und der zugehörigen Punktgruppen gleich sind, so folgt ganz allgemein:

Bei projektivischen Gebilden ist für je vier Paare einander entsprechender Elemente das Doppelverhältnis dasselbe.

Die drei Sätze geben die Gleichungen:

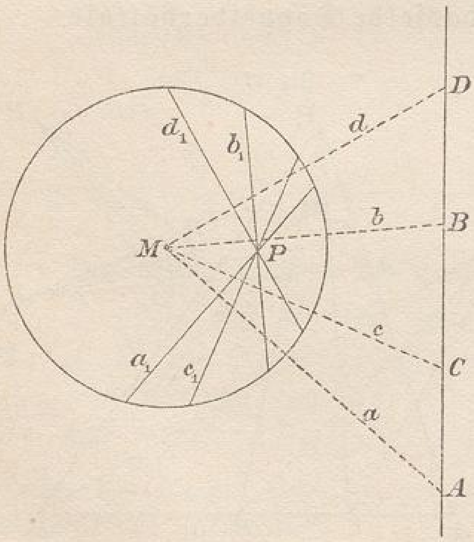
$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D), \quad (abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1),$$
$$(ABCD) = (a_1 b_1 c_1 d_1).$$

34) Bei der kongruenten Abbildung sind die homologen Winkel gleich, die Längen homologer Seiten ebenfalls gleich.

Bei der ähnlichen Abbildung sind die homologen Winkel gleich und die Längen homologer Seiten stehen in konstantem Verhältnis.

Bei der Abbildung durch Projektion ist das Doppelverhältnis von je vier Punkten auf einer Geraden gleich dem der vier entsprechenden Punkte; ebenso ist das Doppelverhältnis von je vier Strahlen gleich dem der vier entsprechenden Strahlen.

Fig. 28.



35) Es giebt aber nach Obigem auch projektivische Beziehungen, bei denen das Doppelverhältnis von je vier Punkten auf einer Geraden gleich dem der vier entsprechenden Strahlen durch einen Punkt ist, und umgekehrt, das von vier Strahlen durch einen Punkt gleich dem der vier entsprechenden Punkte auf der entsprechenden Geraden.

Dies geschieht z. B. bei der Abbildung durch reciproke Polaren.

Verbindet man nämlich die Punkte $ABCD$ in Figur 28 mit M, so sind zunächst die Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(abcd)$ einander gleich. Ist aber P der Pol der Geraden p, und fällt man von ihm aus auf die Strahlen a, b, c, d Lote, so erhält man die Polaren a_1, b_1, c_1, d_1 der Punkte $ABCD$, und diese bilden ein zum vorigen kongruentes Strahlenbüschel, denn sie folgen unter denselben Winkeln aufeinander, wie jene. Aus $(ABCD) = (abcd)$ und $(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$ folgt $(ABCD) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$.

Durch Projektion dieser Figur erkennt man, daß ganz allgemein bei der Abbildung durch reciproke Polaren mittels eines beliebigen Kegelschnitts die Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ ebenfalls gleich bleiben.

36) Durch Abbildung mittels reciproker Polaren wird jede Figur von der Gestalt 29 in eine von der Gestalt 30 verwandelt, d. h. perspektivische Strahlenbüschel verwandeln sich in perspektivische Punktreihen; ebenso verwandeln sich projektivische Strahlenbüschel in projektivische Punktreihen, und umgekehrt.

Fig. 29.

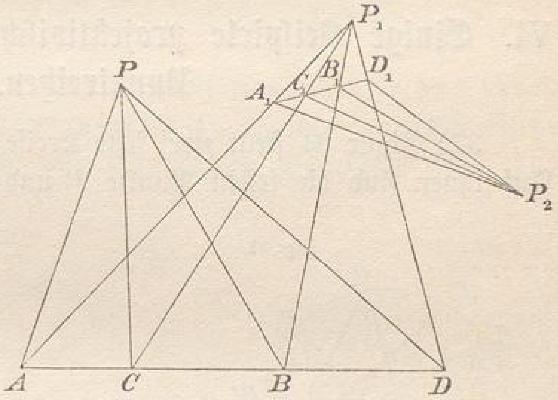
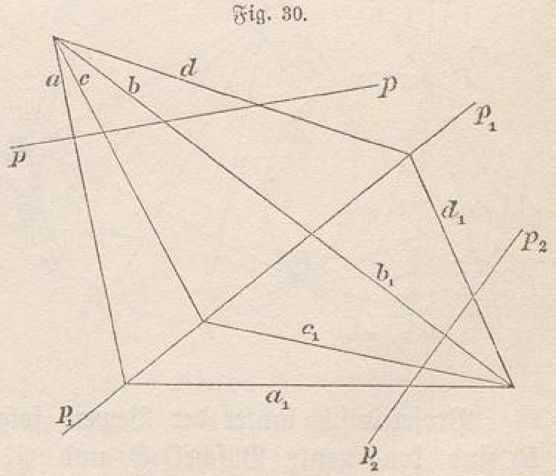


Fig. 30.



Die Verbindungslinien entsprechender Elemente projektivischer Punktreihen gehen also über in die Durchschnittspunkte entsprechender Elemente von projektivischen Strahlenbüscheln. Folglich:

Durch Abbildung mittels reciproker Polaren gehen sämtliche Punkte jedes Kegelschnitts über in die sämtlichen Tangenten eines entsprechenden Kegelschnitts.

Dabei bleiben sowohl

die harmonischen Verhältnisse, als auch die Doppelverhältnisse allgemeiner Art erhalten.

Noch ein Punkt sei hier erwähnt: Betrachtet man das Doppelverhältnis

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD) = k,$$

so sind im ganzen 24 Umstellungen in der Reihenfolge der Punkte möglich. Von diesen sämtlichen Doppelverhältnissen stimmen je vier mit einander überein, so ist z. B., wie die ursprüngliche Schreibweise zeigt,

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = k.$$

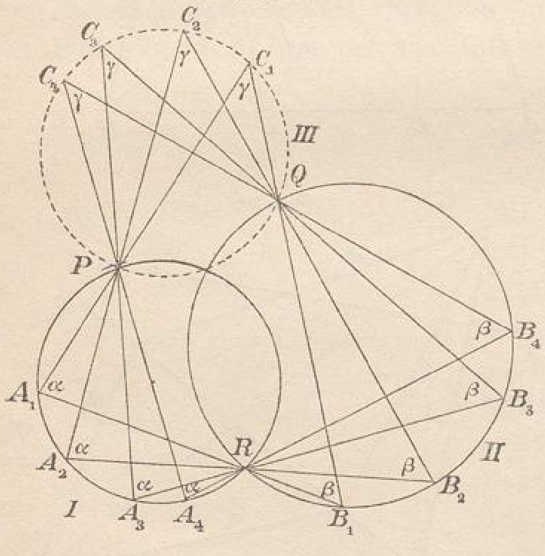
(Die übrigen geben die Werte $\frac{1}{k}$, $1 - k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$ und $\frac{k}{k-1}$.)

Entsprechendes findet für Strahlen statt.

VI. Einige Beispiele projektivischer Strahlenbüschel und Punktreihen.

37) Figur 31 stellt zwei feste Kreise dar, die sich in R schneiden. Auf ihnen sind die festen Punkte P und Q angenommen. Durch R sind beliebig viele Sekanten AB gelegt, durch die A und den Punkt P, ebenso durch die B und den Punkt Q die entsprechenden Strahlen gezogen. Die zusammengehörigen Strahlen geben einen Kreis durch P und Q und den zweiten Schnittpunkt. Der Beweis liegt, elementar betrachtet, darin, daß alle α gleich sind, ebenso alle β, daß also jedes $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist. Demnach liegen die C sämtlich auf einem Kreise.

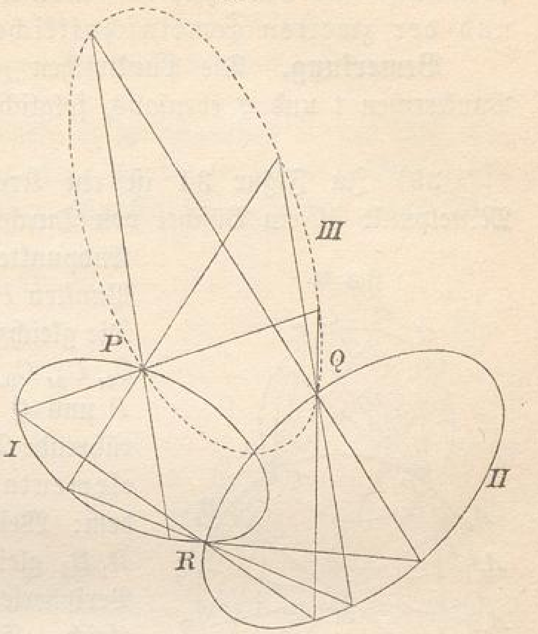
Fig. 31.



Projektivisch lautet der Beweis folgendermaßen: Büschel P und R sind kongruent; Büschel R und Q ebenfalls, folglich sind auch

Büschel P und Q kongruent. — Die Möglichkeit der Übertragung von Fig. 31 in Fig. 32 durch Projektion ist selbstverständlich.

Fig. 32.

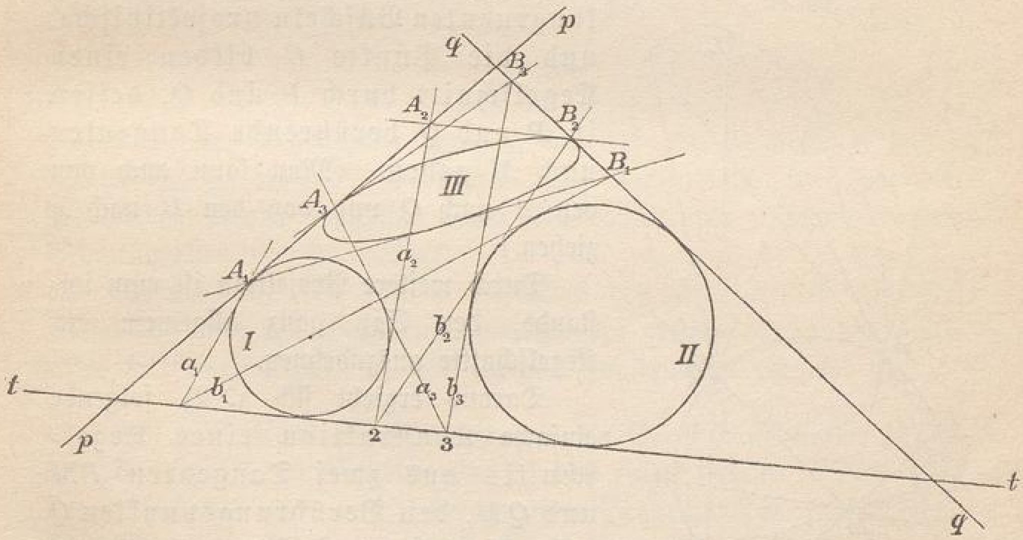


Sagt man statt kongruent projektivisch, so gilt dieselbe Schlußfolgerung. Sind demnach I und II beliebige Kegelschnitte, so ist auch III ein Kegelschnitt. Der darin liegende Satz ist leicht in Worten auszudrücken.

38) Der reciproke Satz wird folgendermaßen lauten:

Zieht man eine gemeinschaftliche Tangente t zweier Kegelschnitte I und II (z. B. Kreise) und von ihren Punkten aus eine Tangentenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nach einer Tangente p von I, und von denselben Punkten aus eine

Fig. 33.



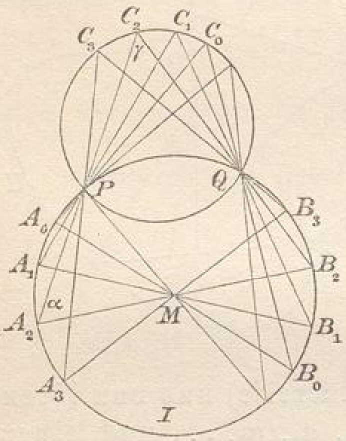
Tangentenfolge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ nach einer Tangente q von II, was die Punktreihen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ giebt, so sind diese Punktreihen projektivische, und ihre Ver=

bindungslinien umhüllen einen Kegelschnitt, der von p und q und der zweiten gemeinschaftlichen Tangente berührt wird.

Bemerkung. Die Punktreihen p und t sind projektivische, die Punktreihen t und q ebenfalls, folglich auch die Punktreihen p und q.

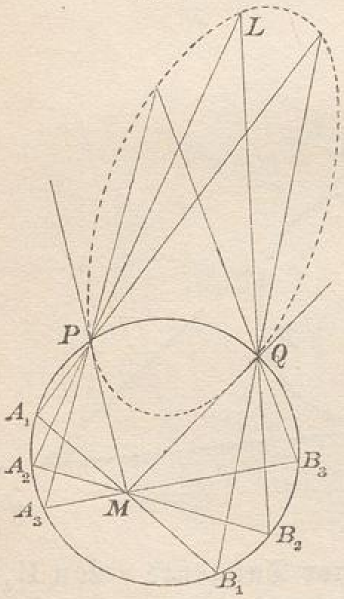
39) In Figur 34 ist ein Kreis I dargestellt, durch dessen Mittelpunkt M ein Büschel von Durchmessern gezogen ist. Sämtliche Endpunkte A und B sind mit zwei festen Punkten P bezw. Q des Kreises verbunden. Die gleichzahligen Strahlen geben Schnitte $C_1, C_2, C_3, \ldots$, die auf einem Kreise durch P und Q gehen, dessen in P und Q berührende Tangenten durch M gehen. Der elementare Beweis beruht in Folgendem: Weil je zwei Bogen A_1A_2 und B_1B_2 gleich groß sind, so sind auch die Peripheriewinkel A_1PA_2 und B_1QB_2 gleich. Es handelt sich also bei P und Q um kongruente Strahlenbüschel. Folglich müssen die C auf einem Kreise liegen.

Fig. 34.



Projiziert man nun central, z. B. so, daß Kreis I wieder in einen Kreis übergeht, der Punkt M aber excentrisch fällt, so werden aus den kongruenten Büscheln projektivische, und die Punkte C bilden einen Kegelschnitt durch P und Q, dessen in P und Q berührende Tangenten nach M gehen. (Man kann auch von den A nach Q und von den B nach P ziehen.)

Fig. 35.



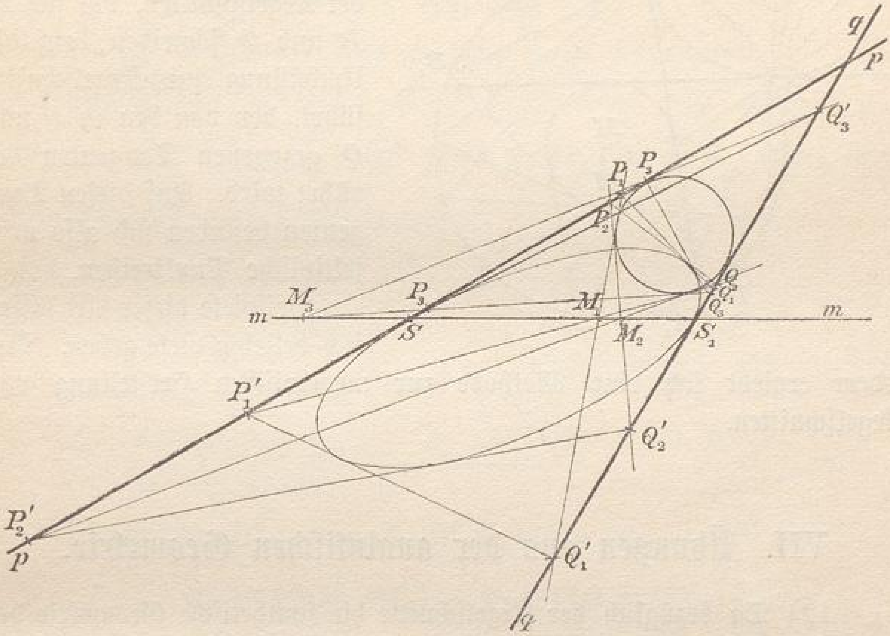
Durch weitere Projektion ist man imstande, den Satz ganz allgemein auf Kegelschnitte auszudehnen.

Daraus ergiebt sich z. B. folgende einfache Konstruktion eines Kegelschnitts aus zwei Tangenten PM und QM, den Berührungspunkten Q und M auf demselben und einem Punkte L.

Auflösung. Man ziehe LP, lege durch M eine Gerade MA_1 so, daß $\sphericalangle MA_1P = \sphericalangle PQL$ ist, und ziehe LQ bis zum Schnitte B_1 mit $A_1 M$. Dann läßt sich um PQB_1A_1 ein Kreis schlagen (Summe der Gegenwinkel des Vierecks $= 180^0$). An diesem Kreise wird die vorige Konstruktion vorgenommen.

40) Der reciproke Satz würde folgendermaßen lauten: Die Geraden p und q seien Tangenten eines gegebenen Kegelschnittes I, m eine beliebige Gerade. Von jedem Punkte M_n derselben seien Tan-

Fig. 36.



genten an den Kegelschnitt gezogen, die auf den Geraden p und q Punkte P_n, Q_n bezw. P_n', Q_n' geben. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte umhüllen einen Kegelschnitt, der p und q in den Schnittpunkten mit m berührt.

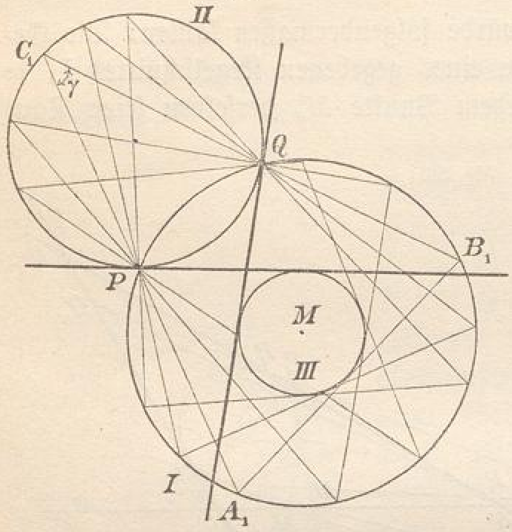
Daraus läßt sich eine Konstruktion des Kegelschnitts aus drei Tangenten und den Berührungspunkten auf zweien davon mit Hülfe eines Kreises ableiten, die zur vorigen Konstruktion reciprok ist.

41) In Figur 34 schnitten sich die Verbindungslinien der A und B sämtlich im Mittelpunkte M des einen Kreises. Dies liegt daran, daß die in P und Q berührenden Tangenten des andern durch M gehen, d. h. daß beide Kreise sich rechtwinklig schneiden.

Es giebt einen allgemeineren Fall. In Figur 37 sind zwei Kreise I und II gezeichnet, die sich in P und Q auf beliebige Art schneiden. Zieht man von jedem Punkte C_n des Kreises II aus

Strahlen nach P und Q, welche den Kreis I in A_n und B_n schneiden, so umhüllen, wie leicht zu zeigen ist, die Verbindungslinien $A_n B_n$ einen concentrischen Kreis, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird.

Fig. 37.



Durch Projektion erkennt man, daß dieselbe Operation bei Kegelschnitten, die sich in P und Q schneiden, auf die Umhüllung eines Kegelschnitts führt, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird. Auf diesen Tangenten befinden sich also projektivische Punktreihen.

Beispiele dieser Art lassen sich beliebig viele geben. Aus jedem ergiebt sich eine Methode zur mechanischen Herstellung von Kegelschnitten.

VII. Übungen aus der analytischen Geometrie.

42) Da bezüglich der Kegelschnitte die synthetische Geometrie der analytischen im allgemeinen überlegen ist, weil die Kegelschnitte als rein projektivische Gebilde von den Maßbeziehungen der Koordinatensysteme unabhängig sind, so sollen hier nur einige Übungen aus der Koordinatenlehre angestellt werden, die auf den Begriff des Krümmungskreises hinleiten, ein Gegenstand, der synthetisch weniger bequem behandelt werden kann.

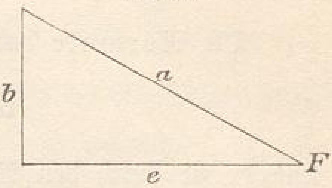
[Dabei sei bemerkt, daß für die Untersuchung von Kurven höherer Gerade die analytische Geometrie den Vorzug hat, mit Hülfe der Infinitesimalrechnung auch bedeutendere Schwierigkeiten zu überwinden, daß sie also durchaus nicht vernachlässigt werden darf.]

a) Berechnung der wichtigeren Linien an der Ellipse.

43) Für die Ellipse sei, wie früher, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ die Brennweite. Der Ausdruck $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ werde gleich ε^2 gesetzt, so daß

$\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{e}{a}$ ist. Man bezeichnet diesen Ausdruck als die numerische Excentricität der Ellipse. Sie bedeutet den Cosinus des Winkels zwischen a und e in dem aus a, b und e gebildeten Dreiecke, oder den Sinus des Winkels zwischen a und b.

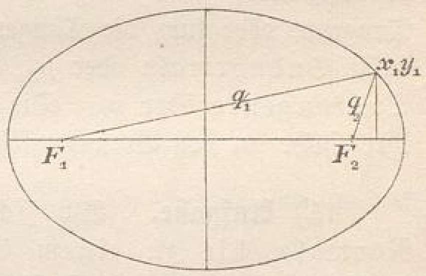
Fig. 38.



Aufgabe. Die Brennstrahlen q_1 und q_2 für einen Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus x_1 und ε zu berechnen.

Auflösung. $q_1^2 = (x_1 + e)^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + e^2 + 2x_1 e = x_1^2 + (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_1^2) + (a^2 - b^2) + 2x_1\sqrt{a^2 - b^2}$. (Hier ist y_1^2 aus $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ berechnet worden.) Also

Fig. 39.



$$q_1^2 = x_1^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + b^2 + a^2 - b^2 + 2\frac{a x_1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$$
$$= x_1^2 \varepsilon^2 + a^2 + 2a\varepsilon x_1$$
$$= (\varepsilon x_1 + a)^2.$$

Ebenso ist $q_2^2 = (x_1 - e)^2 + y_1^2 = (\varepsilon x_1 - a)^2$, also:

$$\boldsymbol{q_1 = (a + \varepsilon x_1); \quad q_2 = (a - \varepsilon x_1);}$$

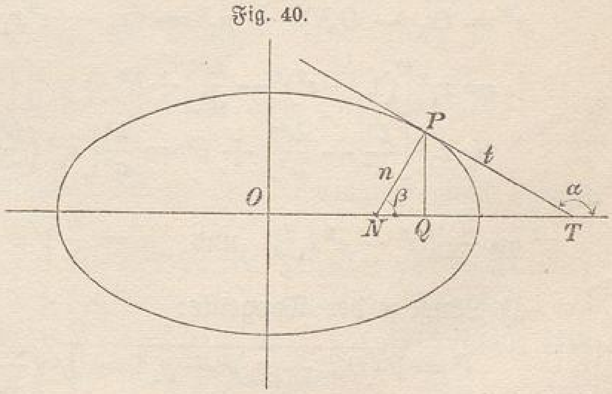
also auch

$$q_1 \cdot q_2 = a^2 - \varepsilon^2 x_1^2, \quad q_1 + q_2 = 2a, \quad q_1 - q_2 = 2\varepsilon x_1.$$

44) **Aufgabe.** Für einen Ellipsenpunkt P die Gleichung der Normale zu finden.

Auflösung. Nach Teil II (Kegelschnitte Nr. 39) war die Gleichung der Tangente in P, wenn x_1 und y_1 die Koordinaten waren,

Fig. 40.



1) $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$,

oder

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}x + \frac{b^2}{y_1} = Ax + B.$$

Also ist die Richtungskonstante für die Tangente

2) $$\tan\alpha = A = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Die Normale hat also eine Neigung β, die sich bestimmt aus

3) $$\tan\beta = -\frac{1}{A} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1},$$

und da sie durch den Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, ist ihre Gleichung

4) $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

oder

5) $$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2)\, x_1 y_1.$$

Bemerkungen. In Fig. 40 nennt man $PN = n$ die Länge der Normale, oder kurz die Normale, $PT = t$ die Länge der Tangente oder kurz die Tangente. Die Projektion NQ der Normale heißt Subnormale oder p_n, die Projektion QT der Tangente heißt Subtangente oder p_t. Die Brennpunkt-Ordinate der Ellipse, d. h. ihre Höhe an den Brennpunktstellen, heißt halber Parameter, oder p.

45) **Aufgabe.** Wo schneiden die Tangente und die Normale, die zu einem Ellipsenpunkte $x_1 y_1$ gehören, die X-Achse, und wie groß sind die soeben erklärten Stücke?

a) Tangentenschnitt T: Setzt man in Gleichung 1) $y = 0$, so wird

$$x = \frac{a^2}{x_1} = OT.$$

b) Normalenschnitt N: Setzt man in Gleichung 5) $y = 0$, so wird

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 = \varepsilon^2 x_1 = ON.$$

c) Länge n der Normale:

$$n^2 = (x_1 - ON)^2 + y_1{}^2 = (x_1 - \varepsilon^2 x_1)^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1{}^2\right)$$
$$= x_1{}^2\left[(1-\varepsilon^2)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2 = x_1{}^2\left[\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2$$
$$= x_1{}^2\left[\frac{b^4}{a^4} - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[x_1{}^2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + a^2\right],$$

also

$$n^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[a^2 - \varepsilon^2 x_1{}^2\right] \quad \text{und} \quad n = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2} = \frac{b}{a}\sqrt{q_1 q_2}.$$

d) Länge t der Tangente:

$$t^2 = \sqrt{(OT - x_1)^2 + y_1{}^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{x_1} - x_1\right)^2 + y_1{}^2}. \quad \text{u. s. w.}$$

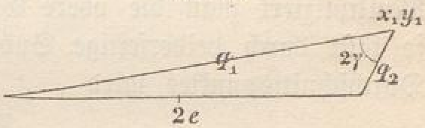
e) Ordinate p im Brennpunkte: Aus $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ folgt für $x = e$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - b^2) = \frac{b^4}{a^2}, \text{ also } p = \frac{b^2}{a}.$$

Durch Einsetzung des Halbparameters p wird die Scheitelgleichung der Ellipse auf die Form $y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2$ gebracht. (Vergl. Teil II, Kegelschnitte Nr. 40.)

46) **Aufgabe.** Für den Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse den Winkel 2γ zwischen den Brennstrahlen oder den Winkel γ zwischen Brennstrahl und Normale zu berechnen.

Fig. 41.



Auflösung. In Figur 41 ist $4e^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \cos 2\gamma$, folglich

$$\cos 2\gamma = \frac{q_1^2 + q_2^2 - 4e^2}{2 q_1 q_2}.$$

Logarithmisch besser ist aber die Formel für den Cosinus des halben Winkels (vergl. trigonometrische Formeltabelle in Teil II):

$$\cos^2 \gamma = \frac{(q_1 + q_2 + 2e)(q_1 + q_2 - 2e)}{4 q_1 q_2},$$

also, da $q_1 + q_2 = 2a$ ist,

$$\cos^2 \gamma = \frac{(2a + 2e)(2a - 2e)}{4 q_1 q_2} = \frac{a^2 - e^2}{q_1 q_2} = \frac{b^2}{q_1 q_2};$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{q_1 q_2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2}}.$$

Folgerung. Aus $n = \frac{b}{a}\sqrt{q_1 q_2}$ und $\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{q_1 q_2}}$ folgt

$$n \cos \gamma = \frac{b^2}{a} = p.$$

Folglich: Die Projektion der Normale n auf jeden der zugehörigen Brennstrahlen giebt den Halbparameter p.

Jetzt folgen einige Aufgaben, die auf den Krümmungsradius führen.

47) **Aufgabe.** Zwei benachbarte Punkte der Ellipse mögen die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 haben. Wo schneidet ihre Verbindungslinie die X-Achse und wo schneiden sich die zu beiden Punkten gehörigen Normalen?

Auflösung. a) Schnitt der Tangente mit der Achse: Die Gleichung der Verbindungslinien läßt sich schreiben

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Setzt man $y = 0$, so folgt für den Schnitt die Entfernung

$$s = OT = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}.$$

b) Schnitt der Normalen: Ihre Gleichungen sind nach Obigem

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1,$$
$$a^2 y_2 x - b^2 x_2 y = (a^2 - b^2) x_2 y_2.$$

Multipliziert man die obere Gleichung mit x_2, die untere mit x_1, so fällt durch beiderseitige Subtraktion y weg, und die Abscisse des Durchschnittspunktes wird

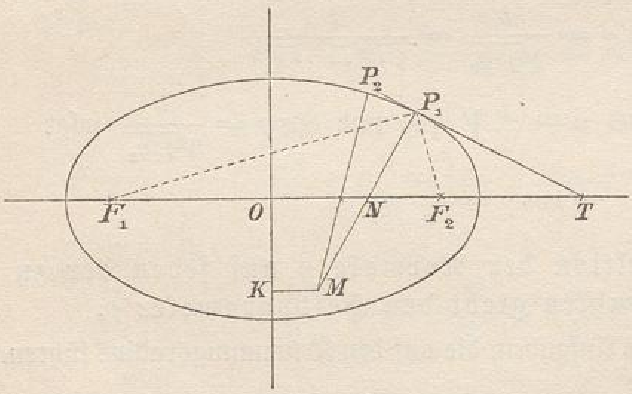
$$x = x_1 x_2 \frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \; \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

oder, wenn man wieder die Bezeichnungen ε und s einführt: Der Abstand des Schnittpunktes der Normalen von der Y-Achse ist also

$$KM = x = \frac{\varepsilon^2}{s} x_1 x_2.$$

48) **Aufgabe.** Es soll untersucht werden, wie groß der Abstand KM des berechneten Schnittpunktes von der Y-Achse wird, wenn P_2 unendlich nahe an P_1 rückt.

Fig. 42.



Auflösung. Es war

$$KM = \frac{\varepsilon^2 \cdot x_1 x_2}{s}.$$

Setzt man $x_1 = x_2$, so wird $x_1 x_2 = x_1^2$. Der obige Ausdruck

$$s = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}$$

wird aber $\frac{x_1 y_1 - x_1 y_1}{y_1 - y_1}$, also von der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. (Nicht etwa $x_1 \frac{y_1 - y_1}{y_1 - y_1} = x_1$ zu setzen!) Rückt aber P_2 unendlich nahe an P_1, so geht die Verbindungslinie $P_2 P_1$ in die Tangente über, und die Tangente in P_1 schneidet nach Aufgabe 45 a in der Entfernung $s = \frac{a^2}{x_1}$. Setzt man diesen brauchbaren Wert ein, so entsteht

$$6) \qquad KM = \frac{\varepsilon^2 x_1^{\,2}}{\left(\frac{a^2}{x_1}\right)} = \frac{\varepsilon^2 x_1^{\,3}}{a^2}.$$

Nun war aber nach Aufgabe 45 $ON = \varepsilon^2 x_1$, also ist

$$6^*) \qquad KM = \frac{x_1^{\,2}}{a^2} ON.$$

Dieser Ausdruck ist leicht zu konstruieren. Schreibt man nämlich

$$KM = \frac{\left(\frac{x_1}{a} ON\right) x_1}{a} = \frac{z \cdot x_1}{a},$$

so ist die Hülfsgröße $z = \frac{x_1}{a} ON$ aus der Proportion

$$x_1 : a = z : ON$$

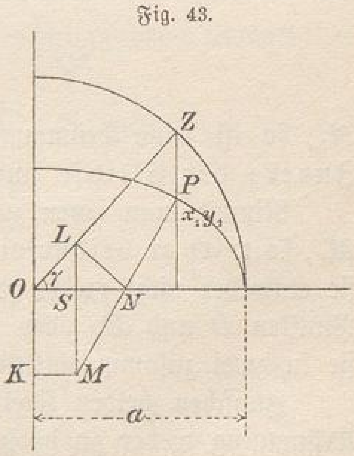
als vierte Proportionale zu konstruieren, sodann $KM = \frac{z \cdot x_1}{a}$ als vierte Proportionale aus der Proportion

$$a : x_1 = z : KM.$$

Bemerkung. Halbierung des Brennstrahlwinkels giebt die genaue Richtung der Normale. Zieht man eine Parallele zur Y-Achse in dem konstruierten Abstande KM, so findet man den Punkt M. Dieser Punkt ist von außerordentlicher Bedeutung als Krümmungsmittelpunkt der Kurve für die Stelle $x_1 y_1$.

Vorläufig genüge neben der soeben gezeigten Konstruktion die in Folgendem erläuterte.

Fig. 43.



In Figur 43 ist neben der Ellipse der mit der Halbachse a um O geschlagene Kreis gezeichnet und der Punkt Z desselben markiert, der senkrecht über P liegt. Für diesen Punkt ist $\frac{x_1}{a} = \cos\gamma$. Folglich ist jetzt

$$KM = \frac{x_1^{\,2}}{a^2} \cdot ON = ON \cos^2\gamma$$
$$= [ON \cos\gamma] \cdot \cos\gamma,$$

so daß es sich um eine zweimalige Projektion von ON mit Hülfe des Winkels γ handelt.

In der Figur ist NL das Lot auf OZ, also $OL = ON \cdot \cos\gamma$. Ferner ist

$$LS \perp ON, \quad \text{folglich} \quad OS = OL \cos\gamma = ON \cos^2\gamma = KM.$$

Die vorläufige Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt der Ellipse im Punkte $x_1 y_1$ ist also folgende:

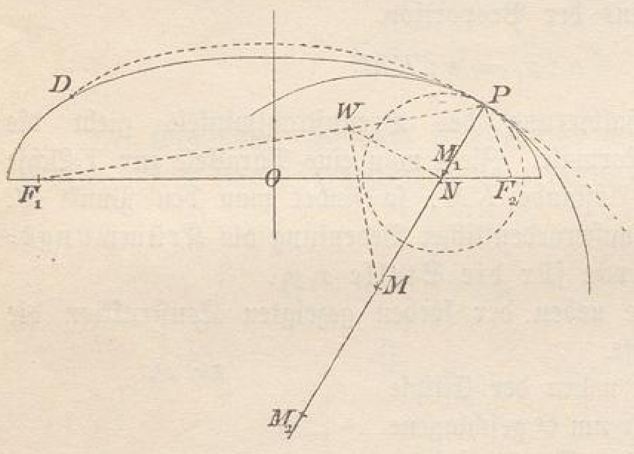
Durch Halbierung des Brennstrahlwinkels bei P findet man die Normale PN. Die Senkrechte durch P giebt den Hülfskreispunkt Z. Das Lot von N auf OZ giebt den Punkt L; die Senkrechte durch L schneidet die Normale im Krümmungsmittelpunkte M.

Schlägt man um M mit MP einen Kreis, so fällt dieser Kreis für eine weit größere Strecke mit der Ellipse zusammen, als jeder andere. Er heißt der Krümmungskreis der Ellipse für die Stelle P.

b) Krümmungsradius der Ellipse.

49) Benachbarte Radien eines Kreises schneiden sich im Mittelpunkte. Die Normale im Punkte P der Ellipse wird von den Normalen der Nachbarpunkte in verschiedenen Punkten geschnitten. Rücken die Nachbarpunkte unendlich nahe an P, so rückt der Schnittpunkt in das vorher konstruierte M, womit der kleinste Grenzwert für die Entfernung des Schnittes von P gefunden wird.

Fig. 44.



Nimmt man einen kleineren Berührungskreis der Stelle P, z. B. den Kreis M_1, so ist seine Krümmung zu groß. Er tritt beiderseits ins Innere der Ellipse und hat sonst keinen Punkt mit ihr gemein.

Nimmt man einen zu großen Berührungskreis, z. B. den Kreis M_2, so tritt er beiderseits aus der Ellipse heraus. Er schneidet sie entweder nicht mehr, oder er schneidet sie noch in zwei getrennten Punkten D und E, oder er berührt sie noch einmal (d. h. er trifft sie in zwei zusammenfallenden Punkten D und E).

Zwischen beiden Kreisen liegt nun der Krümmungskreis, dessen Krümmung weder zu groß, noch zu klein ist. Er verhält sich in ganz anderer Weise. Weil die Krümmung der Ellipse von P aus nach links abnimmt, tritt der gezeichnete Krümmungskreis nach links in die Ellipse hinein. Weil die Krümmung von P aus nach rechts zunimmt, so tritt der gezeichnete Krümmungskreis nach rechts aus der Ellipse heraus. Es tritt also der merkwürdige Fall ein, daß der Krümmungskreis in P sowohl schneidet als auch berührt.

Dieses scheinbare Paradoxon klärt sich auf, wenn man den Krümmungsradius allmählich von M_2P auf MP abnehmen läßt. Anfangs hat man dann die Berührung in P (zwei Schnittpunkte bedeutend) und die Schnittpunkte D und E. Beim Kleinerwerden des Krümmungsradius rückt D an P heran und fällt schließlich mit P zusammen. Jetzt hat der Krümmungsradius mit der Kurve in P drei zusammenfallende Punkte gemein, und nur ein einziger abgetrennter Schnittpunkt E bleibt übrig, was bei keinem andern der Berührungskreise der Fall ist.

Für die Endpunkte der Hauptachsen ist die Betrachtung etwas zu verändern. Es zeigt sich, daß der Krümmungsmittelpunkt dort sogar vier Punkte mit der Kurve gemein hat, da nicht nur D, sondern der Symmetrie halber auch E mit P zusammenfällt.

50) **Aufgabe.** Den Krümmungsmittelpunkt für die Stelle P zu berechnen.

Auflösung. Seine Koordinaten seien x und y, die von P seien x_1 und y_1, dann ist nach Pythagoras

a) $$\varrho^2 = \overline{MP}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 .$$

Nun war die Gleichung der Normale (Aufgabe 44, Gleichung 5)

$$b^2 x_1 y = a^2 y_1 x - (a^2 - b^2) x_1 y_1 .$$

Setzt man hier $x = KM = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}$ (nach Gleichung 6 in Aufgabe 48) ein, so erhält man als Gleichung zur Berechnung der Ordinate des Punktes M

$$b^2 x_1 y = a^2 y_1 \cdot \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} - (a^2 - b^2) x_1 y_1 ,$$

also ist (vgl. Fig. 43)

$$SM = y = \frac{\varepsilon^2 x_1^2 y_1}{b^2} - \frac{(a^2 - b^2) y_1}{b^2} = \frac{\varepsilon^2 y_1}{b^2}(a^2 - x_1^2) .$$

Nach der Ellipsengleichung ist aber $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, also $x_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2$. Dies, in die vorige Gleichung eingesetzt, giebt

$$y = -\frac{\varepsilon^2 y_1}{b^2}\frac{a^2}{b^2} y_1^2 = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4} = SM .$$

Setzt man in Gleichung a) die Werte $x = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}$ und $y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^2}$ ein, so erhält man eine Gleichung zur Berechnung von ϱ^2. In dieser setze man $b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2$ für y_1^2, und so ergiebt sich

$$\varrho^2 = \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^3}{a^2 b^2} = \frac{(q_1 q_2)^3}{a^2 b^2}.$$

Nun war aber $q_1 q_2 \frac{b^2}{a^2} = n^2$, also $q_1 q_2 = \frac{a^2 n^2}{b^2}$. Einsetzung giebt

$$\varrho^2 = \frac{n^6 a^4}{b^8} \text{ und } \varrho = \frac{n^3 a^2}{b^4}$$

oder, da $\frac{b^2}{a} = p$ war:

b) $$\varrho = \frac{n^3}{p^2}.$$

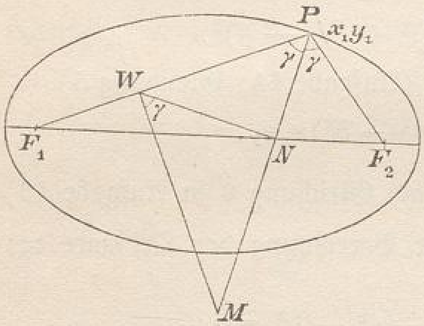
Da außerdem $p = n \cos \gamma$ war, so folgt noch

c) $$\varrho = \frac{n}{\cos^2 \gamma}.$$

Demnach muß sich ϱ mit Hülfe zweier rechtwinkligen Dreiecke einfach konstruieren lassen.

51) **Aufgabe.** Für den Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ den Krümmungsmittelpunkt zu konstruieren.

Fig. 45.



Auflösung. Halbiere den Winkel der Brennstrahlen, errichte auf der Normalen im Schnittpunkte N (der Normale und X-Achse) ein Lot NW bis zu dem einen der Brennstrahlen, errichte in W auf dem Brennstrahl ein Lot bis zum Schnitte M mit der Normale, dann ist M der Krümmungsmittelpunkt. Denn $PW = \frac{n}{\cos \gamma}$, folglich $MP = \frac{PW}{\cos \gamma} = \frac{n}{\cos^2 \gamma} = \varrho$.

Für den höchsten Punkt P_1 ist $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle FP_1O$, folglich fällt W mit F_1 zusammen, und das Lot WM auf WP_1 giebt den Krümmungsmittelpunkt M. In diesem Falle ist

$$\varrho = \frac{b}{\cos^2 \gamma} = \frac{b}{\left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2}{b}.$$

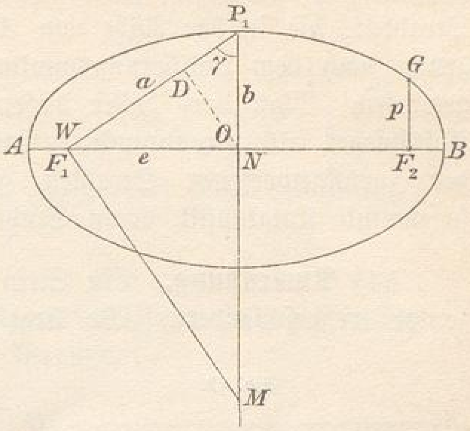
Für den Endpunkt B der langen Achse ist $\gamma = 0$, also

$$\varrho_1 = \frac{p}{\cos^2 0} = \frac{p}{1} = p = \frac{b^2}{a},$$

d. h. gleich dem Lote F_2G im Brennpunkte. Sind nur a und b gegeben, so findet man ϱ_1 bequem als Projektion DP_1 von b auf F_1P_1, denn

$$DP_1 = b\cos\gamma = b\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = \varrho_1.$$

Fig. 46.



Diese beiden besonderen Radien werden häufig zur angenäherten Verzeichnung der Ellipse benutzt.

c) Krümmungsradius der Parabel und Hyperbel.

52) **Aufgabe.** Den Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt der Parabel zu konstruieren.

Auflösung. Man halbiere den Winkel zwischen dem Brennstrahl PF und der Parallelen zur Achse. Dies giebt die Normale PN. Lot auf PN in N giebt Schnittpunkt W mit dem Brennstrahle. Lot auf PW in W giebt M auf der Normale. (Ebenso könnte W_1 benutzt werden.)

Der Krümmungsradius für den Scheitel ist wieder $p = FG = 2AF$.

Fig. 47.

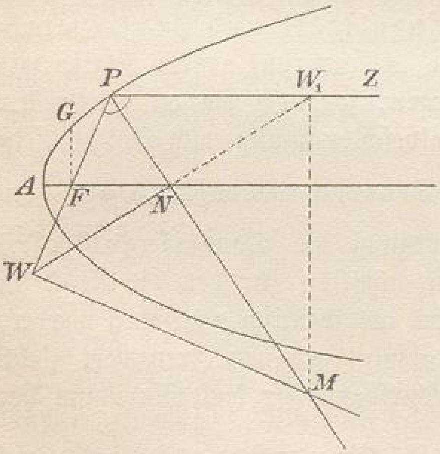
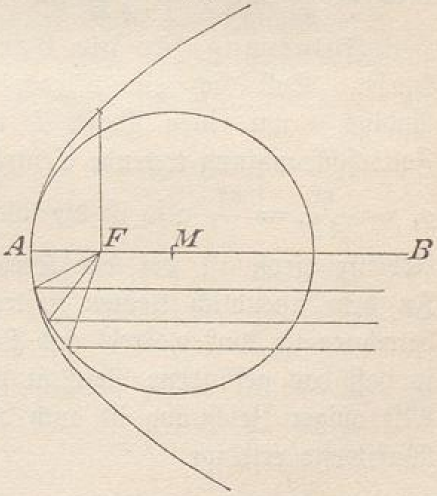


Fig. 48.

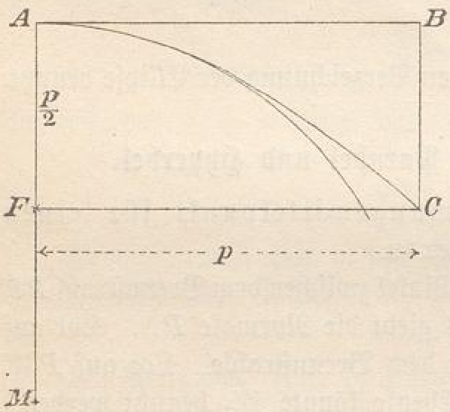


53) **Anwendung.** Statt des parabolischen Hohlspiegels wird häufig der sphärische Hohlspiegel genommen, der in der Nähe des

Scheitels A mit dem parabolischen übereinstimmt. Daher werden Strahlen, die in der Nähe von AB parallel zu AB einfallen, fast genau nach dem Halbierungspunkte von AM, d. h. nach F, zurückgeworfen. Man darf daher diesen Punkt auch bei dem sphärischen Hohlspiegel als Brennpunkt betrachten. (Die genaue Konstruktion der zurückgeworfenen Strahlen giebt eine Umhüllungskurve, die sogenannte Katakaustik, deren Spitze mit F zusammenfällt.)

54) **Anwendung.** Ein Stein werde mit Geschwindigkeit v horizontal weggeschleudert. Wo liegt der Brennpunkt F der Parabel, die er beschreibt?

Fig. 49.



Auflösung. Ist $FA = \frac{1}{2} FC$, so ist FC der Halbparameter p und $FA = \frac{p}{2}$. Nach welcher Zeit wird also C erreicht?

Es ist $AB = v \cdot t$, $BC = \frac{1}{2} g t^2$, also $\frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} v t$ und daher $t_1 = \frac{v}{g}$. Folglich $BC = AF = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} g \cdot \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g}$. Dies ist die Tiefe des Brennpunktes unter A. Der Krümmungsmittelpunkt liegt doppelt so tief, so daß $AM = \frac{v^2}{g}$ und $g = \frac{v^2}{AM}$ ist.

Folgerung für die Centrifugalkraft und Centripetalkraft. Soll sich ein Körper von A aus auf einem Kreise mit Radius r um einen Punkt F bewegen, so muß die an Stelle der Fallbeschleunigung tretende Centripetalbeschleunigung nach Obigem sein $g_1 = \frac{v^2}{AM} = \frac{v^2}{r}$, also ist die nötige Centripetalkraft $m g_1 = \frac{m v^2}{r}$. (Ebenso groß ist bei der Kreisbewegung die Centrifugalkraft.) In dem unendlich kleinen Zeitraume nämlich, für den die Kraft zu berechnen ist, dürfen Kreis und Parabel als identisch angesehen werden, so daß das gefundene Resultat den absolut genauen Grenzwert giebt. Mit obiger Zeichnung ist auch die Wurfbahn für das Maximum der Wurfweite erledigt.

55) **Aufgabe.** Den Krümmungsradius der Hyperbel zu berechnen. Die Auflösung geschieht durch entsprechende Berechnungen, wie bei der Ellipse. Die Brennstrahlen werden $q_1 = \varepsilon x + a$ und

$q_2 = \varepsilon x - a$, wo $\varepsilon = \frac{\xi}{a}$ und $\xi = \sqrt{a^2 + b^2} = e$ ist $(q_1 - q_2 = 2a)$.

Die Normale wird bestimmt aus $n^2 = \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} q_1 q_2$, der Krümmungsradius aus $\varrho^2 = \frac{(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)^3}{a^2 b^2} = \left(\frac{n^3}{p^2}\right)^2$ als $\varrho = \frac{n^3}{p^2}$.

Die für Ellipse und Parabel angegebenen Konstruktionen gelten daher auch hier.

d) Andeutungen über die allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades.

56) Die allgemeine Form ist

1) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

oder

$$y^2 + 2y\frac{bx + e}{c} = -\frac{ax^2 + 2dx + f}{c},$$

so daß

$$y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{(bx + e)^2 - (ax^2 + 2dx + f)c},$$

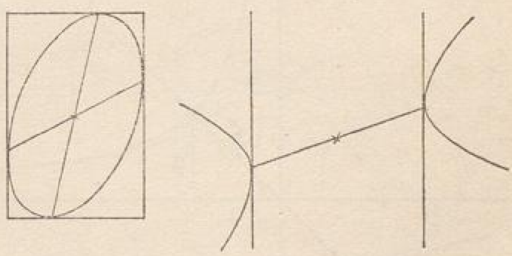
oder

2) $$y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{x^2(b^2 - ac) + 2x(be - dc) + (e^2 - fc)}.$$

Ganz ebenso wird x berechnet.

Der Nachweis, daß die Gleichung stets einen Kegelschnitt darstellt, ist etwas langwierig. Eine Andeutung über den einzuschlagenden Gang möge hier genügen. Der Ausdruck unter der Wurzel wird im allgemeinen für zwei Werte (von x) gleich Null. Ausnahmefälle mögen vorläufig unbeachtet bleiben. An diesen Stellen findet man nach Teil II (Anhang) entweder ein Maximum oder ein Minimum (worüber durch Einsetzen von Nachbarwerten entschieden werden kann). Das Entsprechende gilt für das aus Gleichung 1) berechnete x.

Fig. 50.



Man verbinde zwei zusammengehörige Minimal- bezw. Maximalpunkte und verschiebe den Anfang des Koordinatensystems nach dem Halbierungspunkte dieser Strecke. An der Form der neuen Gleichung erkennt man stets, daß jede durch den neuen Koordinatenanfang gelegte Sehne halbiert ist, wenn sie die Kurve überhaupt trifft. — Man hat also den Mittelpunkt der Kurve nachgewiesen.

Jetzt suche man (gegebenenfalls auch mit Hülfe von Polarkoordinaten) die kleinsten Entfernungen vom Mittelpunkte. In die entsprechende Richtung dreht man die Y-Achse eines neuen Koordinatensystems. Jetzt läßt sich die Gleichung stets auf die Form $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ bringen, stellt also eine Ellipse oder Hyperbel dar.

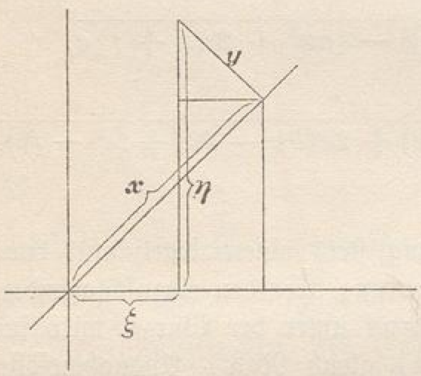
Wird aber der Ausdruck unter der Wurzel nur für einen einzigen endlichen Wert gleich Null, so kann es sich im allgemeinen nur um eine Parabel handeln. Mit Hülfe der Halbierungspunkte paralleler Sehnen erhält man die Achsenrichtung, den Scheitel und die Scheitelgleichung.

Läßt sich die Gleichung in ein Produkt von der Form

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

zerlegen, so stellt sie zwei gerade Linien dar, deren Gleichungen in der letzten enthalten sind.

Fig. 51.



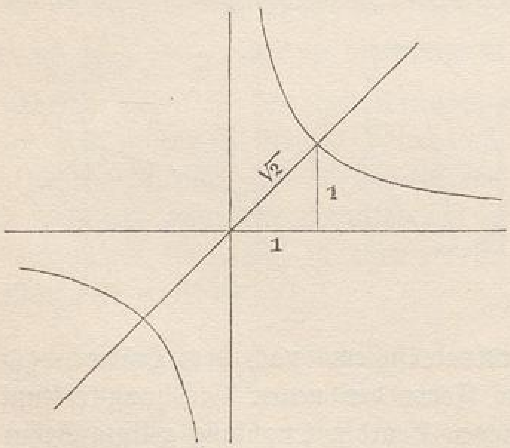
Verschiebungen des Koordinatensystems kamen schon in Teil II zur Sprache. Um auch einen Begriff von der **Drehung des Koordinatensystems** zu erhalten, drehe man beispielsweise das Koordinatensystem um 45^0.

Zwischen den Koordinaten ξ, η und x, y bestehen dann die Beziehungen

$$\eta = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + y\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\xi = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - y\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Fig. 52.



So geht z. B. die Gleichung der „Mariotteschen Kurve" $\eta = \frac{1}{\xi}$ (vgl. Teil II, Geom. Nr. 105) über in

$$x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + y\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - y\sqrt{\tfrac{1}{2}}},$$

oder in

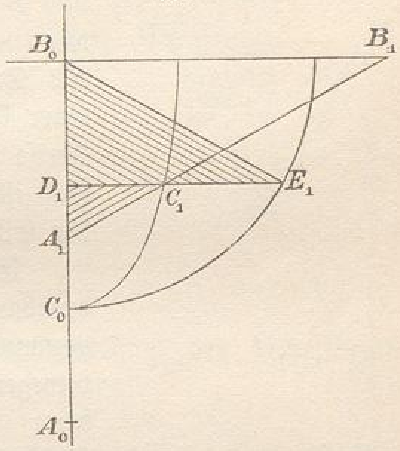
$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

so daß es sich um die Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ handelt, d. h. um eine gleichseitige Hyperbel.

e) Der Ellipsenzirkel oder das Ovalwerk des Leonardo da Vinci.

57) **Aufgabe.** Die Endpunkte einer gegebenen Geraden AB werden gezwungen, sich in zwei aufeinander senkrechten Geraden zu bewegen. Was für einen Weg legt jeder Punkt der Geraden und ihrer Verlängerung zurück?

Fig. 53.

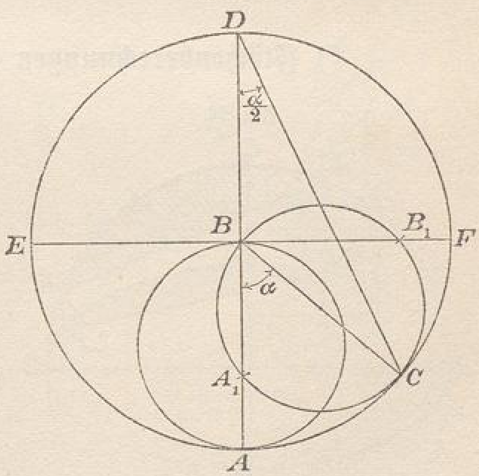


Auflösung.*) A_0B_0 sei die Gerade, C_0 der zu untersuchende Punkt der Geraden. $A_1C_1B_1$ sei eine zweite Lage.

Man schlage mit B_0C_0 einen Kreis und lege durch C_1 die Gerade $D_1E_1 \perp A_0B_0$. Dann ist $C_1B_1 = B_0E_1$, folglich $\sphericalangle B_1C_1E_1 = \sphericalangle B_0E_1C_1$, folglich $\triangle A_1D_1C_1 \sim B_0D_1E_1$, folglich $D_1C_1 : D_1E_1 = A_1C_1 : E_1B_0 = A_0C_0 : C_0B_0$. Letzteres ist aber das konstante Teilungsverhältnis der bewegten Geraden. In jeder Lage wird also die horizontale Sehne des Hülfskreises in diesem konstanten Verhältnis geteilt, d. h. der Weg von C ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, wo a und b die Teile der Geraden sind. Der Halbierungspunkt bewegt sich auf einem Kreise.

Ganz entsprechend wird der Beweis für Punkte auf der Verlängerung der Geraden geführt.

Fig. 54.

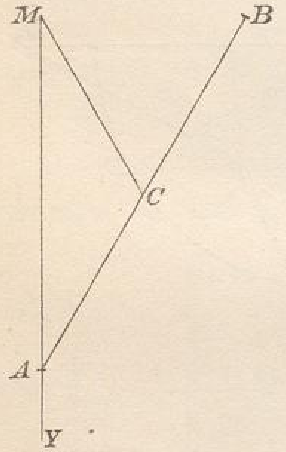


Bemerkung. In einem Kreise befinde sich ein Berührungskreis von halb so großem Radius in zwei verschiedenen Lagen. Der Berührungspunkt werde jedesmal

*) Der Schüler versuche die Aufgabe auch mit Hülfe der Koordinaten zu lösen.

mit dem Centrum B verbunden. Schneidet AB den zweiten Kreis in A, so ist Bogen $\widehat{AC} = \widehat{A_1C}$, denn zum Peripheriewinkel $\frac{\alpha}{2}$ im großen Kreise gehört derselbe Bogen, wie zum Peripheriewinkel α im kleinen Kreise. Rollt also der kleine Kreis im großen, ohne zu gleiten (so daß also der Weg $\widehat{AC}$ stets gleich dem abgewickelten Bogen $\widehat{A_1C}$ ist), so bewegt sich der Punkt A auf dem Durchmesser AD und ebenso B auf dem Durchmesser EF. Für A und B ist also der Bewegungszwang derselbe, wie in der vorigen Aufgabe. Jeder Punkt des Durchmessers AB bewegt sich also auf einer Ellipse, nur der Mittelpunkt auf einem Kreise und die Endpunkte auf Geraden. Demnach ist noch ein dritter Mechanismus möglich, der Ellipsen hervorbringt.

Fig. 55.

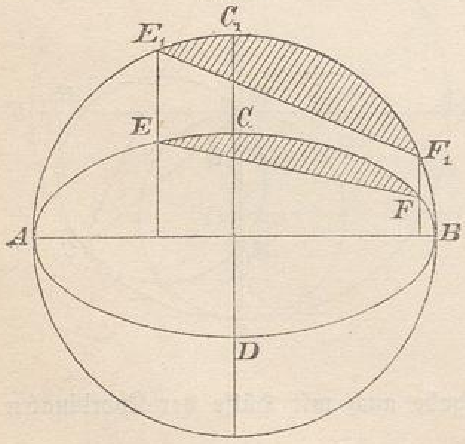


Es sei $MC = AC = BC$; MC sei drehbar um M, C sei ein Gelenk, A werde gezwungen, sich in der Geraden MY zu bewegen, dann bewegt sich B geradlinig, denn stets ist $\sphericalangle AMB = 90^0$. Jeder Punkt der Geraden AB bewegt sich in einer Ellipse.

Der erste Mechanismus heißt Ellipsenzirkel, der zweite Planetenrad, der dritte Ellipsenlenker. Bekannt sind sie auch unter dem Namen Ovalwerk.

f) Flächenberechnungen an den Kegelschnitten.

Fig. 56.



58) Berechnung von Ellipsensegmenten.

Soll das Ellipsensegment EFC berechnet werden, so bilde man das zugehörige Kreissegment und berechne dieses. Ist F seine Fläche, so ist die des Ellipsensegments nach dem Satze über die gesetzmäßige Verkürzung der Lote und senkrechten Flächenstreifen

$$F_1 = F \cdot \frac{b}{a}.$$

59) Berechnung von Hyperbelsegmenten.

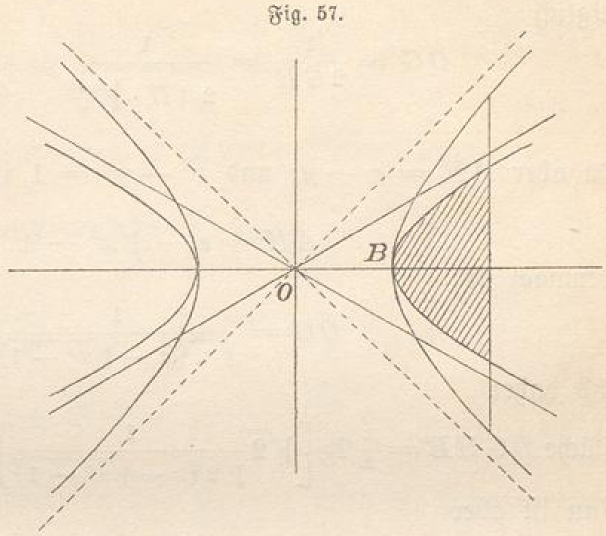
Die Hyperbel ist leicht auf eine gleichseitige zu reducieren. Dann findet Entsprechendes, wie vorher bei Ellipse und Kreis statt. Es wird

$$F_1 = F\frac{b}{a}.$$

Demnach ist es nur nötig, die Segmentberechnung an der gleichseitigen Hyperbel zu üben.

Unten, in der algebraischen Analysis, wird gezeigt, daß dabei der natürliche Logarithmus gebraucht wird. Nach Durchnahme des betreffenden Abschnitts kann folgendes Beispiel gelöst werden:

Fig. 57.



60) **Aufgabe.** Das symmetrische Segment der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ zu berechnen, welches zum Abstande $OJ = x$ gehört.

Auflösung. 1) Segment $= \triangle OAB - [\square ODEF + 2 \cdot DGHE + 2 \triangle GAH]$.

$OJ = JB = x$,

also

2) $\triangle OAB = 2x \cdot \frac{x}{2} = x^2.$

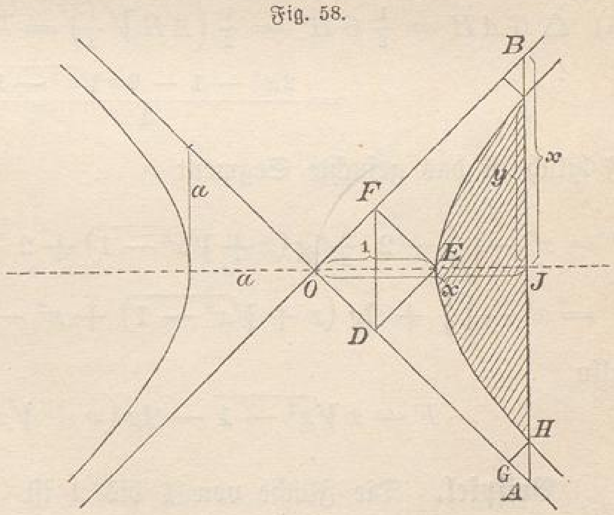
$OE = 1$,

folglich

3) $\square ODEF = \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2 = \tfrac{1}{2}.$

Dies ist der Inhalt des konstanten Rechtecks.

Fig. 58.



Diagrammfläche $DGHE = \overline{OD}^2 \cdot {}^e\lg\frac{OG}{OD} = \frac{1}{2}\,{}^e\lg\frac{OG}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,{}^e\lg\left(OG\sqrt{2}\right).$

Es ist aber

$$OG \cdot GH = \square\, ODEF = \tfrac{1}{2},$$

folglich

$$OG = \frac{1}{2\,GH} = \frac{1}{2\,AH \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{AH \cdot \sqrt{2}}.$$

Da aber $AH = x - y$, und $x^2 - y^2 = 1$ ist, so folgt

$$AH = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Demnach ist

$$OG = \frac{1}{\sqrt{2}\,(x - \sqrt{x^2 - 1})},$$

und daher

$$\text{Fläche } DGHE = \tfrac{1}{2}\,{}^e\lg\left[\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}\,(x - \sqrt{x^2-1})}\right] = \tfrac{1}{2}\,{}^e\lg\,\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x^2 - (x^2 - 1)}$$

$$= x + \sqrt{x^2 - 1},$$

also folgt:

4) $$\text{Fläche } DGHE = \tfrac{1}{2}\,{}^e\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Endlich ist

5) $$\triangle\, GAH = \tfrac{1}{2}\,GH^2 = \tfrac{1}{2}\left(AH\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2 = \frac{AH^2}{4} = \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^2}{4}$$

$$= \frac{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2-1}}{4}.$$

Folglich ist das gesuchte Segment

$$F = x^2 - \left[\tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,{}^e\lg\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + 2\,\frac{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2-1}}{4}\right]$$

$$= x^2 - \left[\tfrac{1}{2} + {}^e\lg\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + x^2 - \tfrac{1}{2} - x\sqrt{x^2-1}\right],$$

also

$$F = x\sqrt{x^2 - 1} - {}^e\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Beispiel. Die Fläche von 1 bis 2 ist

$$\overset{2}{\underset{1}{F}} = 2\sqrt{4-1} - {}^e\lg\left(2 + \sqrt{4-1}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{{}^{10}\lg\,(2 + \sqrt{3})}{0{,}43429}$$

$$= 2{,}1472.$$

61) **Bemerkung.** Zeichnet man die Figur in a=fachem Maßstabe, so lautet die Gleichung der Kurve $x^2 - y^2 = a^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Dabei wird $O_1 E_1 = a$, $O_1 J_1 = ax$. Die Fläche von a bis ax erhält den a^2=fachen Inhalt, wie vorher, also ist

$$\overset{ax}{\underset{a}{F}} = a^2\left[x\sqrt{x^2-1} - {}^e\lg\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right].$$

Setzt man $ax = x_1$, also $x = \frac{x_1}{a}$, so folgt

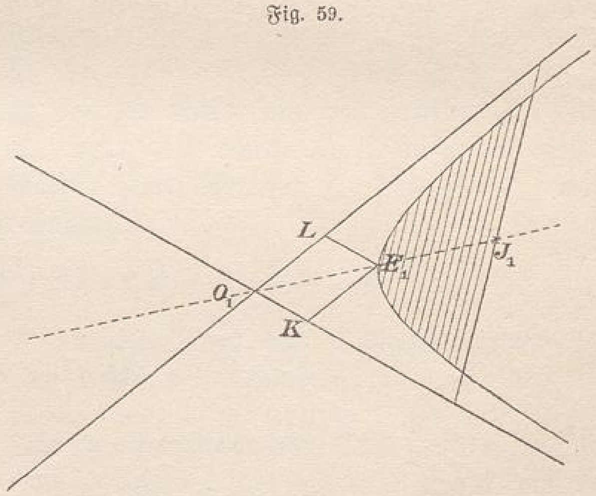
$$\overset{x_1}{\underset{a}{F}} = a^2\left[\frac{x_1}{a}\sqrt{\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - 1} - {}^e\lg\left(\frac{x_1}{a} + \sqrt{\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - 1}\right)\right]$$
$$= x_1\sqrt{x_1^{\,2} - a^2} - a^2\,{}^e\lg\frac{x_1 + \sqrt{x_1^{\,2} - a^2}}{a}.$$

Bei der allgemeinen Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird die Segmentfläche das $\frac{b}{a}$=fache der vorigen, also:

$$\overset{x}{\underset{a}{F}} = \frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\,{}^e\lg\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right].$$

Dieselben Resultate liefert die selbständige Berechnung.

Fig. 59.



Bei schräg begrenzten Segmenten ist folgendes zu beachten.

Ist für die neue und die alte Figur J bezw. J_1 Halbierungspunkt der Sehne, und ist ferner $O_1E_1 : O_1J_1 = OE : OE$, so verhalten sich aus Gründen der Parallelprojektion die Segmente wie die konstanten Asymptotenparallelogramme. Denkt man sich also über $OJ_1 = z_1$ und $OE_1 = e_1$ eine gleichseitige Hyperbel, so ist für diese

$$\overset{z_1}{\underset{e_1}{F}} = z_1\sqrt{z_1^{\,2} - e_1^{\,2}} - e_1^{\,2}\,{}^e\lg\frac{z_1 + \sqrt{z_1^{\,2} - e_1^{\,2}}}{e_1}.$$

Für die letztere ist das konstante Rechteck gleich $\frac{z_1^2}{2}$, für die vorliegende aber das konstante Parallelogramm gleich $O_1KE_1L_1$ oder, wenn die Gleichung war: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, konstantes Parallelogramm gleich $\frac{ab}{2}$. Das Verkleinerungsverhältnis entsprechender Flächen ist also $\frac{z_1^2}{2}:\frac{ab}{2}$ oder $z_1^2 : ab$, folglich ist die schräge Segmentfläche

$$\overset{J_1}{\underset{E_1}{F}}=\frac{ab}{z_1^2}\left[z_1\sqrt{z_1^2-e^2}-e_1^2\,{}^e\lg\frac{z_1+\sqrt{z_1^2-e_1^2}}{e_1}\right].$$

Die Parabelsegmente waren schon in Teil II berechnet worden.

Jetzt ist man imstande, zahlreiche von Geraden und Kegelschnitten begrenzte Flächen, z. B. auch Sektoren und Flächenstücke, die zwischen zwei Sehnen liegen, zu berechnen.