Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

Dritte Abteilung. Sphärische Trigonometrie.

Dritte Abteilung.
Sphärische Trigonometrie.

I. Vorbemerkungen.

1) Die sphärische Trigonometrie beschäftigt sich mit den von größten Kreisen auf der Kugelfläche gebildeten Dreiecken. Es handelt sich darum, in ähnlicher Weise wie in der ebenen Trigonometrie, zwischen den Seiten und den Winkeln und der Fläche Beziehungen aufzustellen, die es ermöglichen, alle Elemente des Dreiecks aus gegebenen Stücken zu berechnen. Einiges davon ist schon in Teil II (Stereometrie Nr. 50 und Anhang 1) zur Sprache gekommen. Auch die Lehre von den dreikantigen Ecken gehört hierher, denn die nach den Ecken eines Kugeldreiecks gezogenen Radien bilden solche Ecken. Die Lehre von der Kongruenz und Symmetrie der Dreikant-Ecken findet hier ihren Abschluß.

Die ebene Trigonometrie muß als besonderer Fall in der sphärischen enthalten sein. Denkt man sich nämlich bei endlichem Radius die sphärischen Dreiecke unendlich klein, so ist ihre Krümmung eine verschwindend kleine. Dasselbe ist der Fall, wenn man sich bei sphärischen Dreiecken von endlicher Größe den Kugelradius unendlich groß denkt. Auf das Ineinanderübergehen der Formeln für Kugel und Ebene soll stets aufmerksam gemacht werden.

Die Ecken der sphärischen Dreiecke mögen stets mit A, B, C, die zugehörigen Winkel mit α, β, γ, die gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet werden.

Dreiecke mit überstumpfen Winkeln ($> 180^0$) und mit Bogen, die größer als $r\pi$ sind, sollen ausgeschlossen werden, denn an ihrer Stelle können konvexe Nebendreiecke behandelt werden, die also den Bedingungen ($< 180^0$ bezw. $< r\pi$) genügen. Im allgemeinen geben nämlich drei größte Kugelkreise acht Dreiecke (vergl. Figur 154 in Teil II), unter denen geeignete aufzufinden sind.

Die Entwickelungen werden besonders einfach, wenn man den Kugelradius $r = 1$ setzt. Aus Gründen der Anschaulichkeit soll dies im Anfange unterlassen werden. Ist es nötig, den zum Radius r gehörigen Bogen von dem zum Radius 1 gehörigen zu unterscheiden, so soll im letzteren Falle statt a, b, c geschrieben werden $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$.

Unter Dreieck soll hier stets ein sphärisches Dreieck verstanden werden.

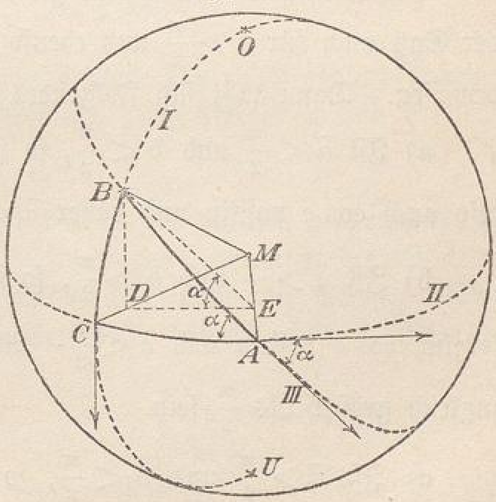
2) Die Figuren machen nur dann einen wirklich körperlichen Eindruck, wenn man die ganze Kugel mitzeichnet.

Da die Kugel bei der senkrechten Projektion stets als Kreis erscheint, bei der Schrägprojektion dagegen als Ellipse, so ist es hier zweckmäßig, von der letzteren Darstellungsweise abzugehen und die erstere zu wählen.

Die größten Kreise der Kugel erscheinen als Ellipsen, die sich dem Grenzkreise der Figur berührend anschmiegen, also nicht derartig auf ihn treffen, daß die Verlängerung den Grenzkreis schneiden würde. Mit Ausnahme der als gerade Linien erscheinenden Kreise, die senkrecht auf den Grenzkreis treffen, bilden sämtliche im Bilde mit dem Grenzkreise den Winkel Null, möge der wirkliche Schnittwinkel so groß sein, wie er wolle. Sollen die Schnittwinkel der Seiten sphärischer Dreiecke sichtbar werden, so hat man den Grenzkreis als Dreiecksseite zu vermeiden.

II. Rechtwinklige sphärische Dreiecke.

Fig. 110.



3) Figur 110 stellt eine Kugel mit drei größten Kreisen dar. Man denke sich Kreis I als Meridian, der durch den obersten Punkt O und den untersten Punkt U geht, den Kreis II als den horizontalen Äquator, so daß der Schnitt bei C einen rechten Winkel giebt. Dagegen habe Kreis III eine beliebige schräge Lage. Dann ist ABC ein sphärisches Dreieck, und zwar ein rechtwinkliges, bei dem man die

Bogen a und b als Katheten, c als Hypotenuse bezeichnen darf. An der Figur ist noch Folgendes zu beachten: B ist senkrecht nach unten auf die Äquatorebene projiziert, was den Punkt D auf dem Radius MC gegeben hat. Außerdem ist von B aus das Lot BE auf den Radius MA gefällt, so daß BED ein senkrecht stehendes rechtwinkliges Dreieck ist, welches den Neigungswinkel α' der Geraden BE gegen die Äquatorialebene enthält. Denselben Neigungswinkel geben aber auch die in A berührenden Tangenten der sich in A schneidenden Kreise an, denn ED und EB sind zu diesen Tangenten parallel, und so ist $\alpha' = \alpha$.

Nach diesen Vorbereitungen sollen die Hauptaufgaben über das rechtwinklige Kugeldreieck gelöst werden. Dabei mögen die Winkel BMC, CMA und AMB als a, b, c bezeichnet, also durch den Bogen gemessen werden.

4) **Aufgabe.** Aus den Katheten a und b die Hypotenuse c zu berechnen.

Auflösung. Es ist

$$\cos c = \cos BME = \frac{ME}{MB} = \frac{MD \cdot \cos DME}{MB} = \frac{MD \cdot \cos b}{MB}$$

$$= \frac{(MB \cdot \cos DMB) \cos b}{MB} = \cos a \cdot \cos b.$$

Also:

1) $$\mathbf{\cos c = \cos a \cdot \cos b}.$$

Bei der Schreibweise $\lg \cos^2 c = \lg \cos^2 a + \lg \cos^2 b$ fällt eine gewisse Analogie mit dem Satze des Pythagoras besser ins Auge. Der Satz ist leicht in Worten auszudrücken.

Bemerkungen. Durch eine geringe Änderung der Figur läßt sich der Satz auch für $\widehat{a} > \frac{\pi}{2}$ und ebenso für $\widehat{a} > \frac{\pi}{2}$ und zugleich $\widehat{b} > \frac{\pi}{2}$ beweisen. Dann läßt sich Folgendes aussprechen:

a) Ist $\widehat{a} < \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{b} < \frac{\pi}{2}$, so sind die beiden Faktoren positiv, also auch $\cos c$ positiv und daher $\widehat{c} < \frac{\pi}{2}$.

b) Ist $\widehat{a} > \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{b} > \frac{\pi}{2}$, so sind die beiden Faktoren negativ, folglich $\cos c$ positiv und $\widehat{c} < \frac{\pi}{2}$. Also können nicht alle drei Bogen zugleich größer als $\frac{\pi}{2}$ sein.

c) Ist $\widehat{a} > \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{b} < \frac{\pi}{2}$, so ist $\cos c$ negativ und $\widehat{c} > \frac{\pi}{2}$.

d) Ist einer der Bogen a und b gleich $\frac{\pi}{2}$, so ist einer der Faktoren Null, folglich auch $\cos c = 0$, d. h. auch $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Das Dreieck ist gleichschenklig und bildet ein halbes Meridianzweieck.

e) Ist $\widehat{a} = \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{b} = \frac{\pi}{2}$, so sind beide Faktoren gleich Null, folglich auch $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Das Dreieck ist gleichseitig und bildet einen Oktanten der Kugel.

Anwendung. Wie groß ist auf der Erdoberfläche die sphärische Entfernung eines Punktes B von a^0 nördlicher Breite von einem Punkte A des Äquators, wenn der Unterschied der geographischen Länge b^0 beträgt?

Auflösung. Aus $\lg \cos a^0 + \lg \cos b^0$ bestimmt man $\lg \cos c^0$, sucht c^0 mit Hülfe der Tafeln auf und multipliziert die Anzahl der Grade mit 15, was die Zahl der Meilen für c giebt. — Handelt es sich um einen Weltkörper vom Radius r, so bestimmt man $\widehat{c}$ aus der Proportion $c^0 : 180^0 = \widehat{c} : \pi$ als $\widehat{c} = \pi \frac{c^0}{180^0}$, so daß der sphärische Abstand als $r\widehat{c} = r\pi \frac{c^0}{180^0}$ gefunden wird.

5) **Aufgabe.** Einen Dreieckswinkel aus der Gegenkathete und der Hypotenuse zu berechnen.

Auflösung. In Figur 110 ist

$$\sin \alpha = \sin \alpha' = \frac{DB}{EB} = \frac{MB \cdot \sin a}{MB \cdot \sin c} = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Also:

$$2) \qquad \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Auch bei dem ebenen rechtwinkligen Dreiecke führen Gegenkathete und Hypotenuse auf den Sinus des Winkels. Für kleines a und c wird auch hier $\sin \alpha = \frac{a}{c}$.

Anwendung. Welche Winkel hat in der vorigen geographischen Aufgabe das sphärische Dreieck? Um wieviel übertrifft die Winkelsumme den Winkel 180^0? (Sphärischer Überschuß oder Exceß.) Wie groß ist demnach die Fläche des Dreiecks? [Vergl. Teil II, Stereometrie Nr. 50:

$$F = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0} O = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{180^0} r^2 \pi$$
$$= (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi) r^2.]$$

6) **Aufgabe.** Einen Dreieckswinkel aus der anliegenden Kathete und der Hypotenuse zu berechnen.

Auflösung. In Figur 110 ist

$$\cos\alpha = \cos\alpha' = \frac{ED}{EB} = \frac{ME \cdot \tan b}{ME \cdot \tan c} = \frac{\tan b}{\tan c}.$$

Also

3) $$\cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c}, \quad \cos\beta = \frac{\tan a}{\tan c}.$$

Der Satz entspricht der Cosinus-Formel für das ebene rechtwinklige Dreieck. Für kleinen Bogen b und c wird auch hier $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

7) **Aufgabe.** Einen Dreieckswinkel aus den beiden Katheten zu berechnen.

Auflösung. Nach 2) und 3) ergiebt sich durch Division

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\tan c}{\tan b} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \frac{1}{\tan b} = \frac{\sin a}{\cos c \tan b}$$

$$= \frac{\sin a}{(\cos a \cos b) \tan b} = \frac{\tan a}{\cos b \tan b} = \frac{\tan a}{\sin b}.$$

Also

4) $$\tan\alpha = \frac{\tan a}{\sin b}, \quad \tan\beta = \frac{\tan b}{\sin a}.$$

Auch in der ebenen Trigonometrie führen die beiden Katheten auf die Tangente des Winkels. Für kleinen Bogen a und b wird auch hier $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

Aufgabe. Die Dreiecksseiten aus den Winkeln zu berechnen.

Auflösung. Aus

$$\cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

(vgl. 3) und 2)) folgt durch Division

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{\tan b}{\tan c} \cdot \frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos a \cos b}{\cos b} = \cos a,$$

also ist zunächst

5) $$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

(Für unendlich kleines a geht die Formel über in $1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ oder $\cos\alpha = \sin\beta$, was der ebenen Trigonometrie entspricht.)

Durch Multiplikation folgt aus beiden Gleichungen

$$\cos c = \cos a \cos b = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \cot\alpha \cot\beta\,.$$

Also:

6) $$\cos c = \cot\alpha \cot\beta\,.$$

(Für unendlich kleines c wird daraus $1 = \cot\alpha \cot\beta$ oder $\tan\alpha = \cot\beta$, was wiederum der ebenen Trigonometrie entspricht.)

8) Um das Gedächtnis zu unterstützen, hat Neper die sechs Grundformeln zu folgenden, aus ihnen leicht abzuleitenden, vereinigt:

$$7)\begin{cases} \cos c = \cot\alpha \cot\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot\beta \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin\alpha \sin c, \\ \cos\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cot c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\beta. \end{cases}$$

Es handelt sich dabei für jeden Cosinus um dieselben Funktionen, und zwar in folgendem Sinne: Man denke sich die Elemente a, b, c, α und β (aber $\gamma = 90^0$ ausgeschlossen) in der naturgemäßen Reihenfolge kreisförmig aufgeschrieben, statt der Katheten a und b aber ihre Supplemente $\frac{\pi}{2} - a$ und $\frac{\pi}{2} - b$ gesetzt. Jeder Cosinus ist dann gleich dem Produkte aus den Cotangenten der beiden anliegenden Stücke, aber auch gleich dem Produkte aus dem Sinus der abgetrennt liegenden Stücke.

Fig. 111.

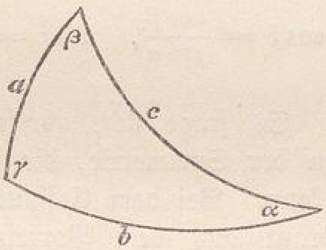
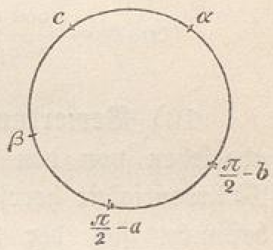


Fig. 112.



9) Mit diesen Grundformeln lassen sich die folgenden Aufgaben lösen.

a) Gegeben a und b; wie groß sind c, α, β und F?

Auflösung.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b; \quad \tan\alpha = \frac{\tan a}{\sin b}, \quad \tan\beta = \frac{\tan b}{\sin a},$$

$$F = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{180^0} r^2 \pi.$$

b) Gegeben a und c; wie groß sind b, α, β und F?

Auflösung.

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}, \quad \sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \cos\beta = \frac{\tan a}{\tan c}, \quad F \text{ wie oben.}$$

c) Gegeben a und β, wie groß sind α, b, c und F?

Auflösung.

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta, \quad \tan b = \sin a \cdot \tan\beta, \quad \tan c = \frac{\tan a}{\cos\beta},$$

F wie oben.

d) Gegeben a und α; wie groß sind β, b, c und F?

Auflösung.

$$\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}, \quad \sin b = \frac{\tan a}{\tan\alpha}, \quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}, \quad F \text{ wie oben.}$$

e) Gegeben c und α, wie groß β, b, a und F?

Auflösung.

$$\cot\beta = \cos c \cdot \tan\alpha, \quad \tan b = \tan c \cdot \cos\alpha, \quad \sin a = \sin c \cdot \sin\alpha.$$

f) Gegeben α und β, gesucht a, b, c und F.

Auflösung.

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}, \quad \cos c = \cot\alpha \cot\beta.$$

10) **Bemerkungen.** Es fragt sich, ob in den Auflösungen, abgesehen von den Fällen der Symmetrie, die keine Kongruenz ist, Mehrdeutigkeit herrschen kann. Bei dem Cosinus und der Tangente bestimmt sich der Quadrant aus dem Vorzeichen, also sind die Lösungen eindeutig, bei denen der Cosinus oder die Tangente der Unbekannten gefunden werden. Dagegen könnten die Sinus der gesuchten Größen sowohl auf den ersten, als auch auf den zweiten Quadranten führen. Nun ist aber nach Formel 4) $\sin a = \frac{\tan b}{\tan\beta}$ und $\sin b = \frac{\tan a}{\tan\alpha}$. Da nun der Sinus in den beiden ersten Quadranten stets positiv ist, so muß $\frac{\tan b}{\tan\beta}$ und ebenso $\frac{\tan a}{\tan\alpha}$ stets positiv sein, d. h. Zähler und Nenner sind beide zugleich positiv und beide zugleich negativ, folglich: Kathete und Gegenwinkel gehören stets demselben Quadranten an. Dies kann auch sofort aus der Figur entnommen werden, indem man bei gegebenem α den Maximalwert von a untersucht, der gleich $r\widehat{\alpha} = r\pi\frac{\alpha^0}{180^0}$ ist. So ist

z. B. in der zweiten Aufgabe die Lösung $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$ eindeutig, weil der Quadrant von α durch den Quadranten von a bestimmt wird.

Nur bei Aufgabe 4, wo Kathete und Gegenwinkel gegeben sind, bleibt die Zweideutigkeit bei allen Stücken bestehen, giebt aber nicht acht Möglichkeiten, sondern nur zwei, weil eben gewisse Quadranten zusammengehören.

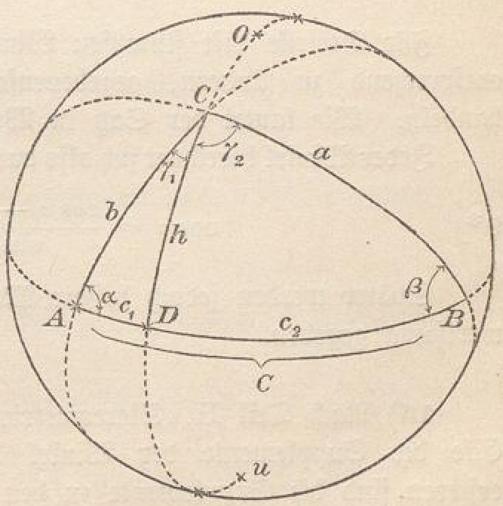
Bei derselben Aufgabe kann auch eine Unmöglichkeit eintreten. Ist nämlich $\sin a > \sin\alpha$ gegeben, so wird $\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha} > 1$, was unmöglich ist. Der Grenzfall $\sin a = \sin\alpha$ führt auf $\sin c = 1$, d. h. auf $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Ist $\widehat{a} = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = 90^0$ gegeben, so ist das Dreieck unbestimmt, nämlich gleich der oberen oder unteren Hälfte eines beliebigen Kugelzweiecks, welches zwischen zwei Meridianen liegt. Soll es bestimmt werden, so muß noch ein drittes Stück gegeben sein.

Mit dem rechtwinkligen Dreiecke sind zugleich die gleichschenkligen erledigt, denn jedes läßt sich durch einen größten Kreis in symmetrische rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

III. Allgemeine sphärische Dreiecke.

11) **Aufgabe.** Das Analogon des Sinus-Satzes der ebenen Geometrie zu finden.

Fig. 113.



Auflösung. In Figur 113 sei ABC das sphärische Dreieck. Man lege durch C einen ebenen Hauptschnitt senkrecht zur Äquatorialebene AB, der den Bogen $\widehat{CD} = h$ senkrecht zu AB giebt. Dann ist nach Formel 2

$$\sin\alpha = \frac{\sin h}{\sin b}, \quad \sin\beta = \frac{\sin h}{\sin a},$$

folglich durch Division

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin a}{\sin b},$$

und allgemeiner

8*) $$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin b : \sin c,$$

d. h. die Sinus der Winkel verhalten sich wie die der gegenüberliegenden Seiten.

Bemerkungen. Die Figur ist nur wenig zu verändern, wenn einer der Winkel α und β stumpf ist. Sind beide stumpf, so untersucht man das Nebendreieck mit spitzen Winkeln. (Für kleine Bogen entsteht die Formel für ebene Dreiecke $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$.)

Aufgabe. Die Seite a aus b, c und α zu berechnen und so das Analogon des Cosinus-Satzes zu finden.

Auflösung 1. Sie befindet sich in Teil II, Anhang 1). Man kann die dortige Figur dadurch darstellen, daß man Tangenten im Gegenpunkte der gesuchten Seite anbringt.

Auflösung 2. In Figur 113 ist nach Formel 1)

$$\cos a = \cos h \cos c_2 = \cos h \cos(c - c_1)$$
$$= \cos h[\cos c \cos c_1 + \sin c \sin c_1] = \cos h \cos c \cos c_1 + \cos h \sin c \sin c_1.$$

Nach Formel 1) ist $\cos h \cos c_1 = \cos b$, und nach Formel 2) $\sin\gamma_1 = \frac{\sin c_1}{\sin b}$, also $\sin c_1 = \sin b \sin\gamma_1$. Beides eingesetzt giebt

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos h \sin c \sin b \sin\gamma_1.$$

Nun ist aber nach Formel 5) $\cos h = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma_1}$, also $\cos h \sin\gamma_1 = \cos\alpha$. Einsetzung giebt

9) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Für Dreiecke mit stumpfen Winkeln bezw. Seiten ist die Figur entsprechend zu ändern, gegebenenfalls sind Nebendreiecke zu behandeln. Wie lautet der Satz in Worten?

Jeder Winkel berechnet sich also aus den Seiten mit Hülfe der Formel

9*) $$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Später werden jedoch bessere Methoden für logarithmische Auswerthung gegeben.

13) Nach Teil II, Stereometrie Nr. 15 sind die Seiten jeder Ecke die Supplemente der Winkel der Polarecke, die Winkel der ersteren sind die Supplemente zu den Seiten der letzteren. Aus den

Formeln für die Winkel lassen sich demnach sofort Formeln für die Seiten ableiten. So kann z. B., wenn die Seiten des Polardreiecks a_1, b_1, c_1, die Winkel α_1, β_1, γ_1 genannt werden, Formel 9 in folgender Form geschrieben werden:

$$\cos(2\pi - \alpha_1) = \cos(2\pi - \beta_1)\cos(2\pi - \gamma_1) + \sin(2\pi - \beta_1)\sin(2\pi - \gamma_1)\cos(2\pi - a_1),$$

oder

$$-\cos\alpha_1 = (-\cos\beta_1)(-\cos\gamma_1) + \sin\beta_1\sin\gamma_1(-\cos a_1).$$

Folglich gilt ganz allgemein die Formel

10) $$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

10*) $$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

So hat man in 9*) den Cosinussatz zur Berechnung des Winkels, und in 10*) den Cosinussatz zur Berechnung der Seite.

14) Mit Hülfe dieser Formeln könnte man jedes sphärische Dreieck aus drei Stücken berechnen, wenn sie nicht unbequem zur logarithmischen Auswertung wären. Außerdem würde, wenn man z. B. aus a, b und α den Winkel β berechnet hat, für c die Formel $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$ anzuwenden sein, die c in zwei verschiedenen Funktionen enthält, so daß z. B. statt $\cos c$ geschrieben werden müßte $\sqrt{1 - \sin^2 c}$. Dies ist zu unbequem.

Eine bessere Formel zur Berechnung von c ergiebt sich folgendermaßen. Aus dem Cosinussatze folgen die Gleichungen

$$\cos a - \cos b\cos c = \sin b\sin c\cos\alpha,$$
$$\cos b - \cos c\cos a = \sin c\sin a\cos\beta,$$

folglich durch Addition

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c(\sin b\cos\alpha + \sin a\cos\beta)$$

oder nach bekannten Formeln

$$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\cdot 2\sin^2\frac{c}{2} = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}(\sin b\cos\alpha + \sin a\cos\beta),$$

oder nach beiderseitiger Division durch $2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$:

$$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\tan\frac{c}{2} = \sin b\cos\alpha + \sin a\cos\beta.$$

Schon diese Formel würde ausreichen. Sie wird aber logarithmisch bequemer, wenn man nach dem Sinussatze $\sin b$ durch $\frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}$ ersetzt. Dies giebt

$$\begin{aligned} 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\tan\frac{c}{2} &= \frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha + \sin a\cos\beta \\ &= \frac{\sin a}{\sin\alpha}[\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha] \\ &= \frac{\sin a}{\sin\alpha}\sin(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Daraus folgt die brauchbarere Formel

11) $$\tan\frac{c}{2} = \frac{\sin a}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}.$$

Ganz ebenso folgt aus dem Cosinussatze zur Berechnung der Seiten

11*) $$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sin a}\cdot\frac{\sin(a+b)}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

was sich auch nach obiger Methode mit Hülfe des Polardreiecks sofort aus 11) ableiten läßt. Aus diesen Formeln läßt sich auch das Analogon des Tangentensatzes der ebenen Trigonometrie ableiten, was jedoch später auf andere Art geschehen soll.

Vorläufig handelt es sich nur darum, zu zeigen, daß *schon jetzt* für *sämtliche Hauptfälle* die *Berechnung von sphärischen Dreiecken ermöglicht* ist, wenn auch nicht auf geschicktem Wege. Außerdem kann jetzt die wichtige Frage zur Erledigung kommen, unter welchen Bedingungen die zu lösenden Aufgaben keine, eine oder zwei Lösungen zulassen. Damit wird für Schulen, die der sphärischen Trigonometrie nur wenig Zeit widmen können, ein vorläufiger Abschluß erreicht.*)

IV. Übungsaufgaben für die vorläufige Berechnungsmethode.

15) a) Gegeben a, b, c, gesucht die Winkel α, β, γ.

Auflösung. $\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b \sin c}$ und die daraus durch cyklische Vertauschung entstehenden Formeln.

Beispiel. Aus $a = 50^0$, $b = 110^0\,9'$, $c = 78^0\,12'$ folgt $\alpha = 39^0\,1'\,50''$, $\beta = 50^0\,30'\,24''$, $\gamma = 53^0\,34'\,26''$.

*) Das Realgymnasium z. B. kann hier abbrechen.

Aus dem sphärischen Überschuß ist die Fläche als

$$F = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0}\right)\pi$$

für den Radius 1 zu berechnen, für r ist dies mit r^2 zu multiplizieren.

b) Gegeben α, β, γ, gesucht a, b, c.

Auflösung. $\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$ und die cyklisch dazu gehörigen Formeln.

Beispiel. Aus $\alpha = 75^0\,58'$, $\beta = 82^0\,10'$, $\gamma = 50^0\,36'$ folgt $a = 64^0\,7'\,52''$ u. s. w.

c) Gegeben a, b und der Gegenwinkel β.

Auflösung. $\sin\alpha = \frac{\sin a\cdot\sin\beta}{\sin b}$ was zweideutig ist, $\tan\frac{c}{2} = \frac{\sin a}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\frac{\alpha+b}{2}\cos\frac{\alpha-b}{2}}$, γ mit Sinus- oder Cosinus-Satz zu finden.

Beispiel. $a = 39^0\,29'$, $b = 66^0\,45'$, $\beta = 43^0\,20'$ giebt

$\alpha = 28^0\,21'\,14''$ oder $\alpha_1 = 151^0\,38'\,46''$

$c = 94^0\,54'\,36''$ oder $c_1 = 33^0\,2'\,42''$

$\gamma = 48^0\,5'\,9''$ oder $\gamma_1 = 24^0\,2'\,3''$.

d) Gegeben a, b und der eingeschlossene Winkel γ.

Auflösung. $\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\sin\gamma$. Das Übrige mit Sinus- oder Cosinus-Satz.

Beispiel. $a = 73^0\,25'$, $b = 52^0\,42'$, $\gamma = 63^0\,15'$ giebt

$c = 58^0\,59'\,22''$, $\alpha = 93^0\,4'\,48''$, $\beta = 55^0\,12'\,2''$.

e) Gegeben b, der anliegende Winkel γ und der gegenüberliegende Winkel β.

Auflösung. $\sin c = \frac{\sin b\sin\gamma}{\sin\beta}$, $\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin b}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}$.

Beispiel. $b = 80^0\,24'$, $\beta = 70^0\,29'$, $\gamma = 66^0\,45'$.

Auflösung. $c = 73^0\,58'\,35''$, $a = 63^0\,53'\,20''$, $\alpha = 59^0\,8'\,3''$.

f) Gegeben b und die anliegenden Winkel α und γ.

Auflösung. $\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b$ u. s. w.

Beispiel. $b = 66^0\,45'$, $\gamma = 43^0\,20'$, $\alpha = 79^0\,9'$ giebt

$\beta = 82^0\,34'\,44''$, $c = 39^0\,28'\,56''$, $a = 65^0\,30'\,14''$.

V. Konstruktion, Kongruenz und Möglichkeit sphärischer Dreiecke bei drei gegebenen Stücken.*)

16) Der geometrische Ort aller Punkte der Kugeloberfläche, die von einem gegebenen Punkte derselben gleiche sphärische Entfernung haben, ist ein Kreis. Die Projektion des gegebenen Punktes auf die Ebene dieses Kreises fällt in dessen Mittelpunkt.

Da zu gleichen Bogen größter Kreise auf der Kugel auch gleiche Sehnen gehören, so kann man mit dem Zirkel auf der Kugeloberfläche genau ebenso Kreiskonstruktionen ausführen, wie auf der Ebene.

Wendet man die senkrechte Projektion an, so erscheinen sämtliche ebenen Schnitte, die senkrecht auf der Ebene der Zeichnung stehen, als gerade Linien. Davon soll bisweilen Gebrauch gemacht werden, um die Zeichnungen zu vereinfachen. Ebene Schnitte durch das Centrum geben größte Kreise. Diese vertreten bei den Konstruktionen gewissermaßen die Stelle der geraden Linie.

Ist die Konstruktion eines sphärischen Dreiecks eindeutig, so ist zugleich ein Kongruenzsatz für solche Dreiecke gefunden, damit aber zugleich ein Kongruenzsatz für Dreikant-Ecken, deren Theorie erst hier endgültig zum Austrage kommt.

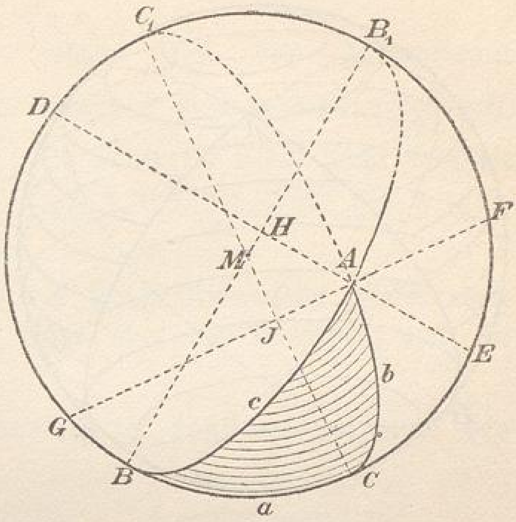
Zu den Fällen der Eindeutigkeit sollen auch diejenigen gerechnet werden, bei denen noch ein zweites, zum vorigen symmetrisches Dreieck möglich ist. Es findet nämlich dann (sowohl im konstruktiven, als auch im rechnerischen Sinne) Übereinstimmung in allen homologen Stücken statt, obwohl die Dreiecke nicht zur Deckung gebracht werden können. Man erkennt dies am besten, indem man ein auf eine Kugel gezeichnetes Dreieck mit einem Punkte seiner Fläche an einen Spiegel hält. Das Spiegelbild hat dann mit dem Dreieck die der Deckung entsprechende Lage, beide treffen sich aber nur in einem Punkte. Im Übrigen sind sie „von einander weggekrümmt". Auch kann jede Zeichnung in zweifachem Sinne aufgefaßt werden, da man sie als konkav oder konvex betrachten darf.

17) **Aufgabe.** Auf der Kugelfläche mit Radius 1 soll ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruiert werden.

Auflösung. In Figur 114 stelle der um M geschlagene Kreis die Kugel dar. $\widehat{BC} = a$, $\widehat{BD} = c$ und $\widehat{CF} = c$ seien die gegebenen Bogen. Man ziehe die Durchmesser BB_1 und CC_1 und fälle auf sie von D bezw.

*) Dieses Kapitel kann im Unterrichte überschlagen oder auch an den Schluß gestellt werden.

Fig. 114.

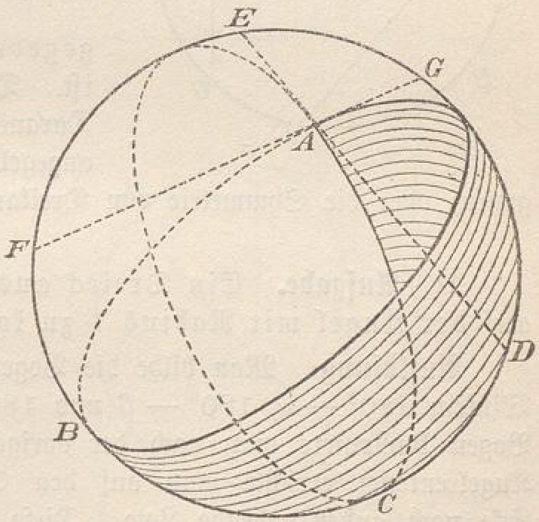


F aus die Lote DE und FG. Diese stellen die Kreisschnitte dar, deren sämtliche Umrißpunkte von B bezw. C die sphärische Entfernung c bezw. b haben. Ist A der Schnittpunkt beider Lote, so ist der dritte Eckpunkt A des Dreiecks ABC gefunden.

Seine Seiten $AB = c$ und $CA = b$ erscheinen als Ellipsenbogen. Der eine wird mit Hülfe des konstanten Verhältnisses $HA : HE$, der andere mit Hülfe des Verhältnisses $JA : JF$ konstruiert. Auf der Rückseite der Kugel befindet sich das zugehörige symmetrische Dreieck. Beide Zeichnungen decken sich. Damit ist die Aufgabe erledigt.

Bemerkung. Figur 115 stellt den Fall dar, wo $b > \pi$ und $c < \pi$ ist, so daß die Konstruktion auf die Rückseite der Kugel übergreift. Dabei wird der Winkel $BCA = \gamma$ ein überstumpfer.

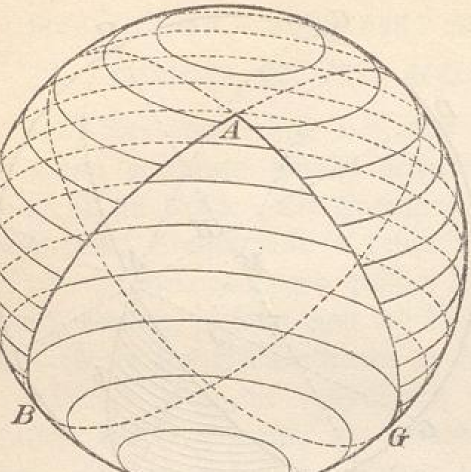
Fig. 115.



Figur 116 auf folgender Seite stellt den Fall dar, wo sowohl b als auch c größer als π ist. Dabei sind β und γ überstumpfe Winkel. Die Konstruktion, auf die Rückseite der Kugel verlegt, umfaßt die ganze Rückseite und greift auf die Vorderseite über, was durch Schraffierung der konkaven und konvexen Flächen angedeutet wird. Solche Fälle mit überstumpfen Bogen und Winkeln sollen jedoch ausgeschlossen werden. Das Übergreifen über die Halbkugelfläche soll also nicht gestattet sein.

Die erste Bedingung für die Möglichkeit des Dreiecks ist dann $a + b + c \leq 2\pi$. Im Grenzfalle nimmt das Dreieck die Halb-

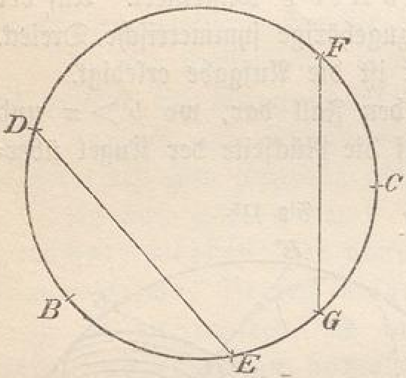
Fig. 116.



kugelfläche vollständig ein und hat die Winkel $\alpha = 180^0$, $\beta = 180^0$, $\gamma = 180^0$, also die Winkelsumme 540^0. Die drei Seiten bilden einen größten Kreis.

Eine zweite Bedingung ist aber $b + c > a$, wo a die größte Seite ist. Denn $\widehat{BC}$ ist die kürzeste sphärische Entfernung zwischen B und C, so daß im Falle $b + c < a$ die Hülfskreise FG und DE keinen Schnitt A geben können. Vergleiche Figur 117. Also:

Fig. 117.



Sieht man von den Grenzfällen ab, so sind bei konvexen Ecken die Bedingungen für die Möglichkeit eines Dreiecks aus a, b, c durch

$$a + b + c < 2\pi \quad \text{und} \quad b + c > a$$

gegeben, wo a die größte Seite ist. Die Konstruktion ist eindeutig. Daraus folgt einer der in Teil II angegebenen Sätze über die Kongruenz oder die Symmetrie von Dreikant-Ecken.

18) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den Winkeln α, β und γ auf der Kugel mit Radius 1 zu konstruieren.

Auflösung. Man bilde die Bogen a_1, b_1 und c_1, die zu den Winkeln $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$ und $180^0 - \gamma$ gehören. Aus diesen Bogen konstruiere man nach der vorigen Methode ein Dreieck. Im Kugelcentrum errichte man auf den Seitenflächen der zugehörigen Ecke nach außen gehende Lote. Diese geben die Eckpunkte des gesuchten Kugeldreiecks. Mit Hülfe der durch je zwei Eckpunkte gelegten Hauptschnitte wird die Konstruktion vollendet.

Nach voriger Untersuchung ist sie für konvexe Dreiecke nur möglich unter den Bedingungen $(180^0 - \alpha) + (180^0 - \beta) + (180^0 - \gamma) < 2 \cdot 180^0$ oder $\alpha + \beta + \gamma > 180^0$ und $(180^0 - \beta)$

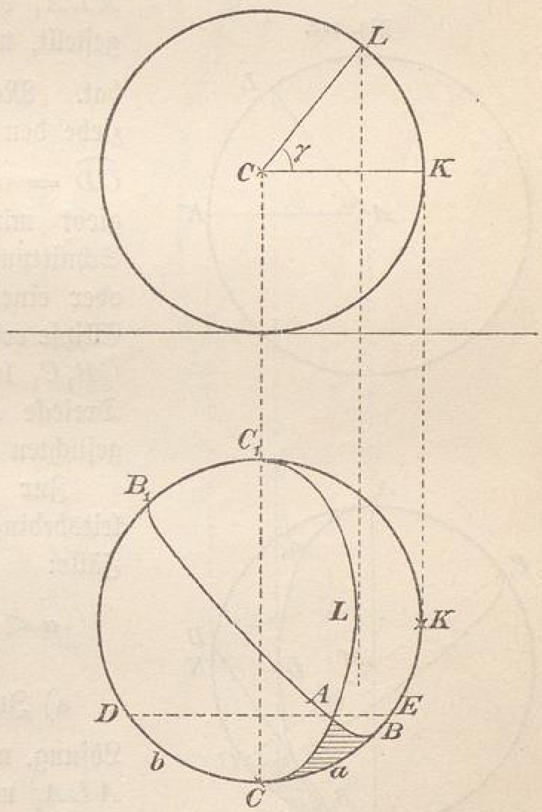
$+ (180^0 - \gamma) > 180^0 - \alpha$, wo $(\pi - \alpha)$ der größte der drei Bogen, also α der kleinste Winkel ist, also $\alpha + \beta + \gamma < 540^0$.

Dieselben Bedingungen folgen aus der Flächenformel $F = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0} \pi$. Da nämlich F nicht negativ werden darf, muß $\alpha + \beta + \gamma > 180^0$ sein. Da ferner die Fläche nicht über die Halbkugelfläche übergreifen soll, muß $\frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0} \pi < 2 \cdot 1^2 \pi$ sein, d. h. $\alpha + \beta + \gamma < 540^0$.

Aus der Eindeutigkeit der Konstruktion folgt wieder einer der in Teil II angegebenen Sätze über die Kongruenz und die Symmetrie von Dreikant-Ecken.

19) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ.

Fig. 118.



Auflösung. In der Aufrißfigur werde CK horizontal gezogen und $\sphericalangle KCL = \gamma$ gemacht. Die zugehörige Grundrißfigur giebt das zum Winkel γ gehörige Kugelzweieck mit den Bogen CKC_1 und CLC_1. Macht man nun $\widehat{CD} = b$, so giebt das Lot DE zu CC_1 den Kreis, dessen Punkte sämtlich von C die sphärische Entfernung b haben. Der Schnittpunkt A giebt auf dem Bogen CLC_1 die sphärische Seite $\widehat{AC} = b$. Macht man nun $\widehat{CB} = a$, so ist leicht die Grenzellipse BAB_1 zu konstruieren, die einen größten Kreis darstellt.

Die Aufgabe ist für konvexe Ecken stets möglich, sobald $\beta < 180^0$, $a < \pi$, $b < \pi$ ist.

Die Konstruktion ist im obigen Sinne eindeutig, giebt also wieder einen der genannten Kongruenzsätze.

20) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus a, β und γ zu konstruieren.

Auflösung. Man bilde die Bogen b_1 und c_1 zu $180^0 - \beta$ und $180^0 - \gamma$ und den Winkel α_1 zum Bogen $\pi - a_1$, dann läßt sich ein Dreieck aus b_1, c_1 und α_1 nach voriger Methode konstruieren. Das zugehörige Polardreieck ist das gesuchte.

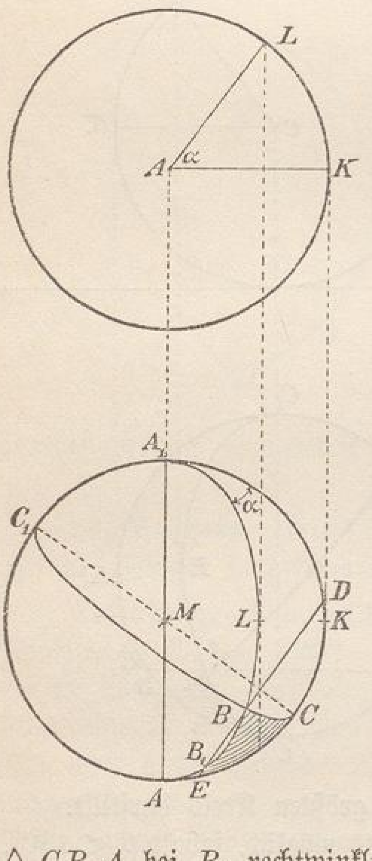
Die Bedingungen sind nach der vorigen Untersuchung $a < \pi$, $\beta < 180^0$, $\gamma < 180^0$.

Die Konstruktion ist eindeutig und giebt ebenfalls einen Satz über Kongruenz und Symmetrie für Dreikant-Ecken.

21) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus a, b und dem (nicht eingeschlossenen) Winkel α.

In Figur 119 ist wieder in der Aufrißfigur $\sphericalangle KAL = \alpha$ gemacht. Daraus ist die Grundrißfigur mit dem von AKA_1 und ALA_1 begrenzten Kugelzweieck hergestellt, welches den richtigen Winkel α hat. Man mache ferner $\widehat{AC} = b$, ziehe den Durchmesser CC_1 und mache $\widehat{CD} = a$. Das Lot DE zu CC_1 giebt mit dem Bogen ALA_1 zwei Schnittpunkte B und B_1 (oder keinen, oder einen). Zu jedem kann der als Ellipse erscheinende Bogen CBC_1 bezw. CB_1C_1 leicht konstruiert werden. Die Dreiecke ABC und AB_1C sind die gesuchten beiden Dreiecke.

Fig. 119.



Zur Untersuchung der Möglichkeitsbedingungen unterscheide man drei Fälle:

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha > \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

a) Im Falle $\alpha < \frac{\pi}{2}$ giebt es keine Lösung, wenn das Lot DE den Bogen ALA_1 nicht trifft.

Im Grenzfalle ist DE Tangente. Ist B_2 ihr Berührungspunkt, so ist $\triangle CB_2A$ bei B_2 rechtwinklig. Nach dem Sinussatze ist dann

$$\sin a = \sin b \sin \alpha.$$

Bei $\sin a < \sin b \sin \alpha$ giebt es also keine Lösung.

[Die Bedingung läßt sich auch schreiben

$$1 < \frac{\sin b \, \sin \alpha}{\sin a},$$

oder nach dem Sinussatze $1 < \sin \beta$; darin liegt die Unmöglichkeit.]

Trifft DE nach A, d. h. ist $a = b$, so ist das eine Dreieck gleichschenklig, das andere hat die Fläche Null.

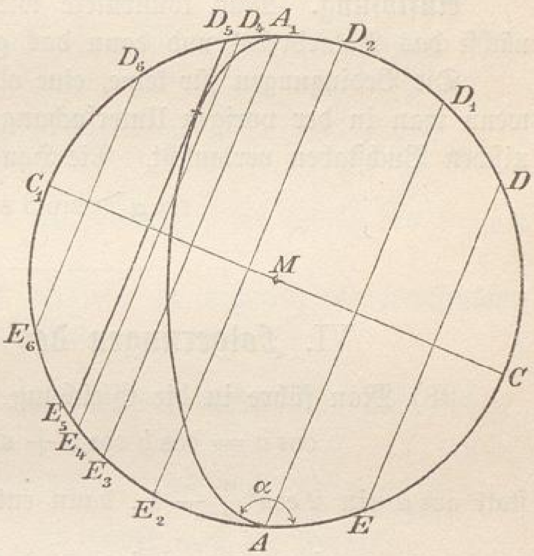
Ist aber

$$\mathbf{\sin b > \sin a > \sin b \sin \alpha,}$$

so sind zwei Dreiecke möglich.

Ist $a > b$ und $< [CA_1 = \pi - b]$, so ist eine Lösung möglich. Ist $a = \pi - b$, so ist das Kugelzweieck zwischen AKA_1 und ALA_1 identisch mit dem Dreiecke.

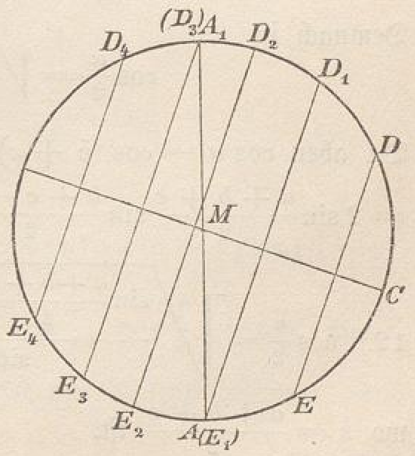
Fig. 120.



Bei $a > \pi - b$ würde das Dreieck auf die Rückseite der Kugelfläche übergreifen und Seite $c > \pi$ werden, was ausgeschlossen bleiben sollte.

b) Im Falle $\alpha > \frac{\pi}{2}$ findet, wie leicht zu zeigen, Folgendes statt: DE giebt keine Lösung, Grenzfall $D_1 A$ giebt eine Lösung mit Fläche Null. Hier handelt es sich um $a < b$ bezw. $a = b$.

Fig. 121.



$D_2 E_2$ giebt eine Lösung, $A_1 E_3$ zwei Lösungen, jedoch die eine mit Fläche Null. Hier handelt es sich um $a < \pi - b$ bezw. $a = \pi - b$.

$D_4 E_4$ giebt zwei Lösungen, Tangente $D_5 E_5$ nur eine, der letzte Fall giebt ein rechtwinkliges Dreieck. Es handelt sich also wieder um die Bedingungsgleichung

$$\sin a = \sin b \sin \alpha,$$

vorher um

$$\sin b > \sin a > \sin b \sin \alpha.$$

Keine Lösung hat man bei $\sin\alpha < \sin b \sin\alpha$.

c) Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ giebt es, wie die Figur zeigt, keine Lösung bei $a < b$ und $a > \pi - b$, dagegen eine Lösung bei

$$b < a < \pi - b.$$

Im Grenzfalle ist jedesmal die Fläche des Dreiecks gleich Null.

Man kann sich sämtliche Resultate in Tabellenform zusammenstellen und den entsprechenden Kongruenz- bezw. Symmetriesatz für Dreikant-Ecken unter Hinweis auf die Tabelle aussprechen. Des komplizierten Charakters halber wurde der Satz in Teil II übergangen.

22) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus α, β und a.

Auflösung. Man konstruiere wie in den früheren Fällen zunächst das Polardreieck und dann das gesuchte.

Die Bedingungen für keine, eine oder zwei Lösungen erhält man, wenn man in der vorigen Untersuchung die griechischen mit den lateinischen Buchstaben vertauscht. Die Hauptgrenzbedingung wird wieder

$$\sin\alpha \geqq \sin\beta \sin a.$$

VI. Folgerungen des Cosinussatzes.

28) Man führe in die Gleichung 9)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

statt $\cos\alpha$ ein $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, dann entsteht rechts

$$\cos b \cos c - \sin b \sin c + 2 \sin b \sin c \cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= \cos(b + c) + 2 \sin b \sin c \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Demnach ist

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b + c)}{2 \sin b \sin c}}.$$

Da aber $\cos a - \cos(b + c) = -2\sin\frac{a + b + c}{2}\sin\frac{a - b - c}{2}$ $= 2\sin\frac{a + b + c}{2}\sin\frac{b + c - a}{2}$ ist, so folgt

$$12)\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}}{\sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s - a)}{\sin b \sin c}},$$

wo $s = \frac{a + b + c}{2}$ ist.

24) Führt man ebenso in 9) statt $\cos\frac{\alpha}{2}$ ein $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, so folgt in derselben Weise

$$13)\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a-b+c}{2}\,\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b\,\sin c}} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\,\sin c}}.$$

Durch Division folgt aus 13) und 14) noch

$$14)\qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-a)}}.$$

Durch Multiplikation dagegen erhält man unter beiderseitiger Verdoppelung

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin b\,\sin c}\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-a)\,\sin(s-b)\,\sin(s-c)},$$

folglich

$$15)\quad \sin\alpha = \frac{2}{\sin b\,\sin c}\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-a)\,\sin(s-b)\,\sin(s-c)}.$$

Mit Hülfe von 14) findet man am bequemsten die Winkel des Dreiecks aus den Seiten.

Sämtliche Wurzeln sind positiv zu nehmen, da überstumpfe Winkel ausgeschlossen werden sollten.

25) Macht man dieselben Betrachtungen für den anderen Cosinus-Satz

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

und setzt man $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \sigma$, so findet man die Formeln

$$16)\quad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\,\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\,\sin\gamma}},$$

$$17)\quad \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\,\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\,\sin\gamma}},$$

$$18)\quad \tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\,\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\,\cos(\sigma-\gamma)}},$$

$$19)\quad \sin a = \frac{2}{\sin\beta\,\sin\gamma}\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}.$$

26) Aus den Gleichungen für $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$ erhält man durch entsprechende Multiplikationen neue. So ist z. B.

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}$$
$$= \frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Die letzte Wurzel ist aber gleich $\sin\frac{\gamma}{2}$, also bestehen folgende von der Irrationalität befreiten Gleichungen:

$$20)\quad \begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}, & \text{und ebenso} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Je zwei derselben lassen sich nun so vereinigen, daß links die Funktion einer Winkelsumme oder Differenz entsteht. Man erhält z. B.

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cos\frac{s+s-c}{2}\sin\frac{s-s+c}{2}}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$
$$= \frac{2\cos\frac{(2s-c)}{2}\sin\frac{c}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2},$$

oder endlich, da $2s - c = a + b$ ist:

$$21)\quad \begin{cases} \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}, & \text{und ebenso} \\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

27) Diese von Mollweide aufgestellten, aber wegen der Gleichzeitigkeit der Veröffentlichung auch nach Gauß und Delambre genannten Formeln werden übersichtlicher, wenn man auf die eine Seite nur die Seiten, auf die andere nur die Winkel bringt, also:

$$
21^*)\quad \begin{cases}
\dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}, & \dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}, \\[2ex]
\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}, & \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.
\end{cases}
$$

Man braucht nur die erste zu merken. Jede folgende nämlich entsteht dadurch, daß man in der letzten auf der einen Seite + in — verwandelt, auf der andern aber Cosinus und Sinus mit einander vertauscht.

Versucht man in die erste der Formeln die Polarsupplemente in ähnlicher Weise einzusetzen, wie vorher, also

$$
\frac{\cos\frac{\pi-\alpha_1+\pi-\beta_1}{2}}{\cos\frac{\pi-\gamma_1}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi-a_1+\pi-b_1}{2}}{\sin\frac{\pi-c_1}{2}},
$$

so ergiebt sich die Umformung, daß man auf die Anfangsformel zurückkommt. Daraus läßt sich schließen, daß in allen zur Ableitung benutzten und in den aus 20) abzuleitenden Formeln Seiten und Winkel vertauscht werden können, wobei nur auf die Vorzeichen geachtet werden muß.

28) Durch Division erhält man aus je zwei dieser Formeln die sogenannten Neperschen Analogien, nämlich:

$$
22)\quad \begin{cases}
\dfrac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, & \dfrac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}, \\[2ex]
\dfrac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}, & \dfrac{\tan\frac{a-b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.
\end{cases}
$$

Diese haben erstens den Vorzug nur 5 statt 6 Stücke zu enthalten; ferner erhält man durch Division aus je zwei zusammenstehenden das Analogon des Tangentensatzes, nämlich:

$$23)\qquad \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{a-b}{2}},$$

so daß für unendlich kleine Bogen die Übereinstimmung mit der Formel der ebenen Trigonometrie wieder hergestellt ist.

29) Aus den beiden ersten Gaußschen Formeln 21*) folgt durch Addition

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Schafft man den Faktor 2 nach rechts, so folgt

$$24)\qquad \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\gamma}.$$

Ebenso folgt durch Subtraktion

$$25)\qquad \frac{-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}{\sin\gamma}.$$

Nun ist der sphärische Exceß des Dreiecks

$$E=\alpha+\beta+\gamma-180^0,$$

also

$$\frac{E}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-90^0,$$

folglich nach 25)

$$\sin\frac{E}{2}=-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\gamma.$$

Bei Radius 1 ist die Dreiecksfläche $F=(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}-\pi)=E$, also ist dann

26) $$\sin\frac{F}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Dies ist bei Radius r noch mit r^2 zu multiplizieren.

Ebenso giebt Gleichung 24)

$$\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = \cos\left[\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right] = \cos\left[\frac{F}{2}-\gamma-90^0\right]$$
$$= \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\gamma,$$

oder

26*) $$-\sin\left[\frac{F}{2}-\gamma\right] = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}},$$

Radius 1 vorausgesetzt, also

$$-\sin\frac{F}{2}\cos\gamma + \cos\frac{F}{2}\sin\gamma = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Durch Division und Umformung folgt aus 26) und der letzten Gleichung eine neue, die sich umwandeln läßt in

27) $$\cot\frac{F}{2} = \frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

30) Von L'Huilier rührt folgende Entwickelung für die Flächenberechnung her:

Aus der Gaußschen Gleichung

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}-90^0\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = -\frac{\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

folgt, wenn beiderseits 1 abgezogen wird,

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} - 1 = -\frac{\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} - 1$$

oder

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = -\frac{\sin\left(\frac{F}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$-\frac{2\sin\frac{a+b+c}{4}\sin\frac{a+b-c}{4}}{\cos\frac{c}{2}} = -\frac{2\sin\frac{F}{4}\cos\left(\frac{F}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder

28) $$\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{F}{4}\cos\left(\frac{F}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Ebenso folgt aus der zweiten Gaußschen Gleichung

$$\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{F}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

auf demselben Wege

28*) $$\frac{\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = -\frac{\sin\frac{F}{4}\sin\left(\frac{F}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Durch Multiplikation und Umformung folgt aus den beiden Gleichungen 28) unter Berücksichtigung von 26*)

29) $$\sin\frac{F}{4} = \sqrt{\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\sin\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}.$$

Hätte man oben beiderseits 1 addiert, statt es zu subtrahieren, so hätte sich ergeben

29*) $$\cos\frac{F}{4} = \sqrt{\frac{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}.$$

Durch Division erhält man schließlich

30) $$\tan\frac{F}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}.$$

Für sehr kleine Bogen und entsprechend kleines F gehen 29) und 30) in die Heronische Dreiecksformel über.

VII. Vereinfachte Berechnungsmethoden.

31) a. Gegeben die drei Seiten.

Auflösung. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$,

dazu die Formeln für $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ mit Hülfe cyklischer Vertauschung.

b. Gegeben die drei Winkel.

Auflösung. $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}$

und die durch cyklische Vertauschung entstehenden Formeln.

c. Gegeben a, b, γ.

Auflösung. $$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2},$$

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2},$$

daraus α und β zu berechnen, sodann Sinussatz anzuwenden.

d. Gegeben α, β und c.

Auflösung. $$\tan\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2},$$

$$\tan\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2}.$$

e. Gegeben a, b, α.

Auflösung. $$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha,$$

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a+b}{2},$$

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

f. Gegeben a, α, β.

Auflösung. $\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$,

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\tan\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a+b}{2}.$$

VIII. Bemerkungen und Andeutungen über die sphärische Reciprocität.

[32) Betrachtet man einen größten Kugelkreis als Äquator, so gehört zu ihm nach jeder Seite ein Pol, und umgekehrt gehört zu jedem Pole ein Äquator, d. h. ein größter Kreis. Jeder Punktfigur entspricht also eine von größten Kreisen gebildete Polarfigur. Jede Kurve auf der Kugelfläche kann als eine Folge von Punkten angesehen werden; ihr entspricht eine Folge von größten Kreisen, die eine andere Kurve umhüllen oder ausschattieren. Letztere heißt die Polarkurve der ersteren.

Ähnlich, wie bei der Lehre von Pol und Polare kann man zu jedem Satze der Kugelgeometrie den entsprechenden Polarsatz finden. Einem durch zwei Punkte begrenzten Bogen eines größten Kreises entspricht stets ein Punkt, in dem sich zwei größte Kreise schneiden. Hat der Bogen die Länge a, so schneiden sich die Kreise so, daß $\pi - \alpha_1 = a$ oder $\alpha_1 = \pi - a$ ist. Jedem begrenzten Bogen a eines größten Kreises entspricht also ein Winkel $\alpha_1 = \pi - a$.

Dem Umfange $u = a + b + c$ des Dreiecks entspricht eine Winkelsumme $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = (\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) = 3\pi - (a + b + c) = 3\pi - u$. Zugleich ist $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = E_1 + \pi$, wo E_1 den sphärischen Exceß bedeutet. Daraus folgt $3\pi - u = E_1 + \pi$, oder $E_1 = 2\pi - u$. Bleibt der Dreiecksumfang um e unter 2π, so ist $u = 2\pi - e$, folglich $E_1 = e$. Man kann also sagen: Der sphärische „Mangel" eines Dreiecks ist gleich dem sphärischen Überschuß (Exceß) des Polardreiecks. Gewöhnlich wird der Satz so ausgedrückt, daß E_1 und u sich zu 360^0 ergänzen.

Den Punkten eines Kreises, der mit der sphärischen Länge a (als Radius) um einen Kugelpunkt geschlagen ist, entspricht eine Folge größter Kreise, die den Äquator des Punktes d. h. den „Polarkreis" (nicht im geographischen Sinne zu verstehen!) unter konstantem Winkel schneiden. Diese Kreise schattieren einen Parallelkreis des Äquators aus. Folglich: Die Polarkurve eines Kreises ist stets ein Kreis. Ist der Radius des ersteren gleich a, so ist der andere um $\bar{a} = \pi - a$ vom Äquator entfernt. Concentrischen Kreisen entsprechen also concentrische Kreise.

Dem umbeschriebenen Kreise eines Dreiecks entspricht der einbeschriebene des Polardreiecks. Nun geben aber drei größte Kreise im ganzen acht Kugeldreiecke, so daß acht Berührungskreise vorhanden sind. Ist nun zum Dreiecke aus a, b und c das Polardreieck A, B, C und dessen Gegendreieck (Antipodenpunkte!) $A_1 B_1 C_1$, so entsprechen den acht Berührungskreisen, von denen je zwei Antipodenkreise sind, acht umbeschriebene Kreise ABC, A_1BC, AB_1C, ABC_1, AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, $A_1B_1C_1$, von denen ebenfalls je zwei Antipodenkreise sind. Den Eigenschaften des einen Dreiecks und seiner Kreise entsprechen die polaren oder reciproken Eigenschaften des Polardreiecks und seiner Kreise.

Durch stereographische Projektion zweier solcher Gebilde erhält man zwei Kreisgebilde in der Ebene, die ebenfalls in Polarbeziehungen zu einander stehen. Darin liegt eine wahre Fundgrube für neu auszusprechende Sätze der Elementargeometrie.

Um von dem weittragenden Charakter dieser Dinge eine Anschauung zu geben, sei nur die Kurve konstanter sphärischer Fadensumme erwähnt, d. h. die sphärische Ellipse. Ist die sphärische Entfernung der Brennpunkte gleich $2e$ und die konstante Fadensumme gleich $2k$, so ist die Kurve durch die Gleichung $v_1 + v_2 = 2k$ vollkommen bestimmt. Jedes der Dreiecke über $2e$ mit konstanter Fadensumme hat konstanten Umfang. Bei der Polarkurve handelt es sich um einen festen Winkel ε, der sich aus $\pi - \varepsilon = 2e$, oder $\varepsilon = \pi - 2e$ bestimmt. Den Ellipsenpunkten entsprechen in der Polarfigur größte Kreise, welche die Schenkel des festen Winkels unter Winkeln φ_1 und φ_2 schneiden, aber so, daß $(\pi - \varphi_1) + (\pi - \varphi_2) = 2k$ sein muß, oder $\varphi_1 + \varphi_2 = 2(\pi - k)$. Jedes der abgeschnittenen Dreiecke hat also die konstante Winkelsumme $\varphi_1 + \varphi_2 + \varepsilon = 2(\pi - k) + \varepsilon$, folglich konstanten Inhalt. Dies entspricht ganz der Eigenschaft der Hyperbel, daß alle Tangentendreiecke konstanten Inhalt haben. (Vgl. Teil II, Fig. 197.) Man kann also die Polarkurve als sphärische Hyperbel betrachten, die Schenkel des konstanten Winkels als Asymptoten, und für die „Tangendreiecke" ist der obige Satz gefunden worden.

Nimmt man aber statt des einen Brennpunktes seinen Gegenpunkt, so geht die Gleichung der Ellipse in $v_1 + (\pi - v_2) = 2k$ oder in $v_1 - v_2 = 2k - \pi$ über, was der gewöhnlichen Hyperbelgleichung entspricht und der Polarkurve eine konstante Winkeldifferenz aufnötigt, wobei es sich übrigens nur um die Vertauschung eines Winkels und seines Nebenwinkels handelt. Dabei liegt die Frage nahe, ob die so definierte Hyperbel mit der vorher als Polarkurve erklärten identisch ist, was in der That der Fall ist. Von besonderer Wichtigkeit ist, daß zwischen den beiden Brennpunkten und den beiden Asymptoten Reciprocität stattfindet und daß im allgemeinen zu jeder Brennpunkteigenschaft eine Asymptoteneigenschaft gehört.

Es sei nur bemerkt, daß die Lehre von den sphärischen Kegelschnitten für die mathematische Physik von größter Bedeutung geworden ist, daß ferner die stereographischen Projektionen dieser Kurven zu höheren Teilen der Funktionentheorie, der Lehre von den elliptischen Funktionen, in eigentümlicher Beziehung stehen. (Vergl. des Verfassers Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Kap. XV.)

Aus diesen Andeutungen wird man erkennen, daß die anfangs so wenig anregend erscheinende Lehre von den Ecken und ihren Polarecken zu den interessantesten Gebieten der neueren Mathematik hinüberführt.]

IX. Zusammenstellung der wesentlichen Formeln.

a) Rechtwinklige Dreiecke.

1) $\cos c = \cos a \cos b$

2) $\sin \alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$

3) $\cos \alpha = \dfrac{\tan b}{\tan c}$

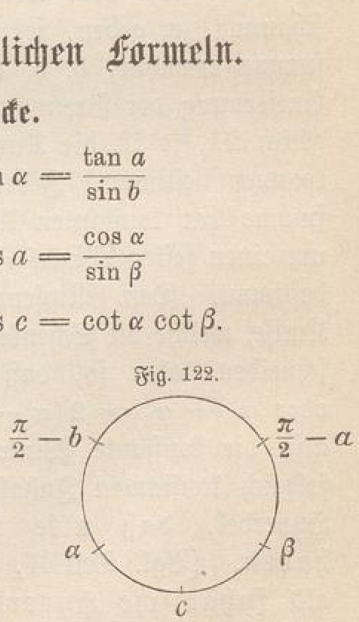
4) $\tan \alpha = \dfrac{\tan a}{\sin b}$

5) $\cos a = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \beta}$

6) $\cos c = \cot \alpha \cot \beta.$

Nepersche Regel:

Fig. 122.



$$7) \begin{cases} \cos c = \cot \alpha \cot \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot \beta \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin \alpha \sin c, \\ \cos \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cot c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin \beta. \end{cases}$$

b) Schiefwinklige Dreiecke.

8) $$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin b : \sin c.$$

9*) $$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$ 10*) $$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma}{\sin\beta \sin\gamma}$$

11) $$\tan\frac{c}{2} = \frac{\sin a}{\sin\alpha} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}$$

11*) $$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sin a} \frac{\sin(a+b)}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

12) $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$ 13) $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

14) $$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

15) $$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin b \sin a}$$

16) $$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}}$$ 17) $$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta \sin\gamma}}$$

18) $$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma \cdot \cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$$

19) $$\sin a = \frac{2\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}{\sin\beta \sin\gamma}.$$

Gaußsche Formeln:

21*) $$\begin{cases} \dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \\[2ex] \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \\[2ex] \dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \\[2ex] \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \end{cases}$$

Nepersche Analogien:

22) $$\begin{cases} \dfrac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \\[2ex] \dfrac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \\[2ex] \dfrac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \\[2ex] \dfrac{\tan\frac{a-b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \end{cases}$$

$$23)\quad \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{a-b}{2}}. \qquad 26)\quad \sin\frac{F}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}.$$

$$27)\qquad \cot\frac{F}{2} = \frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2} + \cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

$$29)\qquad \sin\frac{F}{4} = \sqrt{\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\sin\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

$$29^*)\qquad \cos\frac{F}{4} = \sqrt{\frac{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

$$30)\qquad \tan\frac{F}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}.$$