



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

Zweite Abteilung. Stereometrie.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-93638](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-93638)

Zweite Abteilung. Stereometrie.

I. Vorbemerkungen über Trägheitsmomente.

1) Eine Reihe wichtiger Aufgaben der Stereometrie und Mechanik hängt mit dem Begriffe des Trägheitsmomentes von ebenen Flächen zusammen.

Das statische Moment einer Fläche in Bezug auf eine Achse AB kann gedeutet werden als der Ausdruck

$$M = \sum fz = f_1 z_1 + f_2 z_2 + \dots,$$

wobei jedes f_n einen schmalen Parallelstreifen zur Achse bedeutet, z_n seine Entfernung von der Achse (also den Hebelarm). Der Ausdruck wird gleich Null, wenn AB durch den Schwerpunkt geht.

Multipliziert man dagegen jeden Streifen f_n , statt mit z_n , mit z_n^2 , so erhält man einen Ausdruck

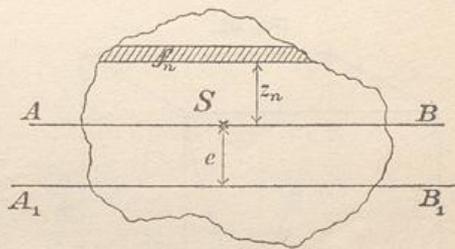
$$T = \sum fz^2 = f_1 z_1^2 + f_2 z_2^2 + \dots,$$

den man aus Gründen der Mechanik als das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Achse AB bezeichnet.

2) Dieser Ausdruck kann im allgemeinen nicht Null werden, da alle z^2 positiv sind. Für jede Achsenrichtung läßt sich aber zeigen, daß er am kleinsten ist, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht.

Ist nämlich $T = \sum fz^2$ für den Schwerpunkt bekannt, und verschiebt man die Achse parallel zu sich selbst um die Strecke $\pm e$, so wird das neue Moment

Fig. 60.



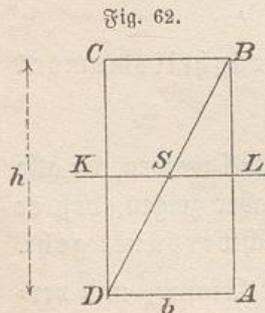
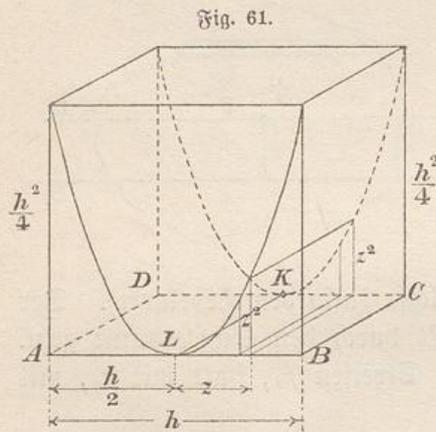
$$T_1 = \sum f(z \pm e)^2 = \sum f(z^2 + e^2 \pm 2ze) \\ = \sum fz^2 + \sum fe^2 \pm \sum 2efz = \sum fz^2 + e^2 \sum f \pm 2e \sum fz.$$

Hier ist $\sum fz^2 = T$, $e^2 \sum f = F$ (die Fläche) und $2e \sum fz = 0$, letzteres deshalb, weil das statische Moment $\sum fz$ für die Schwerpunktsachse gleich Null ist. Folglich ist

$$T_1 = T + e^2 F.$$

Kennt man also das Trägheitsmoment für eine Schwerpunktsachse, so kennt man es für jede parallele Achse. Man erhält es für diese durch Zufügung des Produktes aus der Fläche und dem Quadrate der „Verschiebung“.

3) Man kann ein solches Trägheitsmoment stereometrisch deuten, indem man an jeder Stelle der Fläche ein Lot z^2 errichtet, wo z die Entfernung von der Achse bedeutet. Jeder ebene Vertikalschnitt senkrecht zur Achse giebt dann eine parabolische Schnittlinie.



Ist z. B. $ABCD$ ein Rechteck mit den Seiten b und h , und führt man in Bezug auf die zu b parallele Schwerpunktsachse jene Konstruktion durch, so entsteht Figur 61, wo über jedem schmalen Streifen f ein Körper vom Inhalte fz^2 steht. Da nun der ganze Rechteckskörper den Inhalt $bh \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{4}$ hat, so ist der Inhalt des durch jene Konstruktion entstandenen Körpers $\frac{bh^3}{12}$, denn

die Parabelfläche umfaßt $\frac{2}{3}$ des Rechtecks, der Rest ist der dritte Teil vom Rechteck.

Demnach ist das Trägheitsmoment des Rechtecks in Bezug auf seine Mittelachse KL

$$T = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{12}.$$

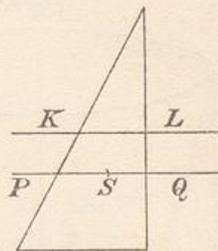
In Bezug auf DA ist es

$$\frac{bh^3}{12} + e^2 F = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{3} = \frac{Fh^2}{3}.$$

4) Auf das Dreieck ABD kommt in Bezug auf die Achse KL die Hälfte des ersteren Wertes, also $\frac{bh^3}{24}$. Verschiebt man aber die Achse zum Schwerpunkte des Dreiecks hin, so erhält man

$$\begin{aligned} T &= \frac{bh^3}{24} - e^2 F = \frac{bh^3}{24} - \left(\frac{h}{6}\right)^2 \frac{bh}{2} = 2 \frac{bh^3}{72} \\ &= \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}. \end{aligned}$$

Fig. 63.

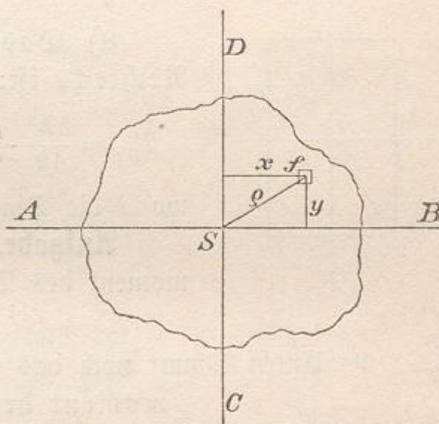


Da durch bloße Horizontalverschiebung der Wert von fz^2 nicht geändert wird, so gelten die obigen Resultate auch für schiefwinklige Parallelogramme und beliebig gestaltete Dreiecke.

5) In Figur 64 ist $x^2 + y^2 = \rho^2$, für das Flächenteilchen f ist also $fx^2 + fy^2 = f\rho^2$, folglich für sämtliche Flächenteilchen

$$\sum fx^2 + \sum fy^2 = \sum f\rho^2.$$

Fig. 64.



Den Ausdruck $\sum f\rho^2$ bezeichnet man als das polare Trägheitsmoment der Fläche im Gegensatz zum axialen, weil es auf einen Punkt oder Pol bezogen ist. Setzt man $\sum fx^2 = T_1$, $\sum fy^2 = T_2$, $\sum f\rho^2 = T_p$, so gilt die Gleichung

$$T_p = T_1 + T_2.$$

Also: Das polare Trägheitsmoment einer Fläche in Bezug auf einen Punkt ist stets gleich der Summe zweier axialen Trägheitsmomente, deren Achsen auf einander senkrecht stehen und durch den Punkt gehen.

6) Auch das polare Trägheitsmoment einer Fläche lässt sich stereometrisch deuten, indem man über jedem Flächenteilchen f eine Säule von der Höhe ρ^2 errichtet, wo ρ der Abstand von jenem Pole ist. Der entstehende Körper bildet einen parabolischen Trichter, den Außenraum eines Rotationsparaboloids.

7) Am bequemsten ermittelt sich sein Wert für den Kreis. Da der Körper am Rande die Höhe r^2 erhält, wird der Inhalt des Cylinders $r^2\pi \cdot r^2 = r^4\pi$. Der Außenraum des Paraboloids wird nach Teil II, S. 264 die Hälfte davon oder $\frac{r^4\pi}{2}$, folglich:

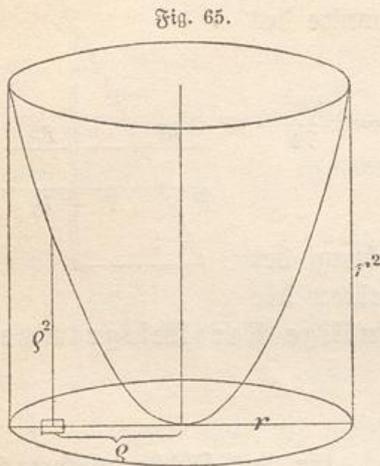


Fig. 65.

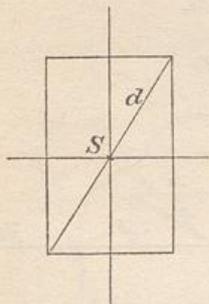
Das polare Trägheitsmoment eines Kreises ist für den Schwerpunkt als Pol:

$$T_p = \frac{r^4\pi}{2} = F\frac{r^2}{2} = \frac{d^4\pi}{32} = F\frac{d^2}{8}.$$

Aus $T_1 + T_2 = T_p$ folgt, da für den Kreis die beiden axialen Momente gleich sind,

$$T_1 = T_2 = \frac{r^4\pi}{4} = F\frac{r^2}{4} = \frac{d^4\pi}{64} = F\frac{d^2}{16}.$$

Fig. 66.



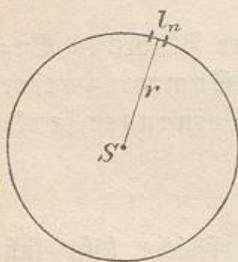
8) Das polare Trägheitsmoment des Rechtecks ist:

$$T_p = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2) = \frac{F}{12}d^2,$$

wo d die Diagonale, F die Fläche ist.

Aufgabe. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment des Dreiecks?

9) Unten kommt noch das polare bzw. axiale Trägheitsmoment der Kreislinie zur Sprache. Jedes Bogenteilchen l_n hat von S die Entfernung r , also ist das polare Trägheitsmoment der Kreisperipherie



$$l_1 r^2 + l_2 r^2 + l_3 r^2 + \dots = r^2(l_1 + l_2 + l_3 + \dots) \\ = r^2(2r\pi) = 2r^3\pi.$$

Das axiale ist wieder halb so groß, also gleich $r^3\pi$.

10) Bei dem axialen Moment einer Geraden von der Länge l tritt in der Rechtecksformel $\frac{bh^3}{12}$ oder $\frac{Fh^2}{12}$ an Stelle von F die

Länge l , ebenso tritt l an Stelle von h , man erhält also $\frac{ll^2}{12} = \frac{l^3}{12}$. Dies ist zugleich das polare Trägheitsmoment der Geraden, da das Moment der Geraden in Bezug auf sich selbst als Achse gleich Null ist.

11) Über körperliche Trägheitsmomente sei nur Folgendes gesagt:

Das Trägheitsmoment einer cylindrischen Scheibe in Bezug auf die Hauptachse ergibt sich aus dem polaren Trägheitsmomente des Kreises. Letzteres war $F \frac{r^2}{2}$, ersteres wird $J \frac{r^2}{2}$ oder $r^2 \pi h \frac{r^2}{2} = \frac{r^4 \pi h}{2}$, wenn J der Inhalt und h die Dicke ist.

Für einen Kreisring ist das polare Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} \frac{r^4 \pi}{2} - \frac{r_1^4 \pi}{2} &= \frac{\pi}{2} (r^4 - r_1^4) \\ &= \frac{\pi}{2} (r^2 - r_1^2) (r^2 + r_1^2) = F \frac{r^2 + r_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Für einen körperlichen Schwungring von der Dicke h wird es

$$\begin{aligned} J \frac{r^2 + r_1^2}{2} &= h \frac{(r^2 - r_1^2) \pi (r^2 + r_1^2)}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} (r^4 - r_1^4) h. \end{aligned}$$

Für eine Rechteckscheibe ist es (nach der Rechtecks-Formel $F \frac{d^2}{12}$)

$$T = J \frac{d^2}{12} = \delta \frac{b h d^2}{12},$$

wo δ die Dicke der Scheibe ist.

Für die Kugel und Halbkugel ist das Trägheitsmoment in Teil II, S. 230 bereits berechnet worden.

12) [In der Dynamik tritt die Masse m an Stelle von J . Für einen einfach gestalteten Schwungring ist also dort $T = m \frac{r^2 + r_1^2}{2}$. Die Arbeitswucht (lebendige Kraft, Energie) eines drehenden Körpers ist dort $T \frac{\vartheta^2}{2}$.

Fig. 68.

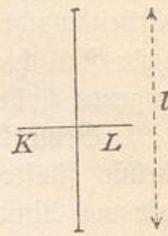


Fig. 69.

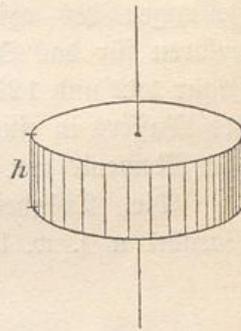


Fig. 70.

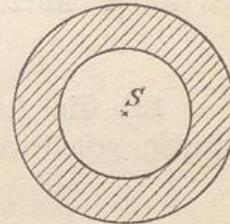
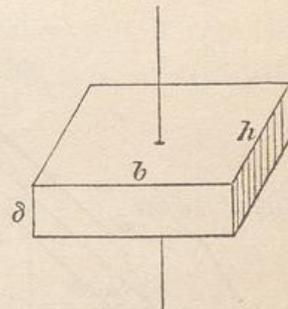


Fig. 71.



In der Lehre vom Pendel, vom Stöße, in der Lehre von der Arbeitswucht drehender Massen, auch bei gewissen stereometrischen und hydrostatischen Untersuchungen spielt das Trägheitsmoment eine hervorragende Rolle. Von besonderer Wichtigkeit ist es für die Festigkeitslehre.]

Bemerkungen. Die Trägheitsmomente von Körpern sind Ausdrücke fünfter Dimension, die von Flächen sind vierter Dimension, die von Linien sind dritter Dimension, die von Raumpunkten würden zweiter Dimension sein.

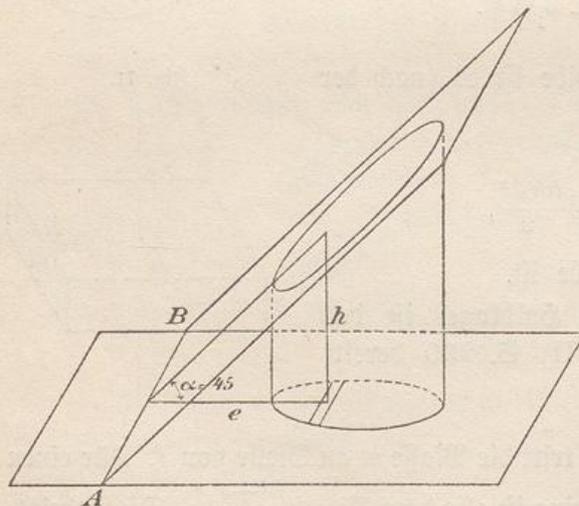
Ein interessante Übungsaufgabe bilden die stereometrischen Darstellungen des axialen Trägheitsmomentes für den Kreis und des polaren für das Quadrat. (Vergl. Einführung in das ster. Zeichnen. Figur 122 und 125.) Das letztere Moment stellt dann die Einstellung des Wassers in einem rotierenden Gefäße quadratischen Querschnitts in dem Momente dar, wo der sich bildende Trichter den Boden berührt. —

Die Trägheitsmomente regelmäßiger Vielecke, der Ellipse, Parabel u. s. w. bieten lehrreiche Übungsaufgaben.

II. Sätze über abgeschrägte Prismen und Cylinder und über Drehungskörper.

13) Ein senkrechtcs Prisma oder ein senkrechter Cylinder von beliebig gestalteter Grundfläche werde durch eine unter 45° geneigte Ebene schräg abgeschnitten. Die letztere

Fig. 72.



Ebene schräg abgeschnitten. Die letztere schneide die erweiterte Grundfläche in einer Geraden AB . Man teile die Grundfläche durch Parallele zu AB in zahlreiche schmale Streifen ein, dann ist die Höhe h über jedem Streifen gleich der Entfernung e von AB .

Sind $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ die Streifenflächen und $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ die

zugehörigen Höhen, so ist der Körperinhalt, wenn man von den verschwindend kleinen Treppenräumen absieht,

$$\begin{aligned} J &= f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3 + \cdots + f_n h_n \\ &= f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 + \cdots + f_n e_n. \end{aligned}$$

Letzteres ist aber die Summe der statischen Momente der einzelnen Streifen in Bezug auf die Schnittlinie AB , oder, was dasselbe ist, das statische Moment M der Grundfläche in Bezug auf die Achse AB , so daß man hat

$$J = M.$$

14) Wird nun durch AB eine anders geneigte Ebene gelegt, die den Körper schräg begrenzt, so wird sein Inhalt

$$J = M \cdot \tan \alpha.$$

Tritt nämlich jetzt nh an Stelle von h , so wird

$$J = Mn = M \frac{nh}{h} = M \tan \alpha.$$

Die Formel stimmt mit der früher abgeleiteten $J = G \cdot h_s$ überein, wo h_s die Höhe über dem Schwerpunkte der Grundfläche bedeutet.

15) **Aufgabe.** Das statische Moment des behandelten Körpers in Bezug auf die Achse AB zu berechnen.

Auflösung. Ist der Schnittwinkel der Ebene gleich 45° , so ist das statische Moment jedes Körperstreifens in Bezug auf die Achse AB

$$(f \cdot h)e = fe^2,$$

das gesammte statische Moment ist also

$$f_1 e_1^2 + f_2 e_2^2 + f_3 e_3^2 + \cdots + f_n e_n^2.$$

Für die Streifenzahl $n = \infty$ ist dies aber das Trägheitsmoment T der Grundfläche in Bezug auf die Achse AB , also ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf AB

$$\text{Moment} = T.$$

Ist dagegen der Schnittwinkel der Ebene gleich α , so wird die Summe der statischen Momente

$$\begin{aligned} &(f_1 e_1 \tan \alpha) e_1 + (f_2 e_2 \tan \alpha) e_2 + \cdots + (f_n e_n \tan \alpha) e_n \\ &= (f_1 e_1^2 + f_2 e_2^2 + f_3 e_3^2 + \cdots + f_n e_n^2) \tan \alpha = T \tan \alpha. \end{aligned}$$

16) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt des abgeschrägten Körpers zu finden.

Auflösung. Das Produkt aus dem Inhalte J und dem horizontal

gemessenen Schwerpunktsabstände x des Körpers ist gleich seinem statischen Momente in Bezug auf AB , also

$$x \cdot J = \text{Moment},$$

folglich

$$x = \frac{\text{Moment}}{\text{Inhalt}} = \frac{T \tan \alpha}{M \tan \alpha}$$

oder

$$x = \frac{T}{M},$$

d. h. die Projektion des Körperschwerpunktes auf die Grundfläche hat von der Schnittlinie AB eine Entfernung, die gleich ist dem Quotienten aus dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf die Schnittlinie und dem statischen Momente in Bezug auf dieselbe.

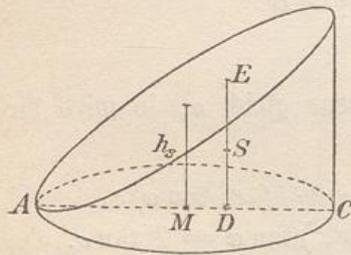
Errichtet man in dieser Entfernung über der Parallelen zu AB eine senkrechte Ebene, so liegt der Körperschwerpunkt in dieser in halber Höhe, denn jeder senkrechte Streifen des Körpers hat den seinigen in halber Höhe, die Schwerpunkte liegen also in der sämtliche Höhen halbierenden Ebene.

Dadurch ist die Lage des Körperschwerpunktes auf eine horizontale Linie beschränkt. Die Lage in dieser wird durch die Gestalt der Grundfläche näher bestimmt. Ist die Grundfläche z. B. symmetrisch gegen eine zu AB senkrecht liegende Gerade, so ist der Schwerpunkt vollständig bestimmt.

17) **Beispiel.** Wo liegt der Schwerpunkt des Cylinderhufes?

Auflösung. Das axiale Trägheitsmoment der Kreisfläche in Bezug auf jeden Durchmesser ist gleich $\frac{r^4 \pi}{4}$, in Bezug auf die Tangente

Fig. 73.



in A also

$$T = \frac{r^4 \pi}{4} + e^2 F = \frac{r^4 \pi}{4} + r^2 \cdot (r^2 \pi) \\ = \frac{5}{4} r^4 \pi.$$

Das statische Momente der Kreisfläche in Bezug auf dieselbe Tangente ist

$$M = (r^2 \pi) r = r^3 \pi.$$

Die Entfernung der Schwerpunktslinie DE von A ist also

$$x = \frac{T}{M} = \frac{\frac{5}{4} r^4 \pi}{r^3 \pi} = \frac{5}{4} r.$$

18) Ganz dieselben Betrachtungen lassen sich für den Mantel jedes abgechrägten Cylinders oder Prismas machen. Man teilt den Umfang der Grundfläche in sehr viele kleine Teilchen g_1, g_2, g_3, \dots ein, zu denen die Höhen $h_1, h_2, h_3 \dots$ gehören, so daß die Summe der senkrechten Flächenstreifen des Mantels wird

$$O = g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 + \dots + g_n h_n.$$

Hat der Schnitt wieder 45° Neigung, so ist ebenso

$$O = g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3 + \dots + g_n e_n.$$

Rechts aber steht die Summe der statischen Momente aller Bogenstückchen in Bezug auf die Schnittlinie AB , für die man das gesamte statische Moment M_1 der Grundperipherie setzen darf. Demnach ist die Mantelfläche

$$O = M_1$$

und bei der allgemeinen Neigung α

$$O = M_1 \tan \alpha.$$

19) Das statische Moment des Mantels in Bezug auf AB wird bei Neigung 45°

$$(g_1 e_1) e_1 + (g_2 e_2) e_2 + \dots + (g_n e_n) e_n = \sum g e^2 = T_1,$$

d. h. gleich dem Trägheitsmomente der Grundperipherie in Bezug auf AB ; bei allgemeiner Neigung α entsteht $T_1 \tan \alpha$. Demnach ist die Entfernung der Schwerpunktslinie von AB zu berechnen aus

$$x \cdot O = T_1 \tan \alpha$$

oder aus

$$x = \frac{T_1 \tan \alpha}{O} = \frac{T_1 \tan \alpha}{M_1 \tan \alpha} = \frac{T_1}{M_1}.$$

20) **Beispiel.** Wo liegt der Schwerpunkt der Mantelfläche des Cylinderhufes?

Auflösung. Das Trägheitsmoment des Kreisumfangs in Bezug auf den Durchmesser als Achse ist $r^3 \pi$, in Bezug auf die Tangente in A also $r^3 \pi + (2r\pi)r^2 = 3r^3 \pi$. Das statische Moment in Bezug auf dieselbe Achse ist $(2r\pi)r = 2r^2 \pi$. Demnach ist jetzt die Entfernung der Schwerpunktslinie $D_1 E_1$

$$x_1 = \frac{T_1}{M_1} = \frac{3r^3 \pi}{2r^2 \pi} = \frac{3}{2} r.$$

21) **Bemerkung.** Diese Formeln finden Anwendung in der Hydrostatik. Dreht man nämlich die Figuren um 90° , so erhält man das Diagramm des Wasserdrucks gegen senkrechte Seitenwände für den Fall, daß AB die Wasserstandslinie ist. Der nach unten zunehmende Druck giebt als Resultante das statische Moment der betreffenden Wandfläche in Bezug auf AB . Der Angriffspunkt aber liegt in der Tiefe

$$x = \frac{T}{M}.$$

Die letztere Formel giebt zugleich den Schwingungspunkt entsprechender physischer Pendel an, außerdem den freiwilligen Drehungspunkt einer freien gestoßenen Scheibe für den Anfang der Bewegung, woraus sich die fortschreitende Bewegung ihres Schwerpunktes und die Geschwindigkeit der Drehung um den letzteren ermitteln läßt. (Anwendung auf die Berechnung der Drehung und der fortschreitenden Bewegung, in die ein Weltkörper durch den Stoß eines anderen versetzt wird.)

Von besonderer Wichtigkeit ist die Formel aber für die Untersuchung des Schwerpunktes halbirter Drehungskörper und die entsprechenden Centrifugal-Aufgaben.

22) **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt des in Figur 74 dargestellten halben Drehungskörpers mit kreisförmigem Querschnitt?

Auflösung. Jeder kleine Sektor $ACDE$ läßt sich als abgeschrägter Cylinders betrachten. Sind r und ρ die Radien, so hat die Schwerlinie KL eine Entfernung e von M , die sich aus

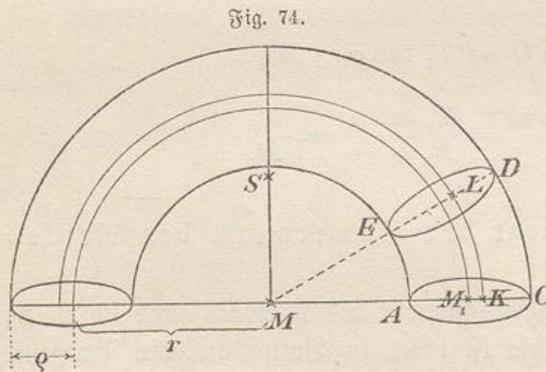


Fig. 74.

$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{\rho^4 \pi}{4} + \rho^2 \pi \cdot r^2}{\rho^2 \pi \cdot r} = \frac{\rho^2 + 4r^2}{4r}$$

berechnet. Auf dem mit diesem Radius e um M geschlagenen Kreise liegen die Schwerpunkte der sämtlichen kleinen Sektoren.

Der Schwerpunkt des Körpers fällt also mit dem dieses Halbkreisbogens zusammen. Demnach ist

$$MS = \frac{2e}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{T}{M} = \frac{2}{\pi} \frac{\rho^2 + 4r^2}{4r} = \frac{\rho^2 + 4r^2}{2r\pi}.$$

23) Wichtiger ist das allgemeine Resultat, daß für halbe Rotationskörper von beliebigem Hauptschnitt

$$MS = \frac{2}{\pi} \frac{T}{M}$$

die Entfernung des Schwerpunktes vom Centrum ist.

[In diesem Punkte ist die Masse des halben Rotationskörpers vereinigt zu denken, wenn man berechnen will, durch welche Centrifugalkraft die eine Hälfte des ganzen Körpers von der andern abgerissen werden soll, sobald er schnell um seine Hauptachse dreht.

Ist ϑ die am Einheitskreise gemessene Winkelgeschwindigkeit, so ist die Centrifugalkraft

$$K = m \cdot \overline{MS} \cdot \vartheta^2 = m \frac{2}{\pi} \frac{T}{M} \vartheta^2.$$

Hier ist $m = \frac{p}{g} = \frac{J \cdot p'}{g}$, wenn J der Inhalt, p' das spezifische Gewicht des halben Körpers ist. Nun ist aber nach Guldin $J = \frac{2r\pi \cdot F}{2}$ und das Moment $M = F \cdot r$, also ist

$$K = \frac{r\pi F p'}{g} \frac{2}{\pi} \frac{T}{F r} \vartheta^2 = 2 \frac{p'}{g} T \vartheta^2.$$

Zur Kenntniss der Beanspruchung eines beliebig gestalteten Schwungrings durch die Centrifugalkraft reicht also die Kenntniss des Trägheitsmoments der Fläche, der Winkelgeschwindigkeit und des spezifischen Gewichts p' aus.

Der vorher behandelte Körper mit kreisförmigem Querschnitt wird also beansprucht durch

$$K = \frac{2p'}{g} \left[\frac{\varrho^4 \pi}{4} + \varrho^2 \pi r^2 \right] \vartheta^2 = \frac{\varrho^2 \pi p'}{2g} (\varrho^2 + 4r^2) \vartheta^2.$$

Für die Kugel bestätigt sich das bekannte Resultat $\frac{p' r^4 \pi \vartheta^2}{g} \cdot \frac{4}{4}$. Aufgaben solcher Art sind von Wichtigkeit nicht nur für die Theorie der Schwungräder, sondern auch für die der sogenannten Centrifugen, bei denen nicht nur die Centrifugalkraft des halben Gefäßes, sondern auch der gegen die Wände gepreßten Flüssigkeit zu berechnen ist. Die Gestalt der letzteren kann bei großen Geschwindigkeiten als Rotationskörper eines Kreissegmentes betrachtet werden, wenn das Gefäß kugelförmig begrenzt ist.]

24) **Aufgabe.** In entsprechender Weise den Schwerpunkt für den Mantel des durch Figur 74 dargestellten halben Drehungskörpers zu bestimmen.

Es ist

$$e_1 = \frac{T_1}{M_1} = \frac{\frac{\rho^3 \pi}{2} + \rho \pi r^2}{\rho \pi r} = \frac{\rho^2 + 2r^2}{2r},$$

also

$$MS_1 = \frac{2e_1}{\pi} = \frac{\rho^2 + 2r^2}{r\pi}.$$

Statt des Halbringes kann man auch beliebige Ringsektoren in solcher Weise behandeln.

Aufgaben. Wie groß ist der Inhalt des über einem Halbkreise stehenden und in bestimmter Weise abgeschragten Cylinders, wie groß ist die Mantelfläche, und wo liegt der Schwerpunkt des Körpers und des Mantels?

Ein Drehungskörper entstehe durch Drehung eines Halbkreises um eine Achse in seiner Ebene, die parallel zum Durchmesser ist. Wie groß sind Mantel und Inhalt des Körpers? Wo liegt der Schwerpunkt der Körperhälfte und wo der des Mantels? Zwei Fälle sind zu unterscheiden: in dem einen liegt die Achse auf der Durchmesserseite, im andern entgegengesetzt.

III. Die Regelschnittsflächen und die zugehörigen Körper.

a) Cylinder.

25) Über den geraden und schrägen Kreiscylinder ist in Teil I und II das Nötige gesagt. Die Inhaltsformeln lassen sich auch für den Fall aufstellen, daß die Grundfläche ein Kreissegment ist.

Dasselbe gilt vom elliptischen Cylinder. Die Inhaltsformel ist $J = ab\pi h$. Auch hier kann die Grundfläche ein Ellipsensegment sein.

Bei dem parabolischen Cylinder kann von einer Inhaltsberechnung nur die Rede sein, wenn die Grundfläche als Segment durch eine Sehne begrenzt ist. Die Berechnung des Segmentes ist in Teil II, S. 250 gelehrt worden.

Auch für den hyperbolischen Cylinder ist das in Geometrie Nr. 60 und 61 behandelte Segment der Berechnung zu Grunde zu legen.

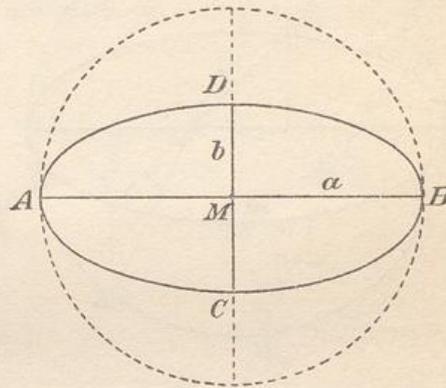
b) Regel.

26) Über den geraden und schiefen Kreiskegel und den elliptischen Kegel ist neues nicht zu bringen. Für den parabolischen und hyperbolischen Kegel ist die Inhaltsbestimmung möglich, wenn die Grundfläche ein begrenztes Segment ist.

c) Das Ellipsoid.

27) Dreht sich eine Ellipse um eine der beiden Achsen, so entsteht ein Drehungsellipsoid. Man kann sich dasselbe auch dadurch entstanden denken, daß man in einer Kugel auf einem Hauptschnitte AB Lote errichtet und sämtliche Lote in konstantem Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkürzt oder verlängert. Die Endpunkte liegen dann statt auf der Kugeloberfläche auf der des Drehungsellipsoids. Der Kugelinhalt $\frac{4}{3} a^3 \pi$ geht über in $(\frac{4}{3} a^3 \pi) \frac{b}{a} = \frac{4}{3} a^2 b \pi$, wenn b die Drehungsachse ist, und in $\frac{4}{3} a b^2 \pi$, wenn a die Drehungsachse ist.

Fig. 75.

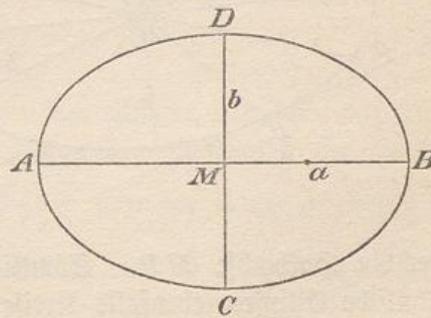


(Die Berechnung der Oberfläche überschreitet das Ziel der Schule.)

Bemerkung. Nach Guldin ist $J = 2 \rho \pi F$ und $\rho = \frac{J}{2 \pi F}$. Der Schwerpunktsabstand der halben Ellipsenfläche CDB in Figur 75 ist also $\rho = \frac{\frac{4}{3} a^2 b \pi}{2 \pi \frac{ab\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$, er wird also ebenso berechnet, wie beim Kreise. Dies läßt sich auch auf dem Wege einfacher Anschauung nachweisen.

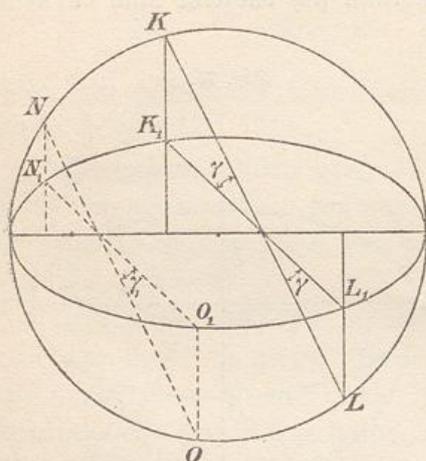
28) Figur 76 stellt wieder den Aufriß eines Drehungsellipsoids dar. Errichtet man in demselben auf dem Hauptschnitte $ADBC$ Lote bis zur Oberfläche und unterwirft man diese der Verkürzung oder Verlängerung nach dem konstanten Verhältnis $\frac{c}{a}$, so entsteht an Stelle des Drehungsellipsoids das dreiachsiges Ellipsoid mit den Achsen a, b und c . Der Inhalt $\frac{4}{3} a^2 b \pi$ geht über in $(\frac{4}{3} a^2 b \pi) \frac{c}{a}$ oder in $J = \frac{4}{3} abc \pi$.

Fig. 76.



29) Die Parallelschnitte einer Kugel sind unter einander ähnlich. Verwandelt man die Kugel in Figur 77 durch Lotverkürzung in ein

Fig. 77.



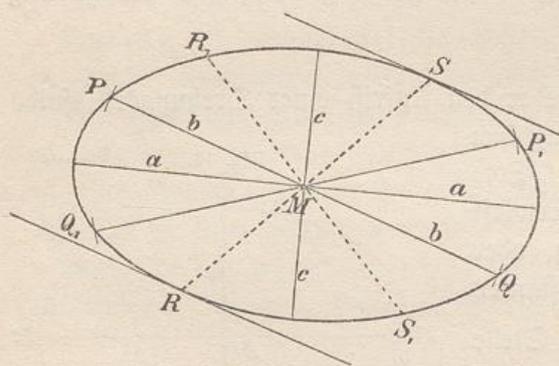
Drehungsellipsoid, so geht jeder Kugelschnitt KL in einen Ellipsoidschnitt K_1L_1 über; jeder zu KL parallele Kugelschnitt NO geht in einen Ellipsoidschnitt N_1O_1 über, der zum vorigen, K_1L_1 , parallel ist. Dies folgt sofort aus der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke. Die Ellipsoidschnitte sind Parallelprojektionen der Kugelschnitte, und da die Winkel γ und γ_1 für die beiden gezeichneten Paare übereinstimmen, so sind die Parallelschnitte des Ellipsoids einander ähnlich. Ähnliche schiefe

Kreiszylinder werden nämlich hier auf ähnliche Weise geschnitten.

Geht man vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen über, so erkennt man auf dieselbe Art, daß auch die Parallelschnitte des dreiachsigen Ellipsoids unter einander ähnlich sind.

30) Jedes dreiachsige Ellipsoid hat zwei Scharen von Kreischnitten. Sind nämlich die Achsen der Größe nach a , b und c ,

Fig. 78.



so daß c die kleinste ist, so läßt sich in der durch a und c bestimmten Ebene mit b ein Kreis schlagen, der den entsprechenden Hauptschnitt in P , Q , P_1 und Q_1 schneidet. Der Aufsriß PQ stellt einen Kreischnitt dar, denn die durch den Punkt M dargestellte Halbachse b ist gleich der darauf senk-

rechten Halbachse MP . Sämtliche Parallelschnitte zu PQ sind als ähnliche Ellipsen ebenfalls Kreise. Die Tangentialebenen in R und S geben die Grenzpunkte der einen Kreisschar. Auf RS liegen die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise. Dasselbe findet mit der

symmetrisch liegenden Kreisschar statt. Die Punkte R und S , R_1 und S_1 heißen Nabelpunkte des Ellipsoids. Sie sind von Bedeutung für die mathematische Physik.

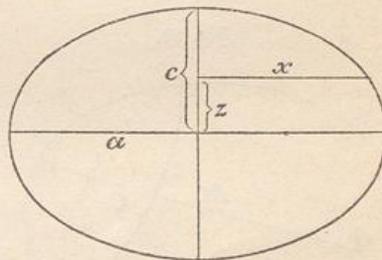
31) Verschiebt man die Kreisschnitte der einen Schar in geeigneter Weise auf einander, so nämlich, daß die Verbindungslinie RS senkrecht zu PQ wird, so ist das Ellipsoid in ein Drehungsellipsoid verwandelt. In besonderen Fällen kann es auch zur Kugel werden.

32) Aus der Berechnung der Kugelsegmente läßt sich leicht die der Ellipsoidsegmente ableiten, und zwar nach der Methode der konstanten Verkürzung bzw. Verlängerung. Man kann aber auch folgendermaßen verfahren.

In Figur 79 ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ die Gleichung der Ellipse, also ist

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2.$$

Fig. 79.



Stellt die Zeichnung ein Drehungsellipsoid mit der Achse c dar, so hat der Horizontalschnitt in der Höhe z die Fläche $x^2\pi$ oder

$$q = a^2\pi - \frac{a^2\pi}{c^2} z^2.$$

Nach der Summenformel (Teil II, Ster. Nr. 64) ist also die Schicht von der Höhe Null bis zur Höhe z vom Inhalte

$$J = a^2\pi \frac{z}{1} - \frac{a^2\pi z^3}{c^2 \cdot 3} = a^2\pi z \left(1 - \frac{z^2}{3c^2}\right).$$

Für $z = c$ bestätigt sich die obige Inhaltsformel für die Hälfte des Drehungsellipsoids.

33) Stellt dagegen die Figur ein dreiachsiges Ellipsoid mit den Halbachsen a , b und c dar, so ist wegen der Ähnlichkeit der Horizontalschnitte das zur Höhe z gehörige y von der Länge $y = x \frac{b}{a}$, und der Horizontalschnitt hat jetzt die Fläche $xy\pi = x \frac{b}{a} \pi = x^2 \frac{b}{a} \pi$ oder

$$q = \left(a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2\right) \frac{b}{a} \pi.$$

Nach der Summenformel ist also die Schicht von Höhe 0 bis Höhe z vom Inhalte

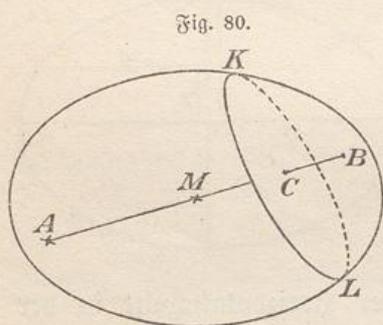
$$J = ab\pi z - \frac{ab\pi z^3}{c^2 \cdot 3}.$$

Für $z = c$ bestätigt sich die obige Inhaltsformel (für die Hälfte des Körpers).

Aus den Schichten kann man die Segmentformel leicht ableiten.

Auch die Simpson-Formel läßt sich benutzen, da der 3. Grad beim Querschnitt nicht überstiegen wird.

34) Für allgemeine Segmente ergibt sich folgende Methode als zweckmäßigste: KL sei ein ganz beliebiger Schnitt des drei-



achsigen Ellipsoids; B sei auf dessen Oberfläche der Berührungspunkt der zur Schnittebene parallelen Tangentialebene. Der Durchmesser AB wird in einem bestimmten Verhältnis $BC:CA$ durch die Schnittebene geteilt. Teilt man bei einer Kugel einen Durchmesser in demselben Verhältnis durch eine zu ihm senkrechte Schnittebene, so verhalten sich in beiden Körpern

die Segmente wie die ganzen Körper. Ist also S das Ellipsoidsegment, J der Ellipsoidinhalt, S_1 das Kugelsegment, J_1 der Kugelinhalt, so ist $S:S_1 = J:J_1$ und $S = S_1 \frac{J}{J_1}$. Dies ergibt sich aus der obigen Entstehungsweise des Ellipsoids aus der Kugel, bei der es sich um eine Art von Parallelprojektion handelt, die auf die Verhältnisse der Körperteile keinen Einfluß ausübt.

Das Ellipsoid ist von Wichtigkeit für die Untersuchung der Erdgestalt, für die Geometrie überhaupt und für die mathematische Physik, namentlich für die Optik, Potentialtheorie und Hydromechanik.

d) Kreis-Paraboloid und elliptisches Paraboloid.

35) Das durch Drehung einer Parabel um ihre Achse entstehende Drehungs- oder Kreisparaboloid ist schon in Teil II (Regelschnitte Nr. 43) als die Hälfte des zugehörigen Cylinders nachgewiesen. Der Inhalt ist also

$$J = \frac{1}{2} a^2 \pi h.$$

Berkürzt man sämtliche auf der Schnittebene $ABCD$ senkrechten Halbschnen beider Körper in konstantem Verhältnis $\frac{b}{a}$, so entsteht ein elliptischer Cylinder und das zugehörige elliptische Paraboloid, welches nach dem Satze von Cavalieri wiederum halb so großen Inhalt hat, wie der Cylinder.

36) Das Drehungsparaboloid ist ein besonderer Fall vom Drehungsellipsoid, seine Parallelschnitte sind also ebenfalls untereinander ähnlich. Das elliptische Paraboloid ist ein besonderer Fall vom dreiachsigen Ellipsoid, es hat ebenfalls ähnliche Parallelschnitte und unter diesen zwei Scharen von Kreischnitten.

Der Satz von der Halbierung des Cylinderinhalts durch das Paraboloid bleibt auch bestehen, wenn man durch Horizontalverschiebung der Horizontalschnitte Figur 81 in Figur 82 verwandelt.

Auf die Bedeutung des Drehungsparaboloids für die Hydromechanik, für die Lehre von den Trägheitsmomenten und für die mathematische Physik ist schon in Teil II aufmerksam gemacht worden.

e) Hyperboloid.

37) Durch Drehung einer Geraden um eine sie nicht schneidende, sondern schräg kreuzende Achse entsteht nach Teil II (V. 43 und IV. 2) ein Drehungshyperboloid mit einem Mantel. Ein solches hat demnach auf sich zwei Scharen gerader Linien. Daraus folgt, daß die Schrägschnitte des Körpers Ellipsen sind, sobald der Schnitt eine geschlossene einarmige Kurve giebt.

Man kann nämlich nach der Methode von Dandelin Berührungskugeln einsetzen, die auch die Ebene berühren. Aus der Gleichheit der Kugel-Tangenten XF und XA bzw. XF_1 und XB folgt dann für jeden Punkt der Schnittkurve $FX + XF_1 = AB = \text{const.}$

Fig. 81.

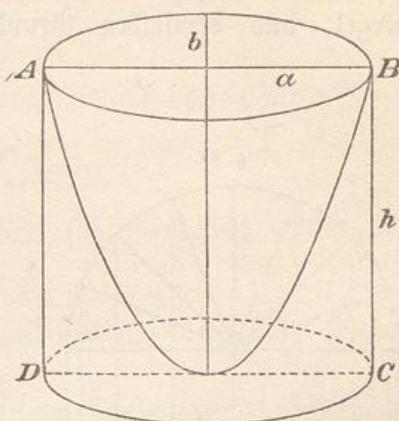
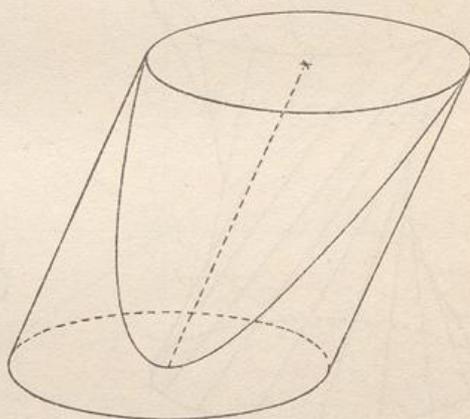


Fig. 82.



Wird dagegen der Schnitt zweiarmig, so wird er, wie beim Kegel, aus demselben Grunde ein Kegelschnitt, denn dann wird

Fig. 84.

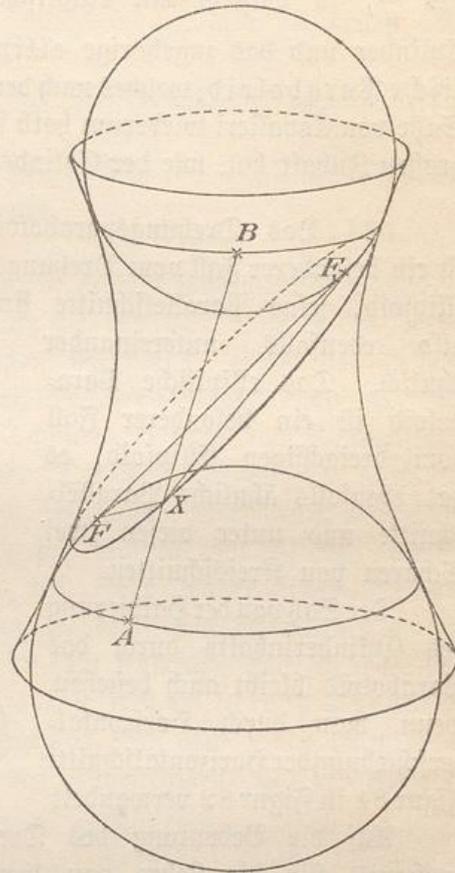
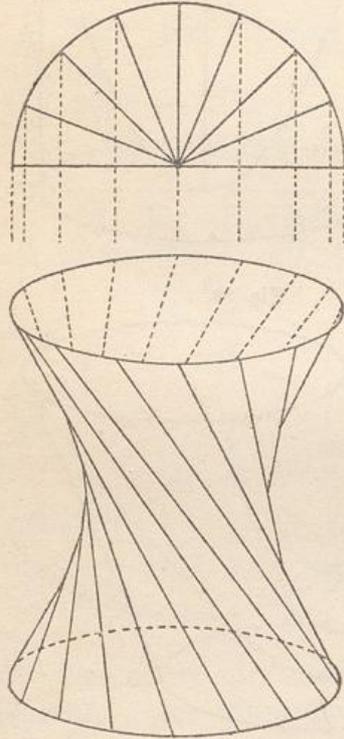


Fig. 83.



$XF - XF_1 = XA - XB = AB$. Wird der Schnitt parallel zu einer Seite des Asymptotenkegels, so entsteht eine Parabel. (Vgl. Teil II, Fig. 180 u. 183.)

38) Die Horizontalschichten des Körpers sind leicht zu berechnen. Auf diese Berechnung kann sich die Schule beschränken.

Ist die Gleichung des Hauptschnitts

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ergibt sich für die Höhe y der Abstand x aus der Gleichung

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2,$$

also ist der Querschnitt

$$q = x^2\pi = a^2\pi + \frac{a^2}{b^2}\pi y^2.$$

Nach der Summenformel ist die Körperschicht von 0 bis y vom Inhalte

$$J = a^2\pi y + \frac{a^2}{3b^2}\pi y^3.$$

Mit Hilfe der Segmentformel läßt sich hieraus der Schwerpunkt des Hyperbelsegments berechnen.

39) Es fragt sich, ob die Parallelschnitte ähnliche Regelschnitte sind.

Es genügt, dies an dem gleichseitigen Drehungshyperboloid zu untersuchen. Die

Gleichung der Hyperbel*) deselben sei

$$1) \quad x^2 - y^2 = 1,$$

die Schnittlinien AB und A_1B_1 mögen die aus $A = \tan \alpha$ folgende Neigung α haben.

Die Gleichung von AB ist also

$$2) \quad y = Ax.$$

Aus 1) und 2) folgen als Koordinaten von B

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-A^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}},$$

so daß $MB^2 = x^2 + y^2 = \frac{1+A^2}{1-A^2}$ ist. Der Horizontalschnitt des Hyperboloids durch M hat aber überall den Radius $MC = 1$, folglich hat die Ellipse AB das Achsenverhältnis

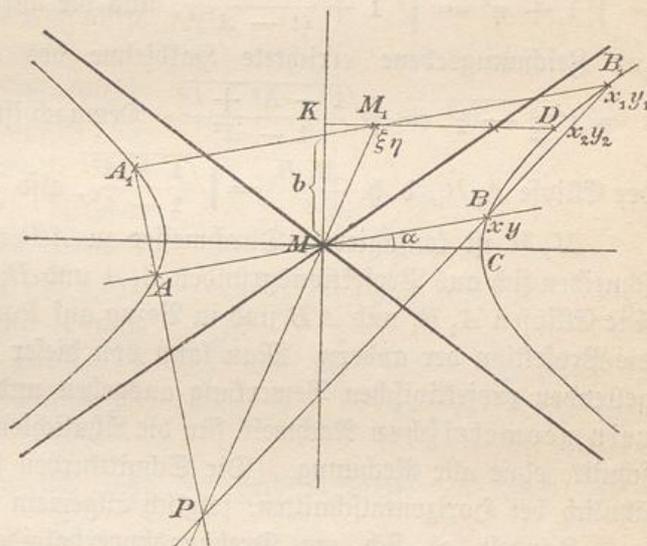
$$\sqrt{\frac{1+A^2}{1-A^2}} : 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1+A^2} : \sqrt{1-A^2}.$$

Die Gleichung von A_1B_1 sei

$$3) \quad y = Ax + b.$$

*) Fig. 85 stellt die allgemeine Hyperbel dar. Für den Specialfall der Rechnung denke man sich die Asymptoten aufeinander senkrecht.

Fig. 85.



Aus 1) und 3) ergeben sich die Koordinaten von A_1 und B_1 als

$$x_1 = \frac{Ab \pm \sqrt{1 + b^2 - A^2}}{1 - A^2}, \quad y_1 = \frac{b \pm A\sqrt{1 + b^2 - A^2}}{1 - A^2}.$$

Der Halbierungspunkt M_1 von A_1B_1 hat die Koordinaten $\frac{x_1 + x_2}{2}$ und $\frac{y_1 + y_2}{2}$, oder

$$\xi = \frac{Ab}{1 - A^2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{b}{1 - A^2}.$$

Folglich ist

$$M_1B_1 = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2} = \frac{\sqrt{(1 + b^2 - A^2)(1 + A^2)}}{(1 - A^2)}.$$

Die Haupthyperbel hat aber in Höhe η die Abscisse $KD = x_2 = \sqrt{1 + \eta^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{(1 - A^2)^2}}$, und die auf KD in M_1 senkrecht zur Zeichnungsebene errichtete Halbschne des Horizontalschnitts ist $s = \sqrt{x_2^2 - \xi^2} = \sqrt{\frac{1 - A^2 + b^2}{1 - A^2}}$. Demnach ist das Achsenverhältnis der Ellipse A_1B_1 , d. h. $\frac{M_1B_1}{s} = \sqrt{\frac{1 + A^2}{1 - A^2}}$, also dasselbe wie bei AB .

M_1M ist konjugierter Durchmesser zu AB und A_1B_1 . Auf ihm schneiden sich aus Projektionsgründen A_1A und B_1B in einem Punkte P . Die Ellipsen A_1B_1 und AB sind in Bezug auf P perspektivisch, also eine die Projektion der andern. Man kann von dieser für jeden Hauptschnitt geltenden projektivischen Bemerkung ausgehen und erhält dadurch einen rein geometrischen Nachweis für die Ähnlichkeit der beiden Parallelschnitte ohne alle Rechnung. (Die Schnittkurven sind perspektivisch und ähnlich bei Horizontalschnitten, folglich allgemein bei Parallelschnitten.)

Handelt es sich um Drehungshyperboloide, die aus der allgemeinen Hyperbel entstehen, also aus $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, so ist die Betrachtung nur unwesentlich verschieden. Man kann jedoch auch durch konstante Verkürzung oder Verlängerung der senkrechten Halbschnen zur allgemeinen Hyperbel übergehen.

Sind die Parallelschnitte nicht Ellipsen, sondern zweitheilige, also Hyperbeln, so ist die Koordinatenbetrachtung nur eine unbedeutende Umgestaltung der vorigen.

Also gilt ganz allgemein der Satz:

Die Parallelschnitte des einteiligen Drehungshyperboloids sind ähnliche Regelschnitte.

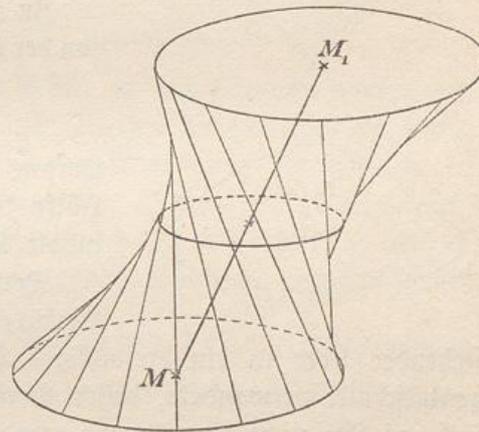
Auf der Existenz der Linien auf dem Drehungshyperboloide beruht die Möglichkeit der Konstruktion der sogenannten Hyperbelräder, die

ähnlich, wie die konischen Räder arbeiten, wobei jedoch die Achsen sich nicht schneiden, sondern in beliebiger Weise kreuzen. Die Zähne rollen sich nicht einfach aufeinander ab, sondern verschieben sich auch seitlich.

40) Das einteilige Drehungshyperboloid geht in ein dreiachsiges über, sobald man sämtliche auf einem senkrechten Hauptschnitte stehenden Lote in konstantem Verhältnis verkürzt. Dabei bleiben die beiden Gruppen gerader Linien auf der Oberfläche als solche bestehen, so daß die Figur 83 noch immer als Darstellung des Körpers gelten kann. Die Inhaltsberechnung ändert sich in derselben Weise, wie beim Übergange vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen. Der Körper hat zwei Scharen von Kreischnitten. Die Ähnlichkeit der Parallelschnitte bleibt erhalten.

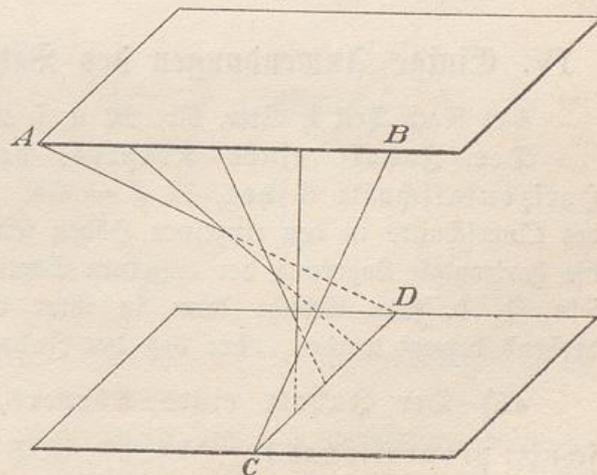
41) Auch durch Horizontalverschiebung der Kreischnitte des Drehungshyperboloids gelangt man zum dreiachsigen Hyperboloide, nur müssen die Mittelpunkte der Kreise auf einer Geraden MM_1 bleiben. Auch jetzt bleiben die geraden Linien bestehen. Sind die Abschnitte auf dem einen der Kreise gleich groß, so sind sie es auch auf dem andern.

Fig. 86.



42) Denkt man sich jetzt die beiden Kreise unendlich groß, d. h. als horizontale gerade Linien (die sich kreuzen wie AB und CD in Figur 87) und in gleiche Stücke zerlegt sind, so geben die Verbindungslinien die bereits in Teil II (beim Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen) behandelten Flächen. Sie bilden das sogenannte hyperbolische Para-

Fig. 87.

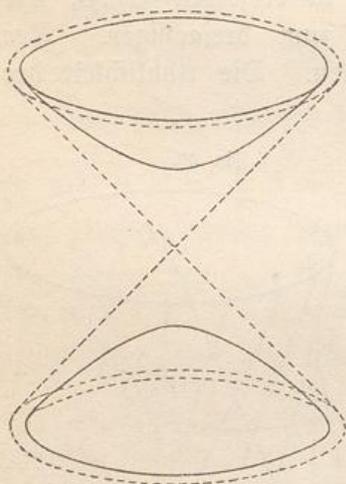


boloid. (Vergl. Figur 131 in der Einführung in das stereometrische Zeichnen und Figur 146 in Teil II.)

Verbindet man A , B , C und D auf alle Arten, so hat man das durch die Fläche halbierte Halbtetraeder, so daß nach Teil II, Ster. Nr. 37 die betreffende Inhaltsberechnung bereits erledigt ist.

43) Drehung der Hyperbel um die andere Achse giebt das zweiteilige Drehungshyperboloid. In Figur 88 ist es so dargestellt, daß statt der Gleichung

Fig. 88.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die folgende maßgebend ist,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Zu Zwecken der Berechnung kann man von der Scheitelgleichung ausgehen, also von

$$x^2 = 2py + \frac{p}{a}y^2,$$

woraus sich der Querschnitt und mit Hilfe der Summenformel der Segmentinhalt leicht ergibt.

Der Körper läßt sich durch konstante Verkürzung der auf einem Hauptschnitt stehenden Nöte in ein dreiachsiges Hyperboloid mit elliptischem Horizontalschnitt verwandeln, dessen Berechnung ebenso einfach ist. Näher soll auf ihn nicht eingegangen werden. Die Entwicklungen sind den beim einteiligen Hyperboloid gegebenen ganz analog.

IV. Einige Anwendungen des Satzes von Cavalieri.

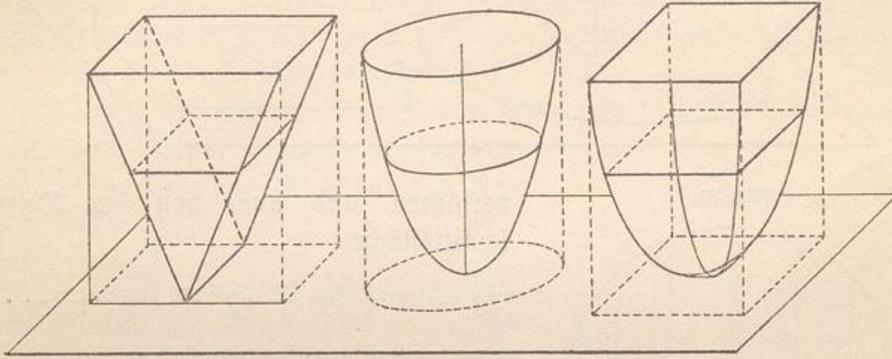
44) Nach Teil I, Ster. Nr. 22 u. f. w. gelten folgende Sätze:

Der Inhalt eines Körpers, der überall denselben Horizontalschnitt G hat, ist $J = Gh$. Dabei mag die Gestalt des Querschnitts in den einzelnen Höhen sein, welche sie will. Auch die horizontale Lagerung der einzelnen Schnitte kann eine willkürliche sein, d. h. jede Schicht kann in ihrer Ebene fortschreitend und drehend bewegt werden, ohne daß der Inhalt sich ändert.

45) Der Inhalt eines Körpers, dessen Horizontalschnitt proportional der Höhe ist, ist $J = G \frac{h}{2}$. In Figur 89

sind einige solche Körper dargestellt. Der erste ist der auf die Kante gestellte Dachkörper, der zweite ist ein Drehungsparaboloid, welches dadurch entstanden ist, daß man jeden Querschnitt des ersten in einen gleich großen Kreis verwandelt. Der dritte entsteht dadurch, daß man

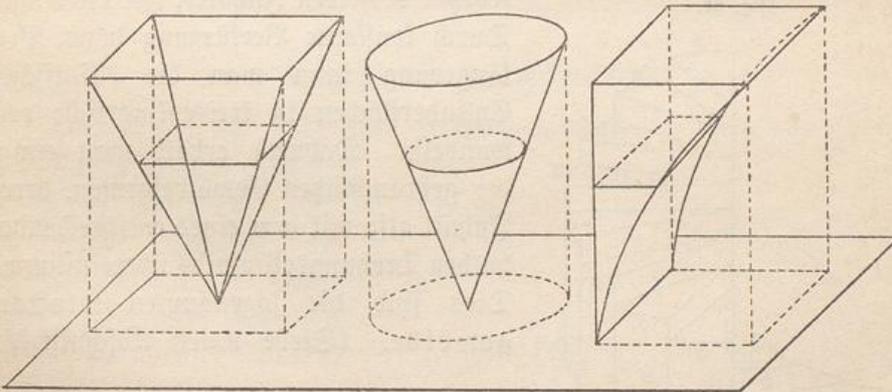
Fig. 89.



jeden rechteckigen Querschnitt des ersten in ein Quadrat verwandelt. Ebenso kann man ihm ähnliche Dreiecke, ähnliche Fünfecke und dergleichen als Querschnitte geben. Bei geeigneter Anordnung der horizontalen Lagerung werden die Grenzlinien Parabeln. Jeder dieser Körper ist die Hälfte des zugehörigen Prismas bezw. Cylinders. Auf die obere Fläche gestellt würden die letzteren parabolische Gewölbe geben.

46) Der Inhalt eines Körpers, dessen Horizontalschnitt proportional dem Quadrate der Höhe ist, ist $J = G \frac{h}{3}$.

Fig. 89b.



Hierher gehören Pyramide, Kegel und parabolischer Cylinder in der gezeichneten Stellung.

Jeder dieser Körper ist der dritte Teil des zugehörigen Cylinders bezw. Prismas.

47) In ähnlicher Weise kann man auch mit höheren Graden

Fig. 90.

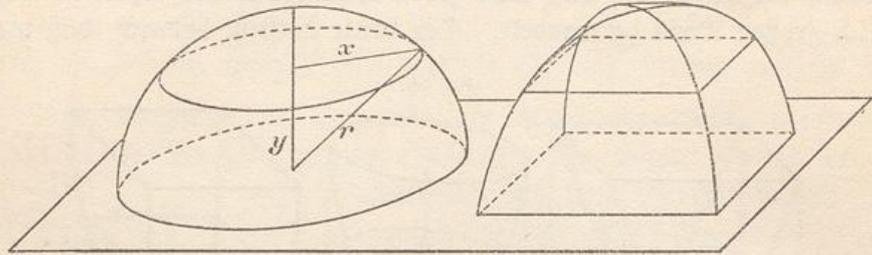


Fig. 91.

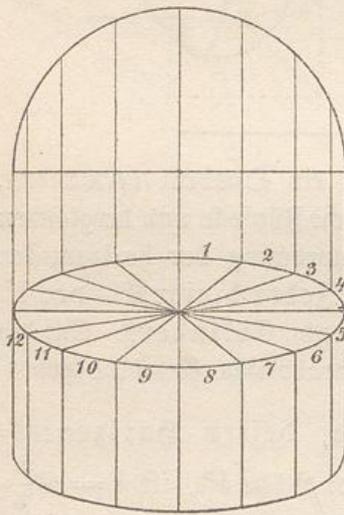
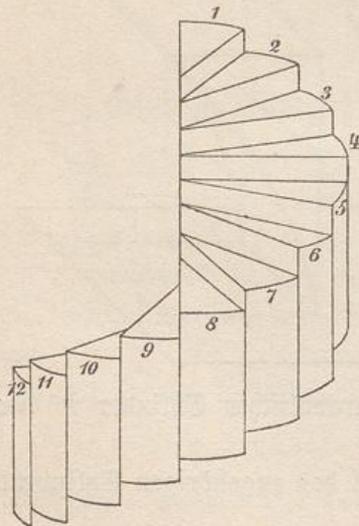


Fig. 92.



verfahren und auch von der Querschnittsfläche

$$q = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots$$

gruppenweise zusammenfassen.

So ist z. B. die Halbkugel ein Körper, dessen Querschnitt ist:

$$q = x^2\pi = r^2\pi - y^2\pi.$$

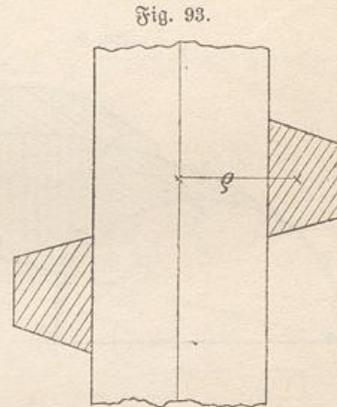
Man kann die Konstruktion eines Körpers verlangen, der in gleichen Höhen dieselben Querschnitte hat, wobei jedoch die letzteren z. B. regelmäßige Vielecke, etwa Quadrate, sein sollen. Dann entstehen elliptische Begrenzungen und Körper desselben Inhalts, wie die Kugel. Durch konstante Verkürzung bezw. Verlängerung kann man die elliptischen Cylinderflächen in kreiszylindrische verwandeln. Dadurch erhält man einige der gebräuchlichen Gewölbeformen, deren Inhalt also mit dem eines entsprechenden halben Drehungsellipsoids übereinstimmt. Dies sind die sogenannten Klostergewölbe. (Siehe unten Abschnitt V.)

48) Eine besondere Art der Anwendung des Princips von Cavalieri hat man noch bei den Schraubengewinden.

Man denke sich einen Cylinder in zahlreiche gleiche Sektoren geteilt. Jedem der Sektoren gebe man an der Achse eine solche Steigung, daß eine regelrechte Stufentreppe entsteht, von der in der Figur 92 ein Teil gezeichnet ist. Denkt man sich die Anzahl der Sektoren unendlich groß, so erhält man die parallelperspektivische Darstellung eines Schraubengewindes. Da aber jeder Sektor nur verschoben worden ist, so muß der Inhalt für jeden Umgang des Gewindes gleich dem Cylinder sein.

Folglich allgemeiner: Für jeden Umgang eines Schraubengewindes ist der Inhalt gleich dem des entsprechenden Gulbinschen Rotationskörpers.

49) Man zeichnet die Schraubengewinde in der Regel nur im orthographischen Aufriß. Läßt man z. B. durch ein Trapez ein Gewinde bilden, so ist der Gewindegewindekörper für jeden Umgang vom Inhalte $J = 2\rho\pi F$, wo F die erzeugende Fläche, ρ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse ist.



Daselbe gilt vom Dreiecksgewinde, vom konvergen und koncaven Halbkreisgewinde, von beiden Arten elliptischer Gewinde u. s. w. Die Anfertigung der entsprechenden Zeichnungen giebt eine lehrreiche Übung. (Vergl. Einführung Figur 76 bis 80.)

V. Einige Gewölbeformen.

50) Figur 94 stellt das kreisbogenförmige Tonnengewölbe dar. Das Rechteck ABB_1A_1 ist die Grundfläche, der cylindrische Mantel die Laibungsfläche, ABC die Stirnfläche, $AB = d = 2r$ die Spannweite, $MC = r$ die Pfeilhöhe, $CC_1 = b$ die Scheitellinie, BB_1 und AA_1 sind die Widerlagslinien, A, B, B_1, A_1 sind Widerlagspunkte.

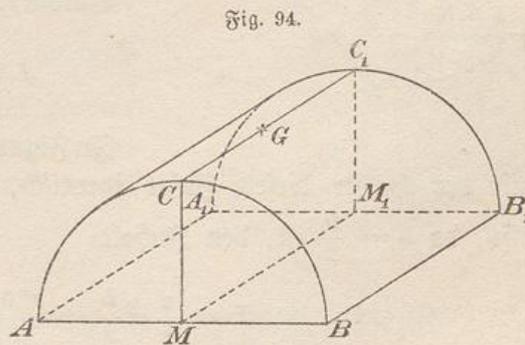


Fig. 95.

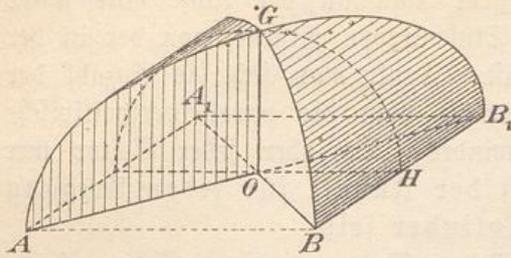
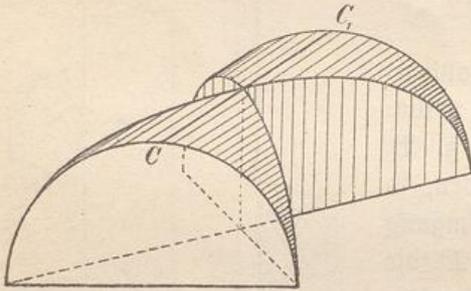


Fig. 96.



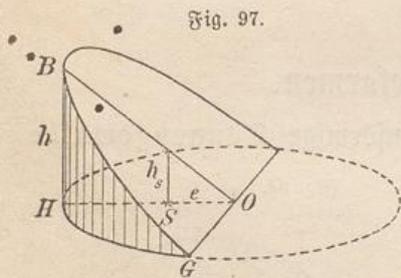
Der Gewölberaum, die verschiedenen Flächen und Kanten sind leicht zu berechnen.

51) Legt man durch die Diagonalen AB_1 und A_1B senkrechte Ebenen, so wird das Tonnengewölbe in vier Teile zerlegt, von denen je zwei kongruent sind. In Figur 95 und 96 sind je zwei kongruente Teile besonders dargestellt.

Die eine Gruppe hat nur einen Scheitelpunkt G . Diese beiden Teile heißen Gewölbe-
wangen. Die andere hat eine Scheitellinie CC_1 , diese Teile heißen Gewölbekappen.

52) Aufgabe. Den Gewölberaum und die Laibungsfläche einer Wange zu berechnen.

Figur 97 stellt den Cylinderhuf über einem Halbkreise dar. Ist S der Schwerpunkt der Grundfläche und h_s die zugehörige Höhe, so



ist der Körperinhalt $J = \frac{r^2\pi}{2} h_s$. Nun

ist aber $h_s : h = e : r$, also $h_s = h \frac{e}{r}$,

und zwar ist $OS = e = \frac{4r}{3\pi}$ (nach Guldin), folglich

$$J = \frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{h}{r} \frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3} r^2 h. \quad \frac{1}{2} r^2 h$$

In Figur 95 ist der Gewölbetaeil $O H G B$ mit der Hälfte dieses Hufes identisch, der ganze Gewölberaum hat also, da $h = \frac{b}{2}$ ist, den Inhalt

$$J = \frac{2}{3} r^2 \frac{b}{2} = \frac{r^2 b}{3} = \frac{d^2 b}{12}$$

Der Mantel des Hufes ist $r\pi h_s$, wenn h_s die zum Schwer-

punkte S' des Halbkreisbogens gehörige Höhe ist. Hier ist $h'_s : h = e' : r$, also $h'_s = h \frac{e'}{r}$. Da aber nach Guldin $e = \frac{2r}{\pi}$ ist, so ist Mantel $M = r\pi \frac{h}{r} \frac{2r}{\pi} = 2rh$. Die Hälfte davon entspricht der Hälfte der gesuchten Laibungsfläche, die ganze Laibungsfläche ist also

$$F = 2r \frac{b}{2} = rb = \frac{db}{2}.$$

53) **Aufgabe.** Gewölberaum und Laibungsfläche einer Kappe zu berechnen.

Auflösung. Der Raum der Doppelkappe ist gleich dem Tonnenraum vermindert um die Doppelwange, also gleich

$$\frac{r^2\pi}{2}b - \frac{2}{3}r^2b = \frac{r^2b}{6}[3\pi - 4].$$

Der Raum der einfachen Kappe mit Scheitellinie $\frac{b}{2}$ ist also

$$J = \frac{r^2b}{12}[3\pi - 4] = \frac{d^2b}{48}[3\pi - 4].$$

Ebenso ist es mit der doppelten Laibungsfläche. Sie ist $r\pi b - 2rb = rb(\pi - 2)$, also ist die einfache Laibungsfläche mit Scheitellinie $\frac{b}{2}$

$$F = \frac{rb}{2}(\pi - 2) = \frac{db}{4}(\pi - 2).$$

54) Das schon früher besprochene regelmäßige Klostergewölbe hat cylindrische Wölbung, so daß die Mittellinien der Wölbungen Halbkreisbogen sind.

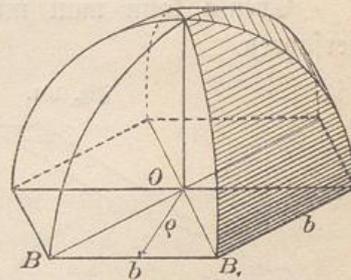
Es besteht also aus n Wangen über dem regelmäßigen n -Eck. Jede Wange hat den Raum $\frac{\rho^2 b}{3}$, wenn ρ der an Stelle von r tretende Radius des eingeschriebenen Kreises ist. Der Gesamtraum ist also

$$J = \frac{n\rho^2 b}{3}.$$

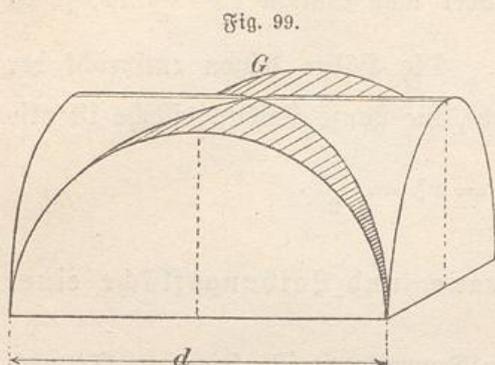
Ebenso ist es mit der gesamten Laibungsfläche. Sie ist

$$F = n\rho b.$$

Fig. 98.



- 55) Figur 99 stellt das quadratische Kreuzgewölbe dar, bei dem vier kongruente Kappen mit Scheitellinie $\frac{b}{2}$ regelrecht zusammenstoßen.



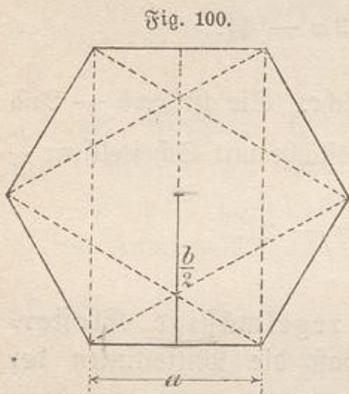
Der Gewölberaum ist $\frac{4d^2b}{48} [3\pi - 4]$, oder, da $b = d$ ist,

$$J = \frac{d^3}{12} [3\pi - 4].$$

Die gesamte Laibungsfläche ist

$$F = \frac{4db}{4} (\pi - 2) = d^2(\pi - 2).$$

- 56) Ist die Grundfläche des regelmäßigen Kreuzgewölbes ein Sechseck, so handelt es sich um 6 Kappen, jede vom Inhalte $\frac{a^2b}{48} [3\pi - 4]$, oder, da $\frac{b}{2} = a$ ist, vom Inhalte $\frac{a^3}{24} [3\pi - 4]$. Der Gesamtinhalt ist

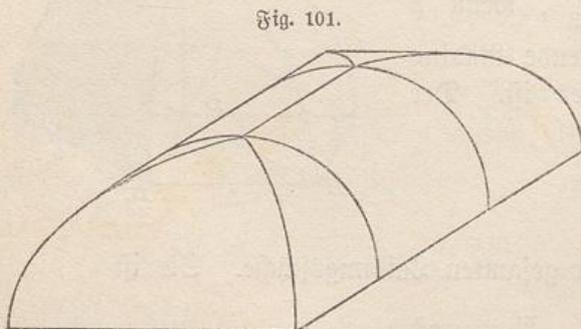


$$J = \frac{a^3}{4} [3\pi - 4].$$

Die Laibungsfläche jeder Kappe ist $\frac{ab}{4} (\pi - 2) = \frac{a^2}{2} (\pi - 2)$, die gesamte Fläche der Wölbung also

$$F = 3a^2(\pi - 2).$$

Ebenso kann man mit dem achtsseitigen u. s. w. Kreuzgewölbe verfahren.



- 57) Setzt man an ein Tonnengewölbe die beiden Hälften eines quadratischen Klostergewölbes an, so erhält man das Muldengewölbe (Figur 101), dessen Berechnung ein einfaches Übungsbeispiel darbietet.

58) Die quadratische Hängekuppel entsteht, wenn man der Basis einer Halbkugel ein Quadrat einbeschreibt und durch die Seiten desselben senkrechte Schnittebenen legt.

Der Inhalt wird gefunden, indem man von dem Halbkugelinhalte $\frac{2}{3} r^3 \pi$ vier Halbsgmente oder zwei ganze Segmente von der Pfeilhöhe

$$h = r - r\sqrt{\frac{1}{2}} = r\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

abzieht. Der ganze Segmentinhalt ist

$$\begin{aligned} \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) &= \frac{\pi r^2 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{3} \left[3r - r + r\sqrt{\frac{1}{2}}\right] \\ &= \frac{r^3 \pi}{3} \left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \left(2 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{r^3 \pi}{6} \left[4 - 5\sqrt{\frac{1}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Abzuziehen ist also $\frac{r^3 \pi}{6} [8 - 5\sqrt{2}]$. Der Gewölberaum ist demnach

$$\frac{4}{6} r^3 \pi - \frac{r^3 \pi}{6} [8 - 5\sqrt{2}] = \frac{r^3 \pi}{6} [5\sqrt{2} - 4].$$

Setzt man $a = r\sqrt{2}$ ein, so erhält man

$$J = \frac{a^3 \pi}{12} [5 - 2\sqrt{2}].$$

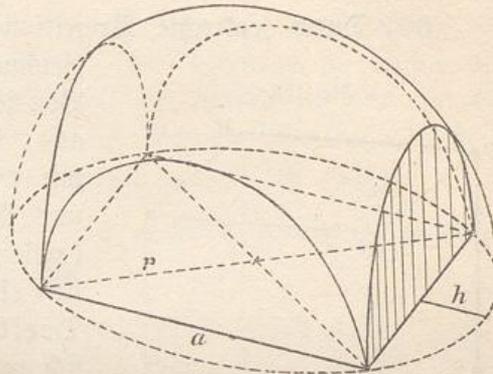
Die Laibungsfläche ist gleich der Kugelfläche vermindert um vier Halbkalotten oder um zwei Kalotten, also gleich

$$\begin{aligned} 2r^2 \pi - 2 \cdot 2r\pi \left[r - r\sqrt{\frac{1}{2}}\right] &= r^2 \pi [2 - 4 + 2\sqrt{2}] \\ &= r^2 \pi [2\sqrt{2} - 2] = 2r^2 \pi [\sqrt{2} - 1]. \end{aligned}$$

Setzt man $a = r\sqrt{2}$ ein, so folgt $a^2 \pi (\sqrt{2} - 1)$.

59) Auf die Darstellung anderweitiger Gewölbeformen kann hier verzichtet werden, nur sei kurz bemerkt, daß an Stelle des Kreiszylinders überall der elliptische Cylinder treten kann, den man durch konstante Verkürzung der Senkrechten erhält. Auf gewisse parabolische Wölbungen war schon früher hingewiesen. Die Berechnungen machen keine Schwierigkeit.

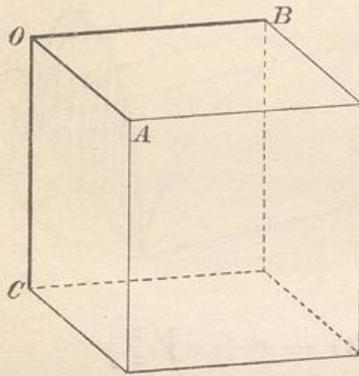
Fig. 102.



VI. Die grundlegenden Konstruktionen der orthographischen Axonometrie.

60) Durch senkrechte Projektion des Würfels erhält man eine Zeichnung nach Art von Figur 103.

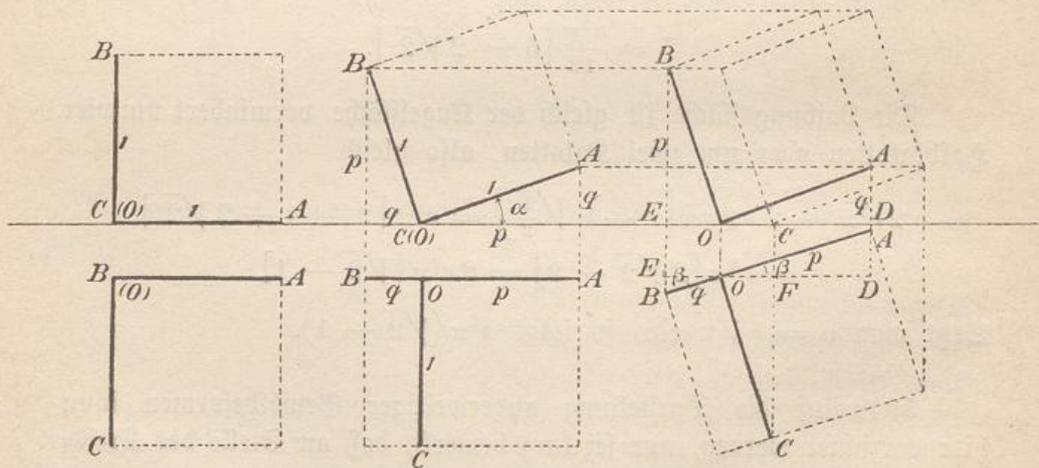
Fig. 103.



Von jeder Ecke gehen drei Kantenlinien aus, die, abgesehen vom Vorzeichen, mit OA , OB und OC nach Länge und Richtung übereinstimmen. Man bezeichnet drei solche Kanten, sobald sie einem Würfel angehören, als Dreibein oder Dreikant. Es wird sich nun zeigen, daß, wenn OA und OB nach Länge und Richtung gegeben sind, OC nach Länge und Richtung konstruiert werden kann, also nicht mehr willkürlich ist. Die Strecken OA , OB und OC müssen also in einer bestimmten Beziehung stehen.

61) Man findet diese Beziehung, wenn man den Würfel von der einfachsten Lage aus erst im Aufriß um einen Winkel α , dann im Grundriß um einen Winkel β dreht. (Vergl. Teil II Figur 138.)

Fig. 104.



Die in der zweiten und dritten Lage (Figur 104) mit p und q bezeichneten Stücke haben, wenn man die Würfelkante gleich 1 setzt, absolut genommen sämtlich die Länge $p = \cos \alpha$ bzw. $q = \sin \alpha$.

In der dritten Lage ist $OD = p \cos \beta = \cos \alpha \cos \beta$ (vergl. Grundriß), $OE = q \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta$, und im Grundriß $OF = 1 \cdot \sin \beta$, also im Aufriß $OC = \sin \beta$.

62) Man betrachte nun im Aufriß der dritten Lage O als den Nullpunkt des Koordinatensystems und betrachte im Sinne der Komplexentheorie (Teil II, Abschnitt VII der Arithmetik) OA als die Summe von OD und DA , OB als die Summe von OE und EB . Dann hat man, wenn $\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird, nach Obigem:

$$OA = \cos \alpha \cos \beta + i \sin \alpha, \quad OB = -\sin \alpha \cos \beta + i \cos \alpha, \quad OC = \sin \beta.$$

Die Quadrate der Strecken sind:

$$OA^2 = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta,$$

$$OB^2 = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha - 2i \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta,$$

$$OC^2 = \sin^2 \beta.$$

Die Summe der Quadrate der drei Strecken ist also gleich $\cos^2 \beta (\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta) + \sin^2 \beta - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 1 = 0$.
Folglich:

Sind die von einem Punkte O ausgehenden Kanten OA , OB und OC Würfelkanten in senkrechter Projektion, so ist die Summe der Quadrate dieser Strecken gleich Null.

(Faßt man die Quadrate der Strecken im Sinne der Mechanik als Kräfte auf, so handelt es sich um drei im Gleichgewicht stehende Kräfte.)

Dies ist der Gaußsche Fundamentalsatz der orthographischen Axonometrie, von dem sich jedoch nur im Nachlasse, Bd. II, S. 309, seiner Werke eine kurze Notiz befindet.

63) **Bemerkungen.** Man hätte im Aufriß noch eine vierte Lage nehmen können, indem man z. B. um einen Winkel γ drehte. Dadurch wäre jede Strecke noch mit dem Drehungsfaktor $(\cos \gamma + i \sin \gamma)$ multipliziert worden, ihr Quadrat wäre also mit $(\cos \gamma + i \sin \gamma)^2 = \cos 2\gamma + i \sin 2\gamma$ versehen worden. Die Summe der Quadrate hätte also wiederum Null ergeben.

Die Umkehrung würde lauten: Ist bei einem Dreieck die Summe der Streckenquadrate gleich Null, so kann es als orthographische Projektion von drei Würfelkanten gedeutet werden.

64) Es fragt sich, ob man aus dem Aufriß der Lage 3 die wahre Länge der Kanten sofort erkennen kann. Dies ist der Fall, denn es ist für diese Lage $q = \sin \alpha$, $p = \cos \alpha$, also $p^2 + q^2 = 1^2$, folglich:

$\sphericalangle \triangle OAB$ wird. Aus OA und OB_1 bilde man das Parallelogramm $OADB_1$, ziehe dessen Diagonale DB und verlängere sie über O hinaus um sich selbst, was C_1 giebt. Man halbiere den Winkel AOC_1 , dann erhält man die Richtung der dritten Kante. Macht man ihre Länge gleich der mittleren Proportionale zwischen OA und OC_1 , so ist OC vollständig bestimmt. Die Würfelzeichnung ist leicht zu vollenden.

Beweis. Faßt man OA als die reelle Strecke 1 oder auch 1^2 auf, so ist nach Obigem OB_1 das Quadrat der Strecke OB nach Länge und Richtung. Ist nämlich $OB = r(\cos \beta + i \sin \beta)$, so ist $OB_1 = r^2(\cos \beta + i \sin \beta)^2 = r^2(\cos 2\beta + i \sin 2\beta)$. In derselben Weise ist OC_1 das Quadrat von OC . Da aber $C_1O = OD$ die Diagonale des Parallelogramms ist, so ist die Summe der Strecken OA_1 , OB_1 und $OC_1 = \text{Null}$. Folglich bilden ihre Quadratwurzeln OA , OB und OC ein orthographisches Dreibein.

Bemerkung. Statt den concaven Winkel AOC_1 zu halbieren, konnte man es auch mit dem convexen Winkel thun, dann wäre OC entgegengesetzt entstanden, was dem zweiten Wurzelwerte entspricht.

Die beiden Lösungen sind im übrigen nicht von einander verschieden. Jede läßt zwei Deutungen zu, je nachdem man A oder H als vornliegend auffaßt.

In der Konstruktion lassen sich einige Linien ersparen, die des Beweises wegen mit gezeichnet sind.

[Selbstverständlich kann man OC auch durch Berechnung finden. Es ist nämlich

$$OB_1 = \frac{OB^2}{OA}, \quad OD = \sqrt{OB_1^2 + OA^2 + 2OB_1 \cdot OA \cdot \cos 2\beta},$$

$$OC = \sqrt{OA \cdot OD}, \quad \sin AOD = \frac{OB_1}{OD} \sin 2\beta,$$

endlich Winkel γ die Hälfte des zugehörigen Supplementwinkels AOC_1 .]

66) **Aufgabe 2.** OA sei nach Länge und Richtung gegeben, die Kanten OB und OC nur der Länge nach. Die Würfelzeichnung soll vollendet werden.

Auflösung. Man konstruiere die Länge OB^2 und OC^2 mit Hülfe der Proportionen

$$OA : OB = OB : x \quad \text{und} \quad OA : OC = OC : x_1,$$

wo $OA = 1$ gesetzt ist. Aus $OA = 1^2$, $OB_1 = OB^2$ und $OC_1 = OC^2$ konstruiere man das Parallelogramm $OADB_1$ nebst Diagonale. Halbierung des Winkels AOB_1 giebt die Richtung von OB , Halbierung des Nebenwinkels AOC_1 von AOD giebt die Richtung von OC , u. s. w.

67) **Aufgabe 3.** OA sei nach Länge und Richtung gegeben, die Kanten OB und OC nur der Richtung nach. Die Würfelzeichnung ist zu vollenden.

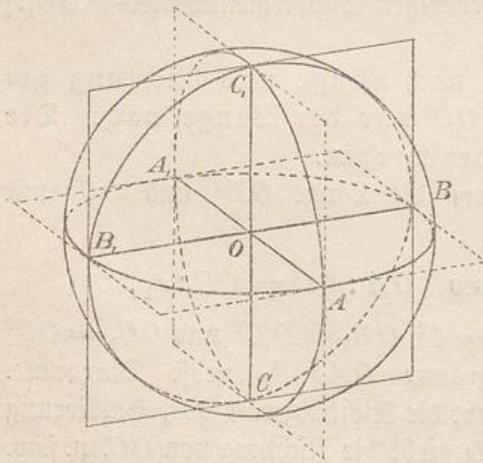
Auflösung. Man verdoppele die gegebenen Winkel β und γ . Dadurch erhält man die Richtung der Seite OB_1 und der Diagonale OD des Parallelogramms $OADB_1$, welches leicht zu vollenden ist. Die mittlere Proportionale zwischen OA und OB_1 giebt die Länge von OB , die mittlere Proportionale zwischen OA und OC_1 die Länge von OC .

68) **Aufgabe 4.** OA sei nach Länge und Richtung gegeben, von der Kante OB die Länge, von der Kante OC die Richtung. Die Würfelzeichnung ist zu vollenden.

Auflösung. Verdoppelung des gegebenen Winkels γ giebt wieder die Diagonalrichtung des zu konstruierenden Parallelogramms $OADB_1$, welches dadurch vollendet wird, daß man um A einen Bogen mit OB^2 schlägt. Letzteres ist, wie vorher, mit Hilfe der Proportion $OA : OB = OB : x$ zu konstruieren. Ist das Parallelogramm vollendet, so giebt die Halbierung des Winkels AOB_1 die Richtung von OB . Die Länge von OC ergibt sich als mittlere Proportionale zwischen OA und der Diagonale OD .

69) **Übungs-Aufgaben.** Ist der Würfel in allgemeiner Lage konstruiert, so kann man nach Obigem die ein- und die umbeschriebene Kugel durch den entsprechenden Kreis darstellen. Man kann ihm ein Tetraeder oder Oktaeder einbeschreiben, ein Pentagondodekaeder um ihn legen, ein Ikosaeder aus dem letzteren ableiten und so auch diese

Fig. 107.



Gestalten direkt in allgemeiner Lage darstellen, ohne zwei Ebenen zu benutzen. Auch das Trapezoeder und das Diamantoeeder lassen sich aus dem zum Achsenkreuz vervollständigten Dreieck ableiten, überhaupt sämtliche Kristallformen mit senkrecht aufeinander stehenden Achsen.

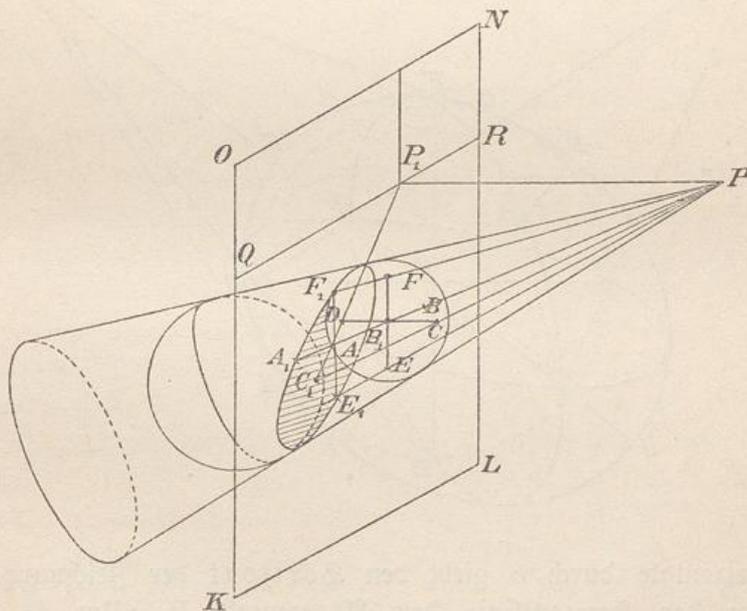
70) Schlägt man um die Ecke des Dreiecks einen Kreis mit der wirklichen Kantenlänge,

die nach dem Obigen zu konstruieren ist, so erkennt man die Möglichkeit der korrekten Konstruktion sphärischer Dreiecke mit Bogen von je 90° , d. h. der Kugeloctanten in allgemeiner Lage. Man braucht AA_1 , BB_1 und CC_1 nur als Mittellinien gewisser Parallelogramme zu betrachten, denen die entsprechenden Ellipsen einzubeschreiben sind. Die letzteren lassen sich nach Pascal oder Brianchon sogar ohne Hülfe des Zirkels konstruieren. Vergl. z. B. Figur 8.

VII. Die Kugel in centralperspektivischer Projektion.

71) $KLNO$ sei eine senkrechte Ebene, auf der eine Berührungskugel liegt. In P befinde sich das Auge, so daß die Projektion P_1 von P der Augenpunkt und die Horizontale QR der Horizont ist. Der von P aus an die Kugel gelegte Berührungskegel schneidet die Ebene in einem Kegelschnitte, z. B. in einer Ellipse, die als Projektion

Fig. 108.



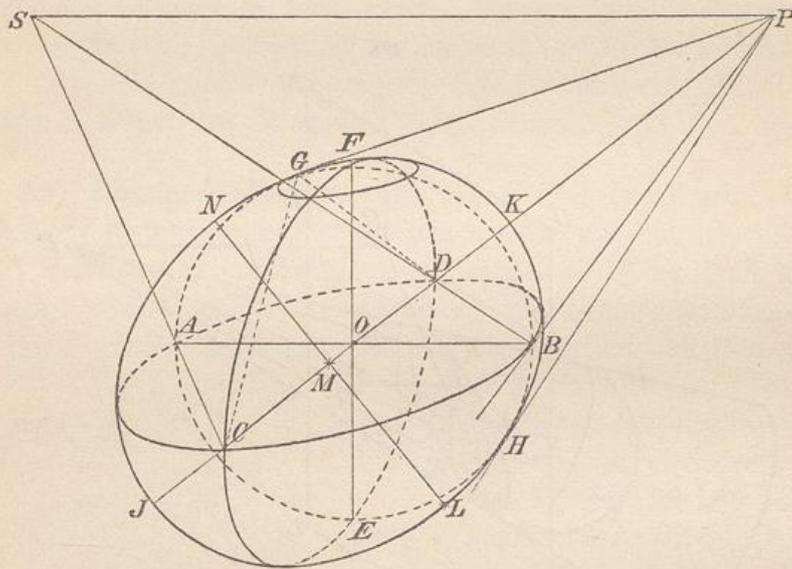
der Kugel zu betrachten ist. Die Kugel ist die eine Dandelin'sche Berührungskugel, berührt also die Ebene im Brennpunkte D der Ellipse. Ist DC ein Lot auf der Ebene und C der Schnittpunkt desselben mit der Kugel, so giebt, wie die zweite Berührungskugel zeigt, PC den anderen Brennpunkt C_1 der Ellipse. Die durch P und DC ge-

legte Ebene steht auf der Zeichnungsebene $KLNO$ senkrecht, muß also auch durch P_1 gehen. Folglich: Die Verbindungslinie der Ellipsenbrennpunkte geht durch den Augenpunkt P_1 . Ist nun z. B. EF der senkrechte Kugeldurchmesser, AB der horizontale, zu CD und EF senkrechte, der, wie EF , zur Ebene $KLNO$ parallel ist, so ist durch die Projektionen A_1B_1 , C_1D_1 , E_1F_1 die Zeichnung des Hauptachsenkreuzes der Kugel für diese Art von Perspektive bestimmt.

72) Daraus ergibt sich für die Centralperspektive folgende einfache Konstruktion der dem Achsenkreuz umbezeichneten Kugel:

Durch AB, CD, FF sei das Achsenkreuz in der Hauptlage dargestellt, wobei $CO > OD$ sein soll, wie es der Centralperspektive entspricht. CA und BD geben den sogenannten Distanzpunkt S *)

Fig. 109.



die Horizontale durch S giebt den Horizont der Zeichnung, CD giebt in der Horizontlinie den Augenpunkt P . Um O schlage man mit dem Radius OA den einen Hauptkreis der Kugel und ziehe von P aus an diesen Kreis die Tangenten PG (und PH). Die Summe $CG + GD$ giebt die große Achse der zu zeichnenden Ellipse,

*) Vgl. des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen“, Kap. III.

die mit Hülfe des Halbierungspunktes M von CD leicht als JK zu zeichnen ist. C und D sind die Brennpunkte der Umriss-Ellipse.

Daß die Berührungspunkte G und H der Tangenten maßgebend sind, ergibt sich daraus, daß der Hülfskreis von jedem Horizontalkreise der Kugel so geschnitten wird, daß dessen Tangente im Schnittpunkte nach P hin gerichtet ist. Der zu G gehörige Horizontalkreis hat also mit dem Hülfskreise die gemeinschaftliche Tangente GP und den gemeinschaftlichen Berührungspunkt G . Demnach muß in G die Berührung des Hülfskreises mit der zu konstruierenden Ellipse erfolgen.

Die Zeichnung stellt auch noch die zur Konstruktion nicht nötigen Kreise $ADBC$ und $CFDE$ dar.

73) Für den Fall der schrägen Parallelperspektive fällt M mit O zusammen, und das Lot MN auf der Achse CD schneidet den Hauptkreis im Berührungspunkte G , der jetzt mit N zusammenfällt. Man hat damit sofort die kleinere Halbachse der Ellipse mit den Brennpunkten C und D .