Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

Vierte Abteilung. Algebraische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Vierte Abteilung.

Algebraische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.

I. Die ganzen rationalen Funktionen.

1) Begriff der ganzen rationalen Funktion.

Ist in dem Ausdrucke $(a + bx + cx^2)$ die Größe x eine veränderliche, während a, b und c festgegebene (konstante) Größen sind, so entspricht jedem willkürlichen Werte von x ein einziger bestimmter Wert von $(a + bx + cx^2)$.

Weil der Wert des Ausdrucks vom Werte der Veränderlichen (Variablen) x abhängig ist, nennt man den Ausdruck eine Funktion von x. Man deutet dies durch die Schreibweise $f(x)$ an, also

$$f(x) = a + bx + cx^2.$$

Die Veränderliche x wird auch als das Argument der Funktion bezeichnet.

Weil jedem Werte von x nur ein einziger Wert dieser Funktion entspricht, heißt sie eine eindeutige Funktion von x. (Im Gegensatz dazu würden $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{a + x}$ u. s. w. mehrdeutig sein.)

Weil in dem Ausdrucke keine von x abhängigen Irrationalitäten vorkommen, wie z. B. $\sqrt{x}$, $\sqrt{a + x}$, $\sqrt[3]{b + x}$ u. s. w., so heißt die Funktion eine rationale Funktion von x.

Weil endlich x nicht in einem Nenner vorkommt, wie in $\frac{1}{x}$, $\frac{a + bx}{c + dx}$ u. s. w., so heißt die Funktion eine ganze Funktion von x.

In demselben Sinne heißt der höchstens $(n + 1)$ Glieder enthaltende Ausdruck

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

eine ganze rationale Funktion von x und zwar, weil n der höchste Exponent der Grundzahl x ist, eine Funktion vom n^{ten} Grade.

Schreibt man y statt $f(x)$, so kann man

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

im Sinne der analytischen Geometrie als die Gleichung eine Kurve vom n^{ten} Grade deuten. Dabei sind aber die Koeffizienten $a, b, c, \cdot\cdot k$ als reell vorauszusetzen, was hier stets angenommen werden soll. Dann bedeutet y die zu jeder Abscisse x gehörige Ordinate.

Es sind aber auch andere Deutungen möglich, denn in Teil II, Ster. VIII wurden solche Gleichungen als Gleichungen für die Querschnittsflächen eines Körpers gedeutet.

Aufgabe. Bestimme die Ordinaten folgender Kurven für die Stellen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4, \cdots$.

$$y = 2 + 3x - 5x^2,$$
$$y = 5 - 4x + 6x^2 - 2x^3,$$
$$y = -1 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{2}{5}x^2 + x^3 + 2x^4.$$

2) Übereinstimmung mehrerer ganzen rationalen Funktionen miteinander.

In den späteren Abschnitten kommt folgender Satz zur Anwendung:

Satz. Stimmen zwei ganze rationale Funktionen n^{ten} Grades für $(n + 1)$ Werte überein, so sind sie überhaupt identisch.

Beweis für den 2^{ten} Grad. Die Funktionen

$$f(x) = a + bx + cx^2,$$
$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

mögen für $x = x_1$ nnd ebenso für $x = x_2$ und $x = x_3$ übereinstimmen.

Um zu zeigen, daß dann $a = \alpha$, $b = \beta$ und $c = \gamma$ sein muß (womit die Identität nachgewiesen sein würde), setze man zunächst x_1 in beide Funktionen ein, so daß

$$a + bx_1 + cx_1{}^2 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1{}^2$$

ist, oder

$$1)\quad \begin{cases} (a-\alpha)+(b-\beta)x_1+(c-\gamma)x_1^2=0. \\ \text{Ebenso bilde man:} \\ (a-\alpha)+(b-\beta)x_2+(c-\gamma)x_2^2=0, \\ (a-\alpha)+(b-\beta)x_3+(c-\gamma)x_3^2=0. \end{cases}$$

Durch Subtraktion folgen die Gleichungen

$$(b-\beta)(x_1-x_2)+(c-\gamma)(x_1^2-x_2^2)=0,$$
$$(b-\beta)(x_2-x_3)+(c-\gamma)(x_2^2-x_3^2)=0.$$

Da x_1 und x_2 verschiedene Werte sind, so darf man in der ersten dieser Gleichungen durch (x_1-x_2) dividieren, ebenso in der zweiten durch (x_2-x_3). Dadurch erhält man

$$2)\quad \begin{cases} (b-\beta)+(c-\gamma)(x_1+x_2)=0, \\ (b-\beta)+(c-\gamma)(x_2+x_3)=0. \end{cases}$$

Daraus folgt durch Subtraktion

$$3)\quad (c-\gamma)(x_1-x_3)=0.$$

Weil aber (x_1-x_3) von Null verschieden ist, so muß $c-\gamma=0$ oder $c=\gamma$ sein. Setzt man in einer der Gleichungen 2) $c=\gamma$, so folgt $b=\beta$. Setzt man beides in eine der Gleichungen 1) ein, so folgt $a=\alpha$.

Damit ist die Identität nachgewiesen. (Dies konnte auch in anderer Weise geschehen, wie sich aus folgender Bemerkung ergiebt.)

Bemerkung. Soll demnach eine Funktion $f(x)=a+bx+cx^2$ für x_1 den Wert y_1, für x_2 den Wert y_2, für x_3 den Wert y_3 haben, so müssen ihre Koeffizienten a, b und c ganz bestimmte sein und sich berechnen lassen.

Man hat nämlich die Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} a+bx_1+cx_1^2=y_1, \\ a+bx_2+cx_2^2=y_2, \\ a+bx_3+cx_3^2=y_3. \end{cases}$$

In diesen betrachtet man a, b und c als Unbekannte, so daß es sich um drei Gleichungen 1. Grades mit drei Unbekannten handelt. Man entfernt a durch Subtraktion und erhält

$$b(x_1-x_2)+c(x_1^2-x_2^2)=y_1-y_2,$$
$$b(x_2-x_3)+c(x_2^2-x_3^2)=y_2-y_3,$$

oder nach beiderseitiger Division durch (x_1-x_2) bezw. (x_2-x_3)

$$2)\qquad \begin{cases} b + c(x_1 + x_2) = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \\ b + c(x_2 + x_3) = \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}. \end{cases}$$

Durch Subtraktion findet man

$$c(x_1 - x_3) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

oder

$$3)\qquad c = \frac{1}{x_1 - x_3}\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right].$$

Einsetzung in die erste der Gleichungen 2) giebt

$$b = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right].$$

Einsetzung der gefundenen Werte in die erste Gleichungen 1) giebt

$$a = y_1 - bx_1 - cx_1^2 = ?.$$

Aufgabe. Führe den Beweis des Satzes über die Identität für die Funktionen

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$
$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

aus, die für die Argumentwerte x_1, x_2, x_3 und x_4 übereinstimmen sollen.

Bemerkung. Man kommt dabei der Reihe nach auf Gleichungen von der Form

$$(a - \alpha) + (b - \beta)x_1 + (c - \gamma)x_1^2 + (d - \delta)x_1^3 = 0,$$

sodann

$$(b - \beta)(x_1 - x_2) + (c - \gamma)(x_1^2 - x_2^2) + (d - \delta)(x_1^3 - x_2^3) = 0,$$

wo die Division durch $(x_1 - x_2)$ aufgeht, also

$$(b - \beta) + (c - \gamma)(x_1 + x_2) + (d - \delta)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0.$$

Die dritte Gruppe erhält die Form

$$(c - \gamma)(x_1 - x_3) + (d - \delta)\left[(x_1^2 - x_3^2) + x_2(x_1 - x_3)\right] = 0,$$

oder, da die Division durch $(x_1 - x_3)$ aufgeht,

$$(c - \gamma) + (d - \delta)[x_1 + x_3 + x_2] = 0.$$

Aus diesem System folgt durch Subtraktion

$$(d - \delta)[x_1 - x_4] = 0,$$

und weil $x - x_4$ von Null verschieden ist, so folgt $d - \delta = 0$. Dies in die vorige Gruppe eingesetzt, giebt $c - \gamma = 0$. Rückwärts gehend erhält man noch $b - \beta = 0$ und $(a - \alpha) = 0$.

Bemerkung. Da bei höheren Graden die auftretenden Ausdrücke von der Form $x_1^n - x_2^n$ stets durch $x_1 - x_2$ teilbar sind, so gilt dieselbe Methode für alle ganzen rationalen Funktionen. Der ausgesprochene Satz ist also als bewiesen zu betrachten.

In der Sprache der analytischen Geometrie läßt sich der Satz für die einzelnen Grade folgendermaßen aussprechen:

a) Stimmen die Geraden $y = a + bx$ und $y = \alpha + \beta x$ in zwei Punkten überein, so fallen sie ganz zusammen; oder: Durch zwei Punkte läßt sich nur eine einzige Gerade legen.

b) Fallen die Kurven $y = a + bx + cx^2$ und $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ in drei Punkten zusammen, so fallen sie ganz zusammen; oder: Durch drei gegebene Punkte ist nur eine einzige solche Kurve möglich.

(Suche zu beweisen, daß es sich um Parabeln handelt, deren Achse parallel zur Y-Achse liegt.)

c) Durch $(n + 1)$ gegebene Punkte läßt sich nur eine einzige Kurve von der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

legen.

3) Direkte Bestimmung der Koeffizienten aus den Werten der Funktion.

Bemerkung. Die Aufgabe, die Koeffizienten von

$$y = a + bx + cx^2 \tag{1}$$

aus den Wertepaaren x_1, y_1 bezw. x_2, y_2 und x_3, y_3 zu bestimmen, d. h. die Aufgabe, die Kurvengleichung fertig hinzuschreiben, wird mit einem Schlage gelöst, wenn man folgende Gleichung schreibt:

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3. \tag{2}$$

Auch dies ist zunächst eine Gleichung obiger Art vom 2^{ten} Grade in Bezug auf x. Setzt man aber in ihr $x = x_1$, so fällt alles weg bis auf $y = y_1$; setzt man $x = x_2$, so bleibt nur stehen $y = y_2$; setzt man $x = x_3$, so erhält man $y = y_3$. Die Kurve 2) stimmt also mit der gesuchten Kurve von der Form a in drei Punkten überein, ist also mit ihr identisch.

Vereinigt man rechts alle x, ebenso alle x^2 und die Glieder ohne x, so erhält man die Form 1) und für a, b und c dieselben Resultate, wie früher. (Vgl. 2.)

Ebenso ist die Gleichung der Kurve von der Form

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

die durch die vier Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ und $x_4 y_4$ gehen soll, mit einem Schlage gefunden durch die Gleichung

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_4)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_1)} y_2$$
$$+ \frac{(x - x_4)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_4)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} y_4.$$

Stelle die entsprechende Gleichung auf für den 4^{ten} Grad und den n^{ten} Grad.

Die allgemeine Gleichung heißt die Interpolationsformel von Lagrange.

Beispiel. Bestimme die Konstanten a, b, c, d der Funktion

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

wenn y für $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$ die Werte $y_1 = 10$, 12, 4, 1 haben soll.

Die Aufgabe soll auf beide Arten gelöst werden, erstens durch Auflösung des Systems der vier Gleichungen 1. Grades, zweitens mit Hülfe der Formel von Lagrange.

4) Parabeln höherer Ordnung und ihre Quadratur.

Man nennt die Kurven von der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

Parabeln n^{ter} Ordnung.

Ist nur ein einziger Koeffizient verschieden von Null, handelt es sich also um

$$y = kx^n,$$

so heißt die Kurve ein einfache Parabel n^{ter} Ordnung.

Nach Teil II, Stereometrie Nr. 64 gilt von Flächen, die in der Höhe y die Querlinie

$$x = q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^n$$

haben, auf Grund der Summenformel $\frac{1}{p+1} \sum_{p=1}^{p=\infty} n^p = \frac{1}{p+1}$, die für ganze positive p bewiesen worden ist, der Satz, daß der Flächeninhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe y_1 ist,

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{y_1}{1} + \frac{by_1^{\,2}}{2} + \frac{cy_1^{\,3}}{3} + \frac{dy_1^{\,4}}{4} + \cdots + \frac{ky_1^{\,n+1}}{n+1}.$$

Vertauscht man x mit y, so folgt z. B.

Die Fläche zwischen der x-Achse und der durch die Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

dargestellten Kurve, von $x = 0$ bis $x = x_1$ gerechnet, ist

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{x_1}{1} + \frac{bx_1^{\,2}}{2} + \frac{cx_1^{\,3}}{3} + \frac{dx_1^{\,4}}{4} + \cdots + \frac{kx_1^{\,n+1}}{n+1}.$$

Berechnet man auch $\overset{x_2}{\underset{0}{F}}$, wo $x_2 > x_1$ ist, so findet man durch Subtraktion

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \overset{x_2}{\underset{0}{F}} - \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{x_2 - x_1}{1} + b\frac{x_2^{\,2} - x_1^{\,2}}{2} + c\frac{x_2^{\,2} - x_1^{\,2}}{3} + \cdots$$
$$+ k\frac{x_2^{\,n+1} - x_1^{\,n+1}}{n+1},$$

oder auch, abgekürzt geschrieben:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \left|\frac{ax}{1} + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \cdots + \frac{kx^{n+1}}{n+1}\right|_{x = x_1}^{x = x_2}.$$

5) Die Simpson-Newtonsche Regel.

Geht die Gleichung nicht über den dritten Grad hinaus, so kann man, wie in Teil II gezeigt ist, die Simpson-Newtonsche Regel anwenden, also ist z. B. für die Kurve

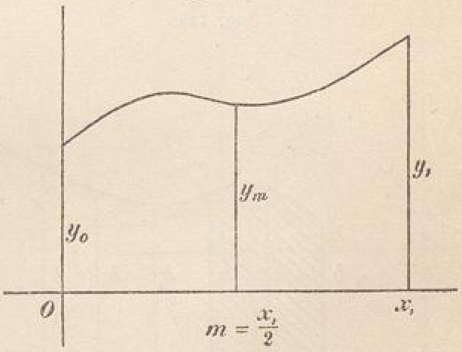
$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

von $x = 0$ bis $x = x_1$ gerechnet,

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1}{6}\,[y_0 + 4y_m + y_1].$$

Hier bedeutet y_m die Ordinate in der Mitte der Strecke x_1, d. h. bei $m = \frac{x_1}{2}$.

Fig. 123.



Ebenso ist

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2 - x_1}{6}\,[y_1 + 4y_m + y_2],$$

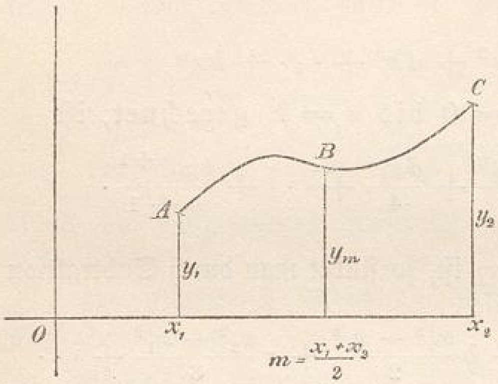
wo y_m das Lot an der Stelle $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ bedeutet.

Bemerkung. Durch die Punkte A, B und C läßt sich nur eine einzige Kurve von der Gleichung $y = a + by + cy^2$ legen, aber unendlich viele von der Gleichung 3ten Grades

$$y = a + by + cy^2 + dy^3.$$

So vielgestaltig aber diese Kurven auch sein mögen, sämtlich geben sie zwischen x_1 und x_2 denselben Flächeninhalt.

Fig. 124.



Beispiel. Wie groß ist die Fläche der Kurve

$$y = 2 + 3x + 5x^2 + 6x^3$$

von $x = 0$ bis $x_1 = 2$?

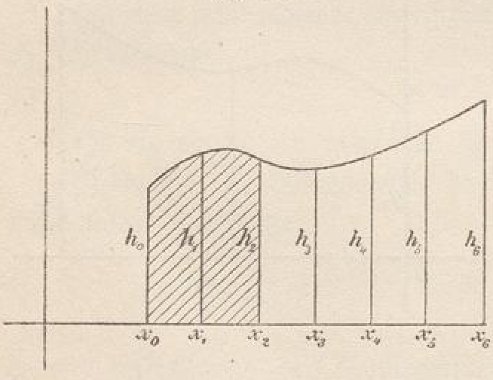
Auflösung. Berechne y für $x = 0$, $x = \frac{2}{2} = 1$ und $x = 2$ als y_1, y_m und y_2 und wende dann die Simpson-Regel an.

Wie groß ist ferner die Fläche von $x_1 = 2$ bis $x_1 = 6$?

6) Verallgemeinerte Simpson-Regel. Während die Simpson-Regel in der Stereometrie weitgehende Anwendung findet, ist sie in der Geometrie weniger brauchbar. Zur Berechnung von sogenannten Diagrammflächen kann sie nicht gut direkt benutzt werden, wohl aber in einer Art von verallgemeinerter Gestalt.

Soll eine Kurvenfläche (zwischen X-Achse und Kurve gelegen) angenähert berechnet werden, obwohl die Kurve eine ganz willkürliche Gestalt hat, so teile man die Basis (von x_0 bis x_1) in eine gerade Anzahl gleicher Teile ein und lege durch die Teilpunkte Ordinaten. Für den ersten Doppelstreifen darf man, wenn die Breite nicht allzugroß ist, mit Annäherung die Simpson-Regel anwenden; ebenso für jeden folgenden. Man erhält z. B.

Fig. 125.



$$\overset{x_6}{\underset{x_0}{F}} = \frac{x_2 - x_0}{6}[h_0 + 4h_1 + h_2] + \frac{x_4 - x_2}{6}[h_2 + 4h_3 + h_4]$$
$$+ \frac{x_6 - x_4}{6}[h_4 + 4h_5 + h_6]$$
$$= \frac{x_6 - x_0}{6 \cdot 3}[h_0 + h_6 + 2(h_2 + h_4) + 4(h_1 + h_3 + h_5)].$$

Allgemein:

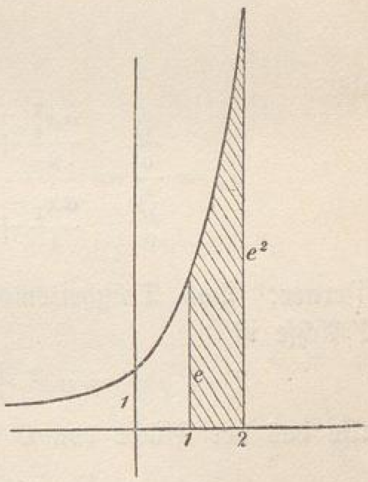
$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \frac{x_n - x_0}{6 \cdot \frac{n}{2}}[h_0 + h_n + 2(h_2 + h_4 + h_6 + \cdots + h_{n-2})$$
$$+ 4(h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{n-1})].$$

Diese Formel giebt weit genauere Resultate, als die aus der Berechnung der Trapeze hervorgehende Formel

$$\frac{x_n - x_0}{2n}[h_0 + 2(h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_{n-1}) + h_n],$$

da schon die Parabeln 2ter Ordnung, die sich durch je drei aufeinanderfolgende Punkte legen lassen, sich der Kurve weit inniger anschmiegen, wie die Geraden. Sicher aber wird unter den unendlich zahlreichen Kurven der 3ten Ordnung irgend eine sein, die dies in besonders hohem Grades thut.

Fig. 126.



Beispiel. Die sogenannte logarithmische Kurve $y = e^x$ soll von $x_1 = 1$ bis $x_2 = 2$ angenähert berechnet werden.

Auflösung. Bei nur vier Streifen erhält man

$$\frac{2-1}{6 \cdot \frac{4}{2}}\left[e^1 + e^2 + 2\left(e^{\frac{6}{4}}\right) + 4\left(e^{\frac{5}{4}} + e^{\frac{7}{4}}\right)\right]$$
$$= \frac{e}{12}\left[1 + e + 2e^{\frac{2}{4}} + 4\left(e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{3}{4}}\right)\right]$$
$$= 4{,}670876.$$

Die genauere Rechnung giebt den Wert 4,670775.

Dagegen würde die Trapezrechnung bei gleicher Streifenzahl 4,695079 geben, was viel zu groß sein muß, da die Kurve von unten gesehen konvex ist.

7) Praktische Anwendungen.

Abgesehen von den in der Stereometrie angegebenen Anwendungen kann man die Summenformel zur Berechnung der statischen Momente, der Schwerpunkte und der Trägheitsmomente von gewissen Flächen benutzen. [Gewisse graphische Darstellungen, auch die sogenannten Indikator-Diagramme der Dampfmaschine, sind sehr bequem mit der Simpson-Regel zu behandeln.]

a) Statisches Moment, Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Trägheitsmittelpunkt.

Die Gleichung einer Kurve sei

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^p.$$

Dann ist das statische Moment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse

$$M = y \cdot x = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots + kx^{p+1},$$

folglich das der gesamten Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{ax_1^2}{2} + \frac{bx_1^3}{3} + \frac{cx_1^4}{4} + \frac{dx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+2}}{p+2}.$$

Die Schwerpunktsentfernung berechnet sich aus „Fläche mal Hebelarm gleich dem statischen Momente", also aus

$$x_s \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{r_1}{\underset{0}{M}}$$

als

$$x_s = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{x_1}{\underset{0}{F}}} = \frac{\frac{ax_1^2}{2} + \frac{bx_1^3}{3} + \frac{cx_1^4}{4} + \cdots + \frac{kx_1^{p+2}}{p+2}}{\frac{ax_1}{1} + \frac{bx_1^2}{2} + \frac{cx_1^3}{3} + \cdots + \frac{kx_1^{p+1}}{p+1}}.$$

[Ferner: Das Trägheitsmoment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse ist

$$T = yx^2 = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots + kx^{p+2},$$

also das der Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{ax_1^3}{3} + \frac{bx_1^4}{4} + \frac{cx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+3}}{p+3}.$$

Der sogenannte Trägheitsmittelpunkt hat einen Abstand, der sich berechnet aus

$$x_t^2 \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{x_1}{\underset{0}{T}}$$

oder

$$x_t^2 = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{T}}}{\overset{x_1}{\underset{0}{F}}} = \frac{\frac{a x_1^3}{3} + \frac{b x_1^4}{4} + \frac{c x_1^5}{5} + \cdots + \frac{k x_1^{p+3}}{p+3}}{\frac{a x_1}{1} + \frac{b x_1^2}{2} + \frac{c x_1^3}{3} \pm \cdots + \frac{k x^{p+1}}{p+1}}.$$

Besonders häufig findet dies Anwendung auf die einfachen Parabeln höherer Ordnung, wie

$$y = cx^2, \quad y = dx^3, \quad y = ex^4, \quad \text{u. s. w.}$$

Bei $y = cx^2$ ergiebt sich

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{c \cdot x_1^3}{3},$$

was der 3te Teil des entsprechenden Rechtecks ist;

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{c x_1^4}{4}, \quad x_s = \frac{\frac{c x_1^4}{4}}{\frac{c x_1^3}{3}} = \frac{3}{4} x_1, \quad \overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{c x_1^5}{5}, \quad x_t^2 = \frac{\frac{c x_1^5}{5}}{\frac{c x_1^3}{3}} = \frac{3}{5} x_1^2.$$

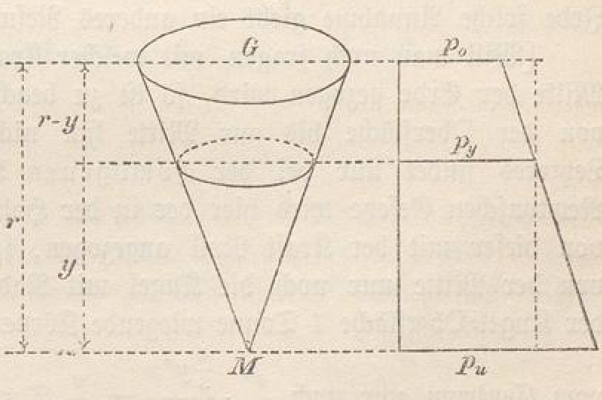
Die Bedeutung dieser Dinge liegt in der Mechanik.]

b) Eine kosmische Aufgabe.

Aufgabe. Das spezifische Gewicht der Erde sei an der Oberfläche 2,5 und im Durchschnitt 5,6. Nach der Mitte hin nehme es gleichmäßig zu. Wie groß ist es im Mittelpunkte?

Auflösung. Man denke sich einen Kegel (eigentlich Sektor) aus der Erdkugel geschnitten. Ist seine obere Fläche G, so hat er in Höhe y den Querschnitt

Fig. 127.



1) $G_y = G \frac{y^2}{r^2}$.

Ist das spezifische Gewicht unten p_u, oben p_o, so ergiebt sich für die Höhe y bei regelmäßiger Zunahme nach unten

$$(p_u - p_y) : y = (p_y - p_o) : (r - y),$$

folglich

2) $$p_y = p_u - y\frac{p_u - p_o}{r}.$$

Die Schicht in Höhe y fällt nach 1) und 2) ins Gewicht mit

$$G_y \cdot p_y = G\frac{p_u}{r^2}y^2 - G\frac{p_u - p_o}{r^3}y^3.$$

Für die Summe der Schichten von o bis y_1 giebt die Summenformel

3) $$G\frac{p_u}{r^2}\cdot\frac{y_1^3}{3} - G\frac{p_u - p_o}{r^3}\cdot\frac{y_1^4}{4},$$

also für $y_1 = r$

$$Gp_u\frac{r}{3} - G(p_u - p_o)\frac{r}{4} = \frac{Gr}{12}[4p_u - 3p_u + 3p_o] = \frac{Gr}{12}[p_u + 3p_o].$$

Der ganze Kegel fällt aber bei dem mittleren spezifischen Gewicht 5,6 mit $G\frac{r}{3}5{,}6$ ins Gewicht. Ist also $p_o = 2{,}5$, so hat man die Gleichung

$$\frac{Gr}{12}[p_u + 3 \cdot 2{,}5] = \frac{Gr}{3}5{,}6,$$

also

4) $$p_u + 3 \cdot 2{,}5 = 4 \cdot 5{,}6, \quad p_u = 22{,}4 - 7{,}5 = \mathbf{14{,}9}.$$

Nach dieser Annahme wäre also das spezifische Gewicht im Erdcentrum $p' = 14{,}9$ zu setzen.

Selbstverständlich kann man beliebige andere Annahmen über die Zunahme des spezifischen Gewichtes nach der Mitte hin machen. Jede solche Annahme giebt ein anderes Resultat.

[Will man noch fragen, mit welcher Kraft dieser Kegel nach der Mitte der Erde gezogen wird, so ist zu beachten, daß die Anziehung von der Oberfläche bis zur Mitte hin nicht regelmäßig abnimmt. Letzteres findet nur bei der homogenen Kugel statt. Nach dem Newtonschen Gesetze wird hier der in der Hohlkugel befindliche Körper von dieser mit der Kraft Null angezogen, so daß in Entfernung y von der Mitte nur noch die Kugel mit Radius y wirkt. Jeder an der Kugel-Oberfläche 1 Tonne wiegende Körper wiegt in Entfernung y vom Centrum nur noch $\frac{r^2}{y^2}\cdot\frac{\frac{4}{3}y^3\pi}{\frac{4}{3}r^3\pi} = \frac{y}{r}$ Tonnen.

Handelt es sich nicht um einen Kegel, sondern um einen Cylinder, der sich nicht, wie der Kegel, in der umgebenden Erdmasse festkeilt, und ist sein Querschnitt 1 qm, so wird er bei dem spezifischen Gewichte 5,6 von der Erde so angezogen, daß jede Meterschicht mit $5{,}6\,\frac{y}{r}$ Tonnen, der ganze Cylinder mit $\frac{5{,}6}{r} \cdot \frac{y^2}{2}$, d. h. für $y = r$ mit $\frac{5{,}6\,r}{2} = 2{,}8\,r = 2{,}8 \cdot 860 \cdot 7500 = 18\,060\,000$ Tonnen angezogen werden. Dies würde dann auch der Druck im Erdcentrum sein.

Wendet man zur Vermeidung naheliegender Versehen die nötige Vorsicht an, so kann man die Rechnung auch für die oben angenommene Massenverteilung durchführen.

Auch die Frage, mit welcher Geschwindigkeit ein Körper sich an jeder Stelle eines luftleeren Schachtes bewegen würde, der bis zum Mittelpunkte der Erde reicht, kann für beide Massenverteilungen beantwortet werden.

Man hat nur nötig, die Formel für die Stärke der Anziehung jeder Kugel mit Radius y an ihrer Oberfläche zu berechnen und für die entsprechende Parabel höherer Ordnung $\overset{r}{\underset{y}{F}}$ zu bilden. Dies ist aus Gründen der Mechanik gleich der gewonnenen Arbeitswucht $\frac{mv^2}{2}$ (lebendige Kraft) der angezogenen Masse m zu setzen, so daß man v für jede Stelle berechnen kann. Hier würde dies zu weit führen.]

8) Andeutungen über ganze rationale Funktionen*). (Tangentenproblem und Nullstellen.)

Nach Teil II, Anhang 8) liegen die höchsten und niedrigsten Stellen der Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

da, wo die Gleichung

$$b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nkx^{n-1} = 0$$

erfüllt ist. Dort sind die Tangenten der Kurve horizontal.

Da für uns vorläufig nur Gleichungen bis zum dritten Grade lösbar sind, so darf die Kurve zunächst den 4ten Grad noch nicht übersteigen.

---

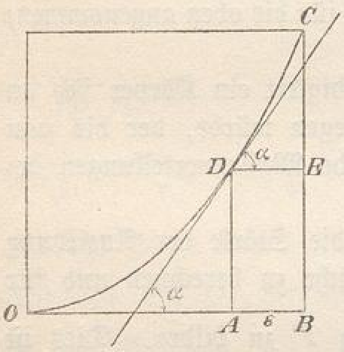
*) Anwendung sollen diese Andeutungen vorläufig nicht finden. Ihre Absicht ist, zu zeigen, daß die Elemente zur erschöpfenden Behandlung des Gebietes nicht ausreichen. Es handelt sich also nicht etwa um Einführung der Differentialrechnung.

Beispiele. Wo liegen die Maxima und Minima der Kurven

$$y = 2 - 3x + 5x^2;\quad y = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3;$$
$$y = 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + x^4?$$

Man kann nun die Frage stellen, welche Richtungen die Tangenten an jeder Stelle $x = x_1$ haben.

Fig. 128.



Zunächst handle es sich um die einfache Parabel höherer Ordnung $y = x^n$. In Figur 126 denke man sich für diese Kurve die Sehne DC gezeichnet. Es sei nun $OA = x$, also $AD = x^n$, es sei ferner $AB = \varepsilon$, also $OB = (x + \varepsilon)$ und $BC = (x + \varepsilon)^n$. Dann ist

$$\tan\alpha = \frac{EC}{DE} = \frac{BC - AD}{\varepsilon}$$
$$= \frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x}.$$

Die Division läßt sich durchführen und giebt für ganzes positives n

$$\tan\alpha = (x+\varepsilon)^{n-1} + (x+\varepsilon)^{n-2}\cdot x + (x+\varepsilon)^{n-3}\cdot x^2 + \cdots$$
$$+ (x+\varepsilon)x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Hier läßt sich jede Klammer nach dem binomischen Satze entwickeln, z. B.

$$(x+\varepsilon)^{n-1} = x^{n-1} + \frac{n-1}{1!}x^{n-1}\varepsilon + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}x^{n-2}\varepsilon^2$$
$$+ \cdots + \varepsilon^{n-1}.$$

Läßt man aber ε unendlich klein werden, so strebt diese Summe der Grenze x^{n-1} zu. Man darf aber ε bei endlichem n auch schon in der Reihe für $\tan\alpha$ streichen. Demnach hat $\tan\alpha$ für $\varepsilon = 0$ einen bestimmten Grenzwert

$$\tan\alpha = x^{n-1} + x^{n-2}\cdot x + x^{n-3}\cdot x^2 + \cdot\cdot + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Für $\varepsilon = 0$ wird aber die Sehne DC verschwindend klein, d. h. sie fällt mit der Tangente der Kurve zusammen. Folglich:

Die Parabel höherer Ordnung $y = x^n$ hat an der Stelle x eine Tangentenrichtung, die sich aus der Gleichung $\tan\alpha = nx^{n-1}$ ergiebt.

Zeige ebenso, daß es sich für die Kurve $y = bx^n$ um $\tan\alpha = nbx^{n-1}$ handelt. Für die Kurve $y = bx^m + cx^n$ handelt es sich ebenso um

$$\tan\alpha = \frac{[b(x+\varepsilon)^m + c(x+\varepsilon)^n] - (bx^m + cx^n)}{(x+\varepsilon) - x}$$
$$= b\,\frac{(x+\varepsilon)^m - x^m}{(x+\varepsilon) - x} + c\,\frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x},$$

also nach Obigen für $\varepsilon = 0$ um

$$\tan\alpha = mbx^{m-1} + ncx^{n-1},$$

für die Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

also um

$$\tan\alpha = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nk^{n-1}.$$

Die Kenntnis dieses Satzes hat die Entwickelung der Mathematik in außerordentlicher Weise beeinflußt, da es nahe lag, den Wert von $\tan\alpha$ auch für beliebige Funktionen zu untersuchen.

Beispiel. Untersuche die Tangentenrichtung für $y = 2 + 3x - 5x^2$, $y = 3 - x + 2x^2 - 4x^3$ an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3,$ u. s. w.

Findet man Stellen, wo die Kurve

1) $$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

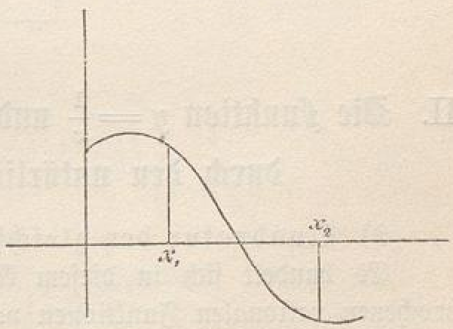
die X-Achse schneidet, so ist durch das betreffende x die Gleichung

2) $$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

erfüllt, d. h. man hat eine reelle Lösung (Wurzel) der Gleichung 2) gefunden.

Wird die X-Achse von der Kurve nirgends geschnitten, so hat die Gleichung keine reellen Lösungen, sondern nur imaginäre oder komplexe.

Fig. 129.



Für jedes endliche reelle x hat die Kurve eine endliche Ordinate, aber nur diese eine. Ist also z. B. die Ordinate bei x_1 positiv, bei x_2 negativ, so muß die Kurve zwischen x_1 und x_2 die X-Achse geschnitten haben, d. h. zwischen x_1 und x_2 muß sich eine reelle Wurzel der Gleichung 2) befinden. Durch probeweises Einsetzen von solchen x, die zwischen x_1 und x_2 liegen, kann man sich der wirklichen Wurzel (durch Einschnürung) bis zu beliebiger Genauigkeit nähern.

Versuche dieses für die Gleichung $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ mit Hülfe der Kurve $y = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ auszuführen.

Man kann diese Dinge leicht übersehen, indem man sich Gleichungen mit vorgeschriebenen reellen Wurzeln bildet, z. B. $0 = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - (1+2+3)x^2 + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1)x - 1 \cdot 2 \cdot 3 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, und indem man die Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ für eine größere Zahl von Punkten wirklich konstruiert.

[Gelingt es zu beweisen, daß sich jede ganze rationale Funktion

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

in ein Produkt von Faktoren ersten Grades von der Form

$$y = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\lambda)$$

zerlegen läßt, so ist der Fundamentalsatz der höheren Algebra gefunden. Gauß ist es gelungen, ihn streng zu beweisen. Aus dem Satze folgt, daß, wenn man eine Wurzel α gefunden hat, die Funktion durch $(x-\alpha)$ ohne Rest teilbar ist und auf eine solche $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zurückgeführt werden kann. Vergl. Teil II, Arithm. Nr. 76.]

Selbst wenn man von den letzten Andeutungen absieht, erkennt man, daß der binomische Satz und die mit ihm zusammenhängende Summenformel eine große Zahl von Aufgaben lösbar machen, die mit den ganzen rationalen Funktionen zusammenhängen. Das Ausschließen der imaginären und komplexen Koeffizienten und das Nichtbeweisen des Fundamentalsatzes der Algebra deutet aber darauf hin, daß erst die höhere Mathematik von allgemeineren Gesichtspunkten aus im Stande ist, die Lehre von der ganzen rationalen Funktion zum Abschluß zu bringen.

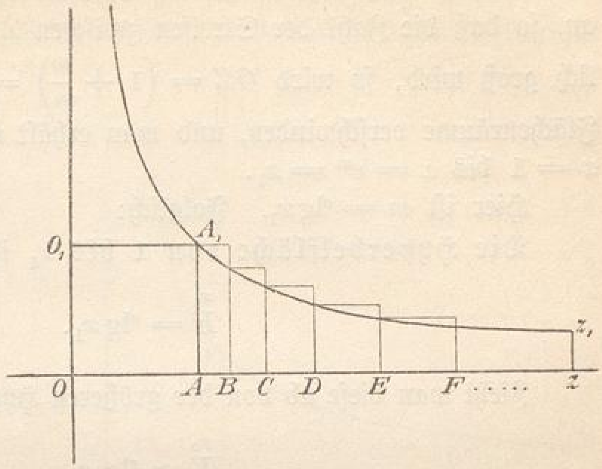
II. Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ und die Quadratur der Hyperbel durch den natürlichen Logarithmus.

9) Quadratur der gleichseitigen Hyperbel.

Es handelt sich in diesem Abschnitte um die einfachste der gebrochenen rationalen Funktionen von x.

Nach Teil II, Kegelschn. Nr. 35 stellt die Gleichung $y = \frac{1}{x}$ eine gleichseitige Hyperbel dar, wobei die Koordinatenachsen mit den Asymptoten zusammenfallen.

Fig. 130.



Um die zwischen der einen Asymptote (d. h. der X-Achse) und der Hyperbel liegende Fläche von $x = 1$ bis $x = x_1$ zu berechnen, nehme man einen beliebigen echten Bruch $\frac{m}{n}$ an und mache

$$OA = 1,$$

$$OB = \left(1 + \frac{m}{n}\right),$$

$$OC = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^2, \quad OD = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^3, \quad \ldots, \quad OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n,$$

so daß die Abstände eine geometrische Reihe bilden. In den Teilpunkten errichte man die Ordinaten und vervollständige die Flächenstreifen nach Art der Figur zu Rechtecken. Die Grundlinien der letzteren sind der Reihe nach

$$AB = \frac{m}{n}, \quad BC = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right), \quad CD = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2,$$

$$DE = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^3, \quad \ldots, \quad VZ = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n-1}.$$

Die Rechtecke haben die Höhen

$$1, \quad \frac{1}{1 + \frac{m}{n}}, \quad \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2}, \quad \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n-1}}.$$

Die Rechtecksinhalte sind

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)\frac{1}{1 + \frac{m}{n}}, \quad \frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2}, \quad \ldots,$$

$$\frac{m}{n}\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n-1}}.$$

Da also jedes Rechteck den Inhalt $\frac{m}{n}$ hat, so ist die Inhaltssumme der Rechtecke $\frac{m}{n} \cdot n = m$.

Nimmt man nun m endlich, aber n sehr groß (unendlich groß) an, so daß die Zahl der Streifen zwischen A und Z ebenfalls unendlich groß wird, so wird $OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m$, die übergreifenden Flächenräume verschwinden, und man erhält m als Hyperbelfläche von $x = 1$ bis $x = e^m = x_1$.

Hier ist $m = {}^e\lg x_1$. Folglich:

Die Hyperbelfläche von 1 bis x_1 ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg x_1.$$

Zieht man diese ab von der größeren Hyperbelfläche (für $x_2 > x_1$)

$$\overset{x_2}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg x_2,$$

so erhält man allgemeiner die Fläche von x_1 bis x_2 als

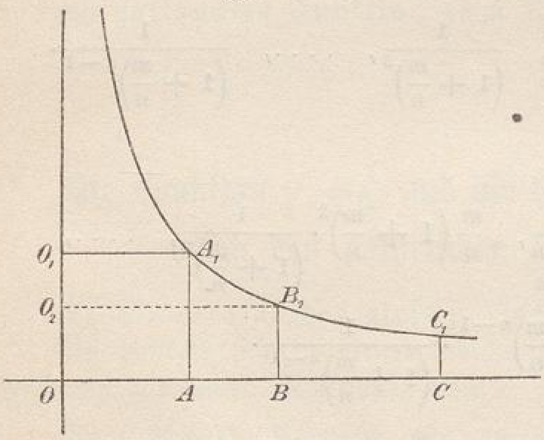
$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = {}^e\lg x_2 - {}^e\lg x_1 = {}^e\lg \frac{x_2}{x_1}.$$

Dieselben Betrachtungen gelten für die Richtung von A nach O, nur müssen dann die Abstände der Teilpunkte von O nach geometrischer Reihe abnehmen, z. B.

$$1, \; \left(1 - \frac{m}{n}\right), \; \left(1 - \frac{m}{n}\right)^2, \; \left(1 - \frac{m}{n}\right)^3, \; \ldots, \; \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n.$$

Folgerungen. a) Ist in Figur 131 OB mittlere Proportionale zwischen $OA = 1$ und OC, so ist die Fläche ACC_1A_1 durch BB_1 halbiert. Denn aus

Fig. 131.



$OB^2 = OA \cdot OC = 1 \cdot OC$ folgt $2 \lg OB = \lg OC$, also

$$\lg OB = \tfrac{1}{2} \lg OC,$$

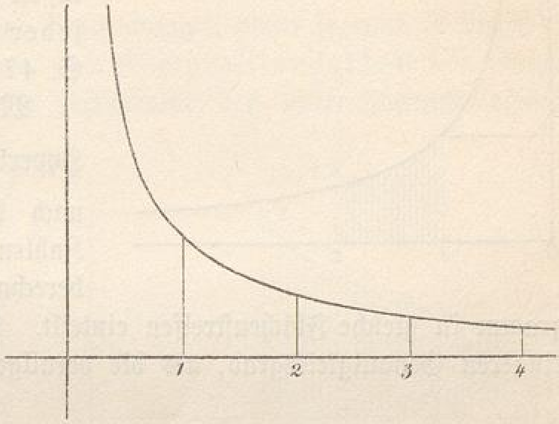
d. h.

$$\overset{B}{\underset{1}{F}} = \tfrac{1}{2} \overset{C}{\underset{1}{F}}.$$

b) Folgen die Abstände OA, OB, OC u. s. w. in in geometrischer Reihe aufeinander so sind die zugehörigen Flächenstreifen einander gleich.

c) Die natürlichen Logarithmen der Zahlen (1), 2, 3, 4, ... verhalten sich wie die zugehörigen, von $x = 1$ aus gerechneten Flächenstücke. Wegen dieses Zusammenhanges werden die natürlichen Logarithmen auch als **hyperbolische** bezeichnet.

Fig. 132.



d) Für die Hyperbel $y = \frac{a}{x}$ erhält man die Formel

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = a \cdot {}^e\lg \frac{x_2}{x_1},$$

denn jede Ordinate ist jetzt das a-fache der entsprechenden früheren, so daß auch jeder Vertikalstreifen und ebenso die ganze Fläche das a-fache ist.

Während nun vorher das konstante Rechteck $= 1$ war ($OAA_1O_1 = OBB_1O_2 = 1$), so ist jetzt das konstante Rechteck gleich $a \cdot 1 = a$. Folglich:

Die Fläche von x_1 bis x_2 ist gleich dem Produkte aus dem konstanten Rechteck und dem ${}^e\lg \frac{x_2}{x_1}$.

10) **Ausdehnung auf andere Hyperbeln.**

Denkt man sich die Ebene der Figur unter einem Neigungswinkel α beliebig im Raume angebracht, und projiziert man sie senkrecht auf die Horizontalebene, so geht die Hyperbel wieder in eine Hyperbel, ihre Asymptoten wieder in Asymptoten (jedoch mit anderem Schnittwinkel) über und jede Fläche F verwandelt sich in $F \cos \alpha$. **Folglich bleibt auch hier die Fläche ACC_1A_1 das ${}^e\lg \frac{OC}{OA}$-fache des konstanten Parallelogramms OAA_1O_1.**

Fig. 133.

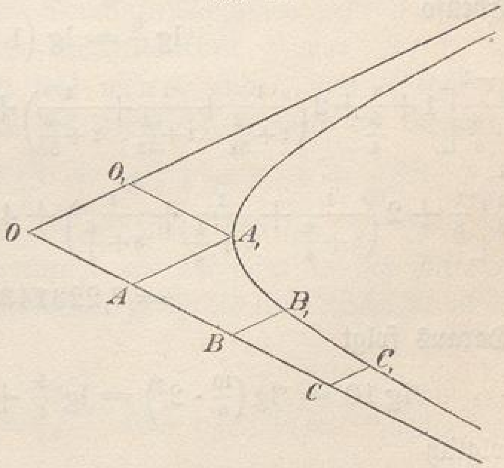
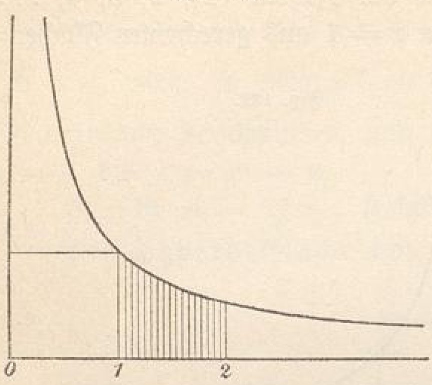


Fig. 134.



Entsprechendes geschieht bei schräger Parallelprojektion.

Mit Hülfe dieser Bemerkung lassen sich beliebige Segmente jeder Hyperbel berechnen. (Vgl. S. 47 bis 50.)

Mit Hülfe der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ lassen sich demnach die Logarithmen gegebener Zahlen mit beliebiger Genauigkeit berechnen, indem man das Diagramm in gleiche Flächenstreifen einteilt. Die Trapezformel giebt geringeren Genauigkeitsgrad, als die verallgemeinerte Simpson-Formel.

11) **Aufgabe.** Die natürlichen Logarithmen von 2, $\frac{5}{4}$ und 10 und den Modul der Briggschen Logarithmen angenähert zu berechnen.

Auflösung. Nimmt man 8 Streifen, so ist nach S. 127 angenähert

$$\lg 2 = \lg(1+1) = \overset{2}{\underset{1}{F}}$$

$$= \frac{2-1}{6\cdot\frac{8}{2}}\left[1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{8}}+\frac{1}{1+\frac{4}{8}}+\frac{1}{1+\frac{6}{8}}\right)+4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}}+\frac{1}{1+\frac{3}{8}}+\frac{1}{1+\frac{5}{8}}+\frac{1}{1+\frac{7}{8}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}\right)+4\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)\right] = 0{,}693158\,..$$

Ebenso

$$\lg\frac{5}{4} = \lg\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\frac{5}{4}-1}{6\cdot\frac{8}{2}}\left[1+\frac{1}{\frac{5}{4}}+2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{32}}+\frac{1}{1+\frac{4}{32}}+\frac{1}{1+\frac{6}{32}}\right)+4\left(\frac{1}{1+\frac{1}{32}}+\frac{1}{1+\frac{3}{32}}+\frac{1}{1+\frac{5}{32}}+\frac{1}{1+\frac{7}{32}}\right)\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{3}\left[\frac{1}{8}+2\left(\frac{1}{8+\frac{2}{4}}+\frac{1}{8+\frac{4}{4}}+\frac{1}{8+\frac{6}{4}}\right)+4\left(\frac{1}{8+\frac{1}{4}}+\frac{1}{8+\frac{3}{4}}+\frac{1}{8+\frac{7}{4}}\right)+\frac{1}{8+\frac{8}{4}}\right]$$

$$= 2{,}2231435\ldots$$

Daraus folgt

$$^{e}\lg 10 = {}^{e}\lg\left(\frac{10}{8}\cdot 2^3\right) = \lg\frac{5}{4} + 3\lg 2 = 2{,}3026\ldots,$$

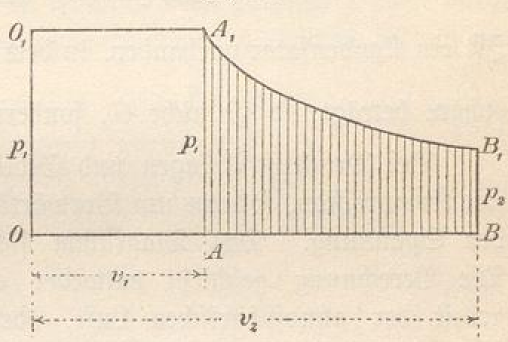
folglich

$$\text{Modul } m = \frac{1}{^{e}\lg 10} = 0{,}43429\ldots$$

Nimmt man eine größere Zahl von Streifen, so wird die Genauigkeit weit größer. Die Möglichkeit, die Logarithmen zu berechnen, darf damit als vorläufig sicher gestellt betrachtet werden.

12) Eine der wichtigsten Anwendungen dieser Formel ist die Berechnung der Expansions- und Kompressionsarbeit von Gasen unter Voraussetzung konstanter Temperatur, d. h. unter Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes. (Vgl. Teil II, Geom. 105.)

Fig. 135.



Stellt p_1 die Anfangsspannung, v_1 das Anfangsvolumen dar, p_2 die Schlußspannung, v_2 das Schlußvolumen, so ist nach Mariotte

$\frac{p_1}{p_2}=\frac{v_2}{v_1}$ oder $p_1 v_1 = p_2 v_2$.

Nun ist

$$OAA_1O_1 = p_1 v_1, \quad ABB_1A_1 = OAA_1O_1 \cdot {}^e\!\lg\frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1\, {}^e\!\lg\frac{v_2}{v_1}.$$

Folglich:

$$\textbf{Expansionsarbeit} = p_1 v_1\, {}^e\!\lg\frac{v_2}{v_1} = p_1 v_1 \left({}^{10}\!\lg\frac{v_2}{v_1}\right)\cdot\frac{1}{m},$$

wo $m = 0{,}4342945$ der Modul der Briggschen Logarithmen ist.

Dieselbe Formel gilt für die Kompressionsarbeit, nur ist dabei $v_2 < v_1$. Bei Dampf- und Druckluft-Maschinen stellt OAA_1O_1 zugleich die leicht zu berechnende Volldruckarbeit V vor, ABB_1A_1 gleichfalls die Expansionsarbeit; setzt man l_1 und l_2 statt v_1 und v_2 (Volldruckhub und gesamter Hub des Kolbens), so wird die Gesamtarbeit $= V + V\cdot {}^e\!\lg\frac{l_2}{l_1} = V\left[1 + {}^e\!\lg\frac{l_2}{l_1}\right] = V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\!\lg\frac{l_2}{l_1}\right]$.
Rechnet man den Arbeitsdruck in Kilogrammen pro qm, die Hubhöhe in Metern, und ist n die Tourenzahl der Maschine in der Minute bei hin- und rückwirkendem Dampfdruck, so ist die theoretische Leistung der Maschine in Pferdestärken

$$N = \frac{2n}{60\cdot 75}V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\!\lg\frac{l_2}{l_1}\right] = \frac{n}{2250}V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\!\lg\frac{l_2}{l_1}\right].$$

Das Dargestellte ist aber die Arbeit bezw. Leistungsfähigkeit unter der Annahme, daß jenseits des Kolbens sich ein luftleerer Raum befindet. Bei Auspuffmaschinen hat man aber den Gegendruck der Atmosphäre zu berücksichtigen. Ist G die leicht zu berechnende Gegenarbeit derselben pro Hub, so ist die theoretische Nutzarbeit für jeden Hub

$$V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right]-G;$$

also ist die Anzahl der Pferdestärken

$$N=\frac{n}{2250}\left[V\left(1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right)-G\right].$$

Ist ein Kondensator vorhanden, in dem die mittlere Spannung $\frac{1}{k}$ Atmosphäre beträgt, so ist nicht G, sondern $\frac{1}{k}\,G$ abzuziehen.

Bei Druckluft-Anlagen und Gebläsemaschinen handelt es sich erst um Kompression, sodann um Vorwärtstreiben der Luft ohne Erhöhung der Spannung. Das Diagramm sieht also theoretisch ebenso aus. Die Berechnung geschieht entweder ohne Berücksichtigung der Mitarbeit der atmosphärischen Luft, oder, wie es in der Praxis geschehen muß, unter Berücksichtigung derselben.

Hier muß man für die Praxis einen erfahrungsmäßigen Prozentsatz zuschlagen, während bei der Dampfmaschine und Heißluftmaschine ein gewisser Prozentsatz abzuziehen ist, wenn man den wirklichen Effekt beurteilen will.

Beispiele. a) Bei der gleichseitigen Hyperbel $y=\frac{1}{x}$ soll $\overset{2}{\underset{1}{F}}$, $\overset{3}{\underset{2}{F}}$, $\overset{5}{\underset{2}{F}}$ berechnet werden. Die Auflösungen sind 0,69314 ..., bezw. 0,40546 ..., 2,74887 ...

b) Bei einer Auspuffmaschine habe der Kolben den Durchmesser $d=0{,}6$ m, die Hubhöhe $l=1{,}2$ m, die Spannung $p=5$ Atmosphären. Ein Kondensator sei nicht vorhanden. Wie groß ist die theoretische Leistung in Pferdestärken bei $\frac{1}{3}$ Füllung, wenn das Mariottesche Gesetz zu Grunde gelegt wird und das Schwungrad 65 Touren macht?

Auflösung. Rund 253 Pferdestärken. (Also bei 60 % wirklichem Nutzeffekt rund 152 Pferdestärken.)

c) Dieselbe Aufgabe für den Fall, daß ein Kondensator vorhanden ist, der im Durchschnitt $\frac{1}{15}$ Atmosphäre Gegendruck giebt.

Auflösung. Theoretisch rund $347\frac{1}{2}$ Pferdestärken, bei 60 % Nutzeffekt $208\frac{1}{2}$ Pferdestärken.

Aufgabe. Wie vereinfacht sich die Formel bei Auspuffmaschinen, wenn bei $\frac{1}{n_1}$ Cylinder-Füllung mit n_1 Atmosphären begonnen wird?

Auflösung. Für jeden Hub und die Arbeitsleistung der Auspuffmaschine

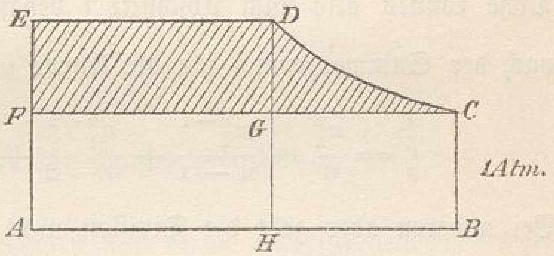
$$V + V \cdot {}^e\lg \frac{n}{1} - n \cdot \frac{V}{n} = V \cdot {}^e\lg \frac{n}{1}.$$

Also

$$N = \frac{n}{2250} \cdot {}^e\lg n_1 = \frac{n}{2250} \cdot \frac{1}{m} \, {}^{10}\lg n_1 .$$

Bemerkung. Dieser Fall ist technisch nicht zulässig*), weil durch die Arbeit Abkühlung und Spannungsverminderung eintritt, so daß am Schluß weniger als eine Atmosphäre Spannung herrscht. Das Diagramm stimmt aber überein mit dem Diagramm für den Vorgang in Kompressionscylindern. Zur Kompression würde nötig sein die Arbeit $BCDH$, zum Vorwärtstreiben der komprimierten Luft die Arbeit $HDEA$, die Atmosphäre hilft mit der Arbeit $BCFA$. Folglich ist zum Komprimieren und Vorwärtstreiben nötig die Arbeit $CDEF$.

Fig. 136.



Aufgabe. Ein Gebläsecylinder oder Druckluftcylinder habe 1 m Kolbendurchmesser und 2 m Hub. Die Luft soll auf $1\frac{1}{2}$ Atmosphären zusammengepreßt und dann aus dem Cylinder getrieben werden. Wie groß ist die Kompressionsarbeit unter Mitwirkung der Atmosphäre? (Auflösung: 1170,9 mkg). Wie groß die Arbeit für das Hinaustreiben unter Mitwirkung der Atmosphäre? (Auflösung: 5410 mkg). Wie groß die Gesamtarbeit? (Auflösung: 6581,8 mkg).

Die Formel $V \cdot {}^e\lg 1{,}5 = \frac{V \cdot {}^{10}\lg 1{,}5}{m}$ liefert ebenfalls direkt 6581,8 mkg, sobald unter V die Arbeit $HDEA$ oder $BCFA$ verstanden wird.

Macht die Maschine doppelwirkend 40 Touren, so sind theoretisch erforderlich ~ 117 Pferdestärken; bei 25 % Zuschlag wegen der Nebenwiderstände ~ 146 Pferdestärken.

Aufgabe. Wie viel Leistungsfähigkeit ist nötig, um pro Sekunde 1 cbm Luft auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$ des Raumes zusammenzupressen und unter konstantem Gegendruck aus dem Cylinder zu treiben?

*) Weiter unten wird das adiabatische Diagramm berechnet.

Auflösung. Man denke sich den Cylinderkolben von 1 qm Querschnitt und 1 m Gesamthub. Die obige Formel giebt dann die theoretische Leistungsfähigkeit von 95,5 Pferdestärken, $151\frac{1}{3}$ Pferdestärken, 191 Pferdestärken für die treibende Maschine.

---

13) Bemerkung über rationale gebrochene Funktionen.

Gewisse rationale gebrochene Funktionen lassen sich auf ganze rationale zurückführen, z. B.

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1.$$

Diese können also nach Abschnitt I behandelt werden. So ist z. B. nach der Summenformel für die Kurve $y = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^n}{n} + \frac{x_1^{n-1}}{n-1} + \frac{x_1^{n-2}}{n-2} + \cdots + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{1}.$$

Bei anderen aber geht die Division nicht auf, z. B. bei

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \left(\frac{x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Darf man das Restglied für $n = \infty$ vernachlässigen, so hat man eine konvergente unendliche Reihe, mit deren Gliedern vermutlich ebenso verfahren werden darf, wie mit einer ganzen rationalen Funktion. Diese Berechtigung ist genau zu untersuchen. Hat aber das Restglied nicht die Grenze 0, so ist die unendliche Reihe unbrauchbar.

Um also einen Fortschritt zu ermöglichen, hat man die Theorie der unendlichen Reihen aufzustellen. Dies soll im folgenden Abschnitte angebahnt werden.

III. Allgemeines über die unendlichen Reihen.

a) Rückblick auf die bereits bekannten Reihen.

14) In Folgendem soll unter „Reihe“ im Allgemeinen eine „unendliche Reihe“ verstanden werden.

In Teil II wurden folgende Reihen summiert:

1) Die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \text{ jedoch nur für } -1 < x < +1.$$

2) Die Exponential-Reihe

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=e^x,\text{ für jedes beliebige } x.$$

3) Die Sinus-Reihe

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sin x,\text{ für jeden beliebigen Bogen } x.$$

4) Die Cosinus-Reihe

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\cos x,\text{ für jeden beliebigen Bogen } x.$$

5) Die Reihe der potenzierten Zahlen:

$$\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{m=1}^{m=n=\infty} m^p=\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1},$$

für $n=\infty$ und zunächst nur für ganzes positives p.

15) Die Frage, ob die letztgenannte Reihe auch für gebrochenes p eine Summe hat, kann vorläufig nur teilweise auf geometrischem Wege untersucht werden.

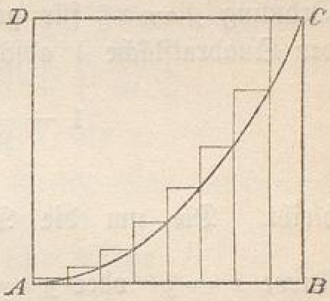
Figur 137 stellt ein Quadrat von der Seite 1 mit der einbeschriebenen Parabel $y=x^2$ dar. Die Basis ist in n gleiche Teile eingeteilt, und die zu Rechtecken vervollständigten Streifen haben die Inhaltssumme

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2,$$

oder, für $n=\infty$,

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

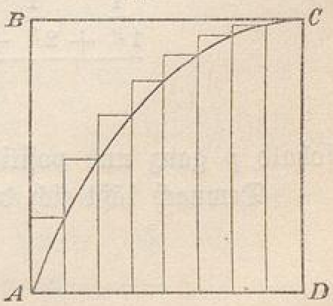
Fig. 137.



Da für $n=\infty$ die Treppenräume wegfallen, so ist das Quadrat durch die Parabel in die Flächenräume $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ eingeteilt.

Klappt man die Figur um die Diagonale AC, wodurch x und y vertauscht werden, so hat man die Parabel $x=y^2$ oder $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ mit horizontaler Achse.

Fig. 138.



Teilt man die Basis wieder in n gleiche Teile ein, so haben die entsprechenden Ordinaten der Reihe nach die Längen

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

die Inhaltssumme der zu Rechtecken ergänzten Streifen ist

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$\frac{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+1}}.$$

Für $n = \infty$ fallen die übergreifenden Treppenräume weg, und die schraffierte Fläche wird nach Obigem gleich $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}$. Folglich:

Für $n = \infty$ ist

$$\frac{1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + \cdots + n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}.$$

In derselben Weise zeigt man, daß die Parabel höherer Ordnung $y = x^p$ für ganzes positives p den $(p+1)^{\text{ten}}$ Teil von der Quadratfläche 1 abschneidet, so daß der Rest

$$1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1}$$

bleibt. Die um die Diagonale AC geklappte Figur giebt die Kurve $x = y^p$ oder $y = x^{\frac{1}{p}}$. Die neue Streifeneinteilung zeigt, daß für $n = \infty$ wiederum ist

$$\frac{1^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}} + 3^{\frac{1}{p}} + \cdots + n^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1},$$

sobald p ganz und positiv ist.

Demnach läßt sich die Formel

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{p+1}}{p+1}$$

auch dann auf die Kurve $y = x^p$ anwenden, wenn $p = \frac{1}{m}$ und m eine ganze Zahl ist. So ist z. B. für die Kurve $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4} x_1^{\frac{4}{3}}.$$

Schon darin liegt eine bedeutende Erweiterung.

Später aber soll gezeigt werden, daß die wichtige Formel 5 und damit auch die Flächenformel für beliebige Exponenten richtig bleibt, sobald diese nur größer als -1 sind.

b) Einiges über Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen mit lauter positiven Gliedern.

16) Nach Obigem giebt es Reihen, die für jeden beliebigen Wert der maßgebenden Größe x konvergent sind, wie z. B. die Exponentialreihe. Andere sind nur innerhalb gewisser Grenzen konvergent, wie z. B. die geometrische Reihe, andere stets divergent.

a) Eine Reihe ist divergent, sobald ihre Glieder zunehmen, oder gleich groß bleiben, oder wenn diese, obwohl sie abnehmen, stets über einer endlichen Größe bleiben.

So ist z. B. die Reihe

$$2 + \left(1\tfrac{1}{2}\right) + \left(1\tfrac{1}{4}\right) + \left(1\tfrac{1}{8}\right) + \left(1\tfrac{1}{16}\right) + \left(1\tfrac{1}{32}\right) + \cdots$$

divergent, weil die Glieder stets größer bleiben, als 1.

b) Selbst wenn die Glieder sich der Grenze Null unbegrenzt nähern, braucht die Reihe nicht konvergent zu sein.

So ist z. B. die sogenannte harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \cdots$$

divergent, was man an folgender Gruppierung erkennt:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right)$$
$$+ \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right) + \cdots$$

Hier hat jede Gruppe doppelt so viele Glieder, wie die vorhergehende. Die erste Klammer ist größer als $2 \cdot \frac{1}{4}$, die zweite größer als $4 \cdot \frac{1}{8}$, die folgende größer als $8 \cdot \frac{1}{16}$ u. s. w., jede Klammer also größer als $\frac{1}{2}$. Weil in der neuen Reihe jedes Glied größer als $\frac{1}{2}$ ist, muß sie divergieren.

Wie weit man also die harmonische Reihe auch summiere, stets bleibt der Rest größer als 1 oder eine andere endliche Zahl.

c) Diese Betrachtung führt auf folgendes Kriterium der Konvergenz: Eine Reihe konvergiert, wenn man den Rest, der nach der Summierung der n ersten Glieder übrig bleibt, dadurch beliebig klein machen kann, daß man n größer und größer macht.

Die Reihe zerfällt dann in zwei Teile, $s = s_n + r_n$, wo s_n die endliche Summe der n ersten Glieder, r_n die der Restglieder bezeichnet. Man nennt s_n das summatorische Glied, r_n das Restglied. Letzteres strebt der Grenze Null zu, ersteres einer bestimmten Grenze s, die mit der Summe der Reihe identisch ist.

Das Entscheidende für die Konvergenz ist also nicht die Abnahme der einzelnen Glieder bis zu unendlicher Kleinheit, sondern die Abnahme der gesamten Restsumme bis zu unendlicher Kleinheit, d. h. bis zur Null.

d) Ein zweites Kriterium beruht auf dem Prinzip der Reihenvergleichung, z. B. an dem Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Ist in einer unendlichen Reihe von einer bestimmten Stelle an jedes Glied kleiner, als das entsprechende einer konvergenten Reihe, so ist auch die erstere Reihe konvergent.

Weil nämlich der Rest der Hülfsreihe der Grenze Null zustrebt, so kann der Rest der andern Reihe keiner größeren Grenze zustreben.

e) Mit Hülfe der geometrischen Reihe ergiebt sich ein neues Kriterium. Bleibt der Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Gliedes von einer bestimmten Stelle ab angebbar kleiner als 1, so ist die Reihe konvergent.

Bleibt z. B. von einer bestimmten Stelle ab $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0{,}999$, so konvergiert die Reihe von dort ab in höherem Grade, als die geometrische Reihe

$$a_n + 0{,}999\, a_n + 0{,}999^2 a_n + 0{,}999^3 a_n + 0{,}999^4 a_n + \cdots$$
$$= \frac{a_n}{1 - 0{,}999} = 1000\, a_n,$$

bei der $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ stets gleich 0,999 ist. Die Glieder der zu untersuchenden Reihe sind eben von der betreffenden Stelle ab kleiner, als die der geometrischen Hülfsreihe. — Die harmonische Reihe ist nicht konvergent, denn bei ihr ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ für $n = \infty$ gleich 1, also nicht angebbar kleiner als 1.

f) Die genannten Kriterien sind durchaus nicht ausreichend zur wissenschaftlichen Begründung der Reihenlehre, sondern nur für das auf der höheren Schule zu behandelnde Gebiet derselben. Denn erstens bleibt in der Regel der Grenzfall selbst zweifelhaft; eine Reihe kann z. B. für $x < 1$ konvergent und für $x > 1$ divergent sein. Dann ist noch eine besondere Untersuchung des Falles $x = 1$ nötig, für den entweder das eine, oder das andere eintritt, oder etwa der Zweifel bestehen bleiben kann. Zweitens könnte es Reihen geben, die konvergent sind, obwohl die obigen Kriterien an ihnen nicht erkennbar sind. So ist z. B. nach Euler

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

obwohl $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$ für $n = \infty$ der Grenze 1 zustrebt.

Es handelt sich also um eine Reihe, bei der $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ schließlich nicht mehr angebbar kleiner ist, als 1, und die trotzdem konvergiert.

Ebenso ist $\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ und $\sum_1^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$. Die Beweise für diese Summierungen gehen über den Bereich der Schule hinaus. Es handelt sich hier nur um Beispiele für die schwierigeren Fälle.

g) Ist eine Reihe als konvergent nachgewiesen, so kann man jedes ihrer Glieder mit einer konstanten Größe k multiplizieren, ohne daß die Konvergenz verloren geht. Die neue Summe ist ks, wenn s die Summe der ursprünglichen Reihe ist.

Multipliziert man jedes der Glieder mit einer beliebigen positiven Zahl, bleiben aber die verschiedenen Faktoren kleiner als eine endliche Zahl k, so bleibt die Reihe konvergent, und ihre Summe ist kleiner als ks.

So ergiebt z. B. die Multiplikation des endlosen Dezimalbruchs

$$0{,}1111111\cdots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = \frac{1}{9}$$

mit 5 den endlosen Dezimalbruch

$$0{,}5555555\cdots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \cdots = \frac{5}{9},$$

also das 5-fache.

Dagegen giebt die Multiplikation der einzelnen Glieder mit ganz beliebigen einstelligen Zahlen (die sämtlich nicht größer als 9 werden) einen im allgemeinen irrationalen Dezimalbruch, dessen Summe endlich und kleiner ist als der 9-fache Bruch, oder als der Bruch, den man erhält, wenn man die Stelle, bei der man abbricht, um 1 erhöht. So ist z. B.

$$3\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{100} + 1\cdot\frac{1}{1000} + 5\cdot\frac{1}{10\,000} + 9\cdot\frac{1}{100\,000} + \cdots$$
$$= \pi = 3{,}14159\ldots < 3{,}14160.$$

17) Für eine konvergente Reihe sei die Summe

$$s = s_n + r_n,$$

wo s_n das summatorische Glied (die Summe der n ersten Glieder), r_n die Restsumme bezeichnet. Für eine zweite sei ebenso

$$\sigma = \sigma_n + \varrho_n.$$

Addition beider Reihen giebt

$$s + \sigma = s_n + \sigma_n + (r_n + \varrho_n).$$

Weil nun sowohl r_n als auch ϱ_n für $n = \infty$ der Grenze Null zustreben, so folgt, daß die durch Summierung entstandene Reihe ebenfalls konvergent ist, und daß ihre Summe gleich der Summe der beiden ursprünglichen Reihen ist.

Dasselbe gilt von der Subtraktion.

Durch Multiplikation der einzelnen Glieder beider Reihen erhält man

$$(s_n + r_n)(\sigma_n + \varrho_n) = s_n\sigma_n + r_n s_n + \varrho_n s_n + r_n\varrho_n.$$

Weil s_n endlich ist, r_n aber mit wachsenden n der Null zustrebt, so kann für $n = \infty$ $r_n s_n$ gestrichen werden. Dasselbe gilt von $\varrho_n s_n$. Endlich kann $r_n\varrho_n$ gestrichen werden, weil beide Faktoren der Null zustreben. Demnach ist die durch Multiplikation entstandene Reihe konvergent und ihre Summe ist gleich dem Produkte der Summen der beiden ursprünglichen Reihen.

Durch Division erhält man

$$\frac{s_n + r_n}{\sigma_n + \varrho_n} = \frac{\dfrac{s_n}{\sigma_n} + \dfrac{r_n}{\sigma_n}}{\dfrac{\sigma_n}{\sigma_n} + \dfrac{\varrho_n}{\sigma_n}}.$$

Wenn r_n und ϱ_n der Null zustreben, σ_n aber endlich ist, so kann man $\frac{r_n}{\sigma_n}$ und $\frac{\varrho_n}{\sigma_n}$ für $n = \infty$ streichen. Da ferner $\frac{\sigma_n}{\sigma_n} = 1$ ist, so bleibt rechts stehen $\frac{s_n}{\sigma_n}$.

Also: Mit konvergenten Reihen, die nur positive Glieder haben, kann man die Addition und Subtraktion, die Multiplikation und Division, folglich auch die Potenzierung und die Radicierung ebenso vornehmen, wie mit gewöhnlichen Zahlen. Die neuen Reihen sind stets konvergent und ihre Summe ist bekannt, wenn sie für die gegebenen bekannt war. Dasselbe gilt von allen Rechnungsarten, die aus den genannten sich ableiten lassen.

c) Einiges über Reihen, die auch negative Glieder enthalten.

18) a) Eine Reihe mit unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Gliedern ist unbedingt konvergent, wenn die positiven für sich eine konvergente Reihe bilden und die absoluten Beträge der negativen dasselbe thun. Denn man darf dann beide Hülfsreihen durch Subtraktion mit einander verbinden.

b) Sie ist ferner unbedingt konvergent, wenn die Summe der absoluten Beträge beliebig vieler Restglieder dadurch beliebig klein gemacht werden kann, daß man die Anzahl n der summierten Glieder (die s_n geben) groß genug macht.

c) Sie ist ferner unbedingt konvergent, wenn die Reihe der absoluten Beträge sämtlicher Glieder eine konvergente Reihe bildet.

d) Sie ist endlich unbedingt konvergent, wenn der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ von einem gewissen Gliede ab angebbar kleiner ist, als 1.

Die Beweise beruhen auf der Vergleichung mit den vorher behandelten Reihen.

e) Hat die Reihe abwechselnde Vorzeichen, so reicht es für die Konvergenz vorläufig aus, daß die Glieder zu unendlicher Kleinheit abnehmen. (Konvergente oscillierende Reihen.)

So ist z. B. in der hier geschriebenen Reihenfolge

$$s = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots$$

eine konvergente Reihe.

Gruppiert man nämlich folgendermaßen:

$$1 - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) - \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}\right) - \left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9}\right) - \cdots,$$

so erhält man die Reihe

$$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \frac{1}{42} - \frac{1}{72} - \cdots,$$

in der man, wenn man abbricht, stets eine zu große Summe hat.

Gruppiert man dagegen in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

d. h.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \cdots,$$

so erhält man eine zu kleine Summe, wenn man irgendwo abbricht.

Die ursprüngliche Reihe wird also zwischen immer engere Grenzen eingeschnürt, je weiter man geht. Es fragt sich, ob sich die Grenzen unbegrenzt nähern.

s_{2n+1} ist zu groß, s_{2n} ist zu klein; da aber

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1},$$

so ist für unendlich großes n $s_{2n+1} = s_{2n}$, d. h. die obere und untere Grenze nähern sich demselben Werte.

Die zu großen Werte sind der Reihe nach

$$1, \quad 0{,}83333\ldots, \quad 0{,}783333\ldots, \quad \ldots$$

die zu kleinen

$$\frac{1}{2}, \quad 0{,}58333\ldots, \quad 0{,}616666\ldots, \quad \ldots$$

Die Reihe ist aber nicht unbedingt konvergent, **denn die Summe hängt durchaus von der Anordnung der Glieder ab.**

Gruppiert man nämlich folgendermaßen:

$$\sigma = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{7}\right) + \cdots,$$

so daß auf zwei positive Glieder stets nur ein negatives folgt, so enthält die Reihe allerdings dieselben Glieder, wie vorher. Geht man aber bis zum $2n^{\text{ten}}$ Gliede, so hat man im ersten Falle gleichviel positive, wie negative Glieder, im andern Falle aber doppelt so viel positive, als negative. Vorher war s der Grenzwert von

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right),$$

jetzt dagegen ist σ der Grenzwert von

$$\sigma_n = \left(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Die Differenz ist

$$\sigma_n - s_n$$
$$= \tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right]^{*)}.$$

Für unendlich viele Glieder erhält man die Grenze

$$\sigma - s = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots\right] = \tfrac{1}{2}s.$$

Folglich ist

$$\sigma = \frac{3}{2}s.$$

Die Summe der Reihe hängt also wirklich von der Anordnung der Glieder ab. Deshalb sagt man, sie sei nicht unbedingt, sondern nur bedingt konvergent. Jeder Art gesetzmäßiger Anordnung entspricht eine besondere Summe.

19) Mit Reihen von nur bedingter Konvergenz muß man also ganz besonders vorsichtig sein. Die Vorsicht war bei dem Beispiele nötig, weil weder das Kriterium c), noch das Kriterium d) erfüllt war. ($\infty - \infty$ ist unbestimmt.)

Auch darauf sei aufmerksam gemacht, daß, wenn man die Glieder der betrachteten Reihe abwechselnd mit $+1$ und -1 multipliziert, die divergente harmonische Reihe entsteht. Dieselbe Operation würde eine unbedingt konvergente Reihe wiederum in eine unbedingt konvergente verwandeln. Hier aber geht die Konvergenz verloren. Man erkennt an dieser Stelle einen wichtigen Unterschied zwischen Reihen von endlicher und solchen von unendlicher Gliederzahl. Bei Reihen von endlicher Gliederzahl ist die Anordnung der Glieder gleichgültig; bei unendlichen Reihen ist sie nur gleichgültig für den Fall unbedingter Konvergenz, dagegen ist sie von Einfluß für den

*) Jede Einzelklammer ist in sich umgeformt worden, indem man ihre beiden letzten Glieder vereinigt hat.

Fall der nur bedingten Konvergenz. Von den für endliche Gliederzahl gültigen Gesetzen darf man also nicht ohne weiteres auf unendliche Reihen Anwendung machen.

Mit unbedingt konvergenten Reihen kann man sämtliche Rechnungsoperationen unbeirrt vornehmen; mit divergenten und nur bedingt konvergenten kann man aber nicht rechnen, wie mit geschlossenen Ausdrücken.

20) Nur noch einer besonderen Art von divergenten Reihen sei gedacht, der divergenten oscillierenden Reihen. Dies sind Reihen mit abwechselnden Vorzeichen, bei denen die Glieder entweder konstant sind, oder abnehmen, jedoch stets über einem bestimmten endlichen Werte bleiben. Solche Reihen sind z. B.

$$a + b - b + b - b + b - b + \cdots,$$

oder

$$4 - 3 + 2\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{4} + 2\tfrac{1}{8} - 2\tfrac{1}{16} + 2\tfrac{1}{32} - 2\tfrac{1}{64} + 2\tfrac{1}{128} + \cdots.$$

In der letzteren Reihe nähert sich die Schwankung immer mehr der Schwankung um ± 2. Die Summe ist also unbestimmt.

21) Reihen von der Form

$$s = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots$$

bezeichnet man als Potenzreihen. Die konstanten Faktoren a, b, c, d, ... können willkürlich sein, oder nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen. (Von negativen und gebrochenen Exponenten soll jetzt abgesehen werden, obwohl auch $a + bx^{-1} + bx^{-2} + bx^{-3} + \cdots$ und $a + bx^{\frac{1}{2}} + bx^{\frac{3}{2}} + \cdots$ hierher gehören.)

Drei Hauptfälle sind möglich: 1) Divergenz für jeden Wert von x; 2) Konvergenz für Werte von x, die zwischen zwei Grenzen liegen; 3) Konvergenz für alle Werte von x.

Beispiel zu 1. Die Reihe

$$1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + 5!x^5 + \cdots$$

divergiert für jeden Wert von x, denn es ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!x^n}{(n-1)!x^{n-1}} = nx.$$

Ist nun x auch noch so klein, das zunehmende n bewirkt schließlich, daß der absolute Wert von $n \cdot x > 1$ wird. Von da ab nehmen die Glieder der Reihe zu, und sie ist divergent.

Beispiel zu 2. Die Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

konvergiert für $-1 < x < 1$.

Beispiel zu 3. Die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

ist für jeden beliebigen Wert von x konvergent. Denn es ist von einem gewissen Gliede ab auch für noch so großes x der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n}$ absolut genommen kleiner als 1.

22) Sind nun z. B.

$$s = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots$$
$$s_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + e_1 x^4 + \cdots$$

zwei konvergente Potenzreihen, und liegt x für **beide** Reihen innerhalb der Konvergenzgrenzen, so sind nach Obigem folgende Rechnungsoperationen und Gleichsetzungen gestattet:

$$s + s_1 = (a + a_1) + (b + b_1)x + (c + c_1)x^2 + (d + d_1)x^3 + \cdots,$$
$$s - s_1 = (a - a_1) + (b - b_1)x + (c - c_1)x^2 + (d - d_1)x^3 + \cdots,$$
$$s \cdot s_1 = aa_1 + (ab_1 + ba_1)x + (ac_1 + bb_1 + ca_1)x^2 + (ad_1 + bc_1 + cb_1 + da_1)x^3 + \cdots.$$

Ebenso folgt aus der rein mechanischen Ausrechnung mit Hülfe des gewöhnlichen Divisionsschemas

$$s : s_1 = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots) : (a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + \cdots)$$
$$= \frac{a}{a_1} + \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2} x + \frac{a_1(a_1 c - ac_1) - b_1(a_1 b - ab_1)}{a_1^3} x^2 + \cdots.$$

Ferner ist

$$s^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + (2ad + 2bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + \cdots.$$

Auch andere Potenzierungen und ebenso die Wurzelausziehungen sind gestattet. So ist z. B. das Rechnen mit endlosen irrationalen Dezimalbrüchen erlaubt.

Im folgenden Abschnitte soll eine Potenzreihe von besonderer Wichtigkeit behandelt werden.

Sind die Konffizienten a, b, c, d ... zum Teil imaginär oder komplex, so ändert dies an der Betrachtung nichts. Ist dagegen bei einer Reihe x komplex, so kann man den reellen und den imaginären Teil der Reihe für sich betrachten und für jeden die Konvergenz untersuchen. Statt dessen kann man aber auch untersuchen, für welchen absoluten Betrag von $x + yi$, d. h. für welches $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Reihe konvergent ist. Die Grenzwerte von z liegen, geometrisch dargestellt, auf einem um Null geschlagenen Kreise, der als der Konvergenzkreis bezeichnet wird. Genauere Untersuchungen über diese Dinge überschreiten das Ziel der Schule.

IV. Die Newtonsche Reihe und der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten.

23) Die Newtonsche Reihe und ihre Konvergenz.

In Teil II, Arithmetik Nr. 30, war für ganze, positive Exponenten n bewiesen worden, daß

$$1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^n$$

ist, wobei die Reihe mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht.

Bildet man nun für ganz beliebiges p die sogenannte Newtonsche Reihe

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots,$$

so erstreckt sich diese im allgemeinen ins Unendliche, und es fragt sich, wann sie konvergent und wie groß dann ihre Summe ist.

Der Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Gliedes ist

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}x^n : \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}x^{n-1}$$

oder

$$\frac{(p-n+1)}{n}x = -x + \frac{p+1}{n}x.$$

Für sehr großes n nähert sich dies dem Grenzwerte $-x$. Ist der absolute Betrag desselben angebbar kleiner als 1, so ist nach 18 d) die Reihe konvergent, ist er größer, so ist sie divergent. Der Zwischen-fall, daß er gleich 1 ist, soll hier nicht untersucht werden. Für uns reicht Folgendes aus:

Die Newtonsche Reihe ist konvergent, sobald der absolute Betrag von x angebbar kleiner als 1 ist.

Um die Reihe zu summieren, muß man zunächst gewisse Eigenschaften ihrer Koeffizienten kennen lernen, wobei man vorläufig zum binomischen Satze für ganze positive Exponenten zurückzukehren hat.

Sind n und ν ganze, positive Zahlen, und bezeichnet man die Binominalkoeffizienten der Reihe nach mit $n_1, n_2, n_3, \ldots$ bezw. $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, so ist nach dem binomischen Satze

$$(1 + x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots,$$
$$(1 + x)^\nu = 1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \nu_4 x^4 + \cdots.$$

Durch Multiplikation erhält man daraus eine Formel für

$$(1 + x)^n \cdot (1 + x)^\nu = (1 + x)^{n+\nu},$$

nämlich

$$(1 + x)^{n+\nu} = 1 + (n_1 + \nu_1)\, x + (n_2 + n_1\nu_1 + \nu_2)\, x^2 + (n_3 + n_2\nu_1 + n_1\nu_2 + \nu_3)\, x^3 + \cdots,$$

während nach dem binomischen Satze bei entsprechender Bezeichnung der Koeffizienten zugleich ist:

$$(1 + x)^{n+\nu} = 1 + (n + \nu)_1\, x + (n + \nu)_2\, x^2 + (n + \nu)_3\, x^3 + \cdots.$$

Die Koeffizienten der entsprechenden Potenzen von x müssen, da es sich nur um eine andere Schreibweise handelt, in beiden Gleichungen übereinstimmen. Schreibt man sie in ihrer eigentlichen Form, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{n}{1} + \frac{\nu}{1} = \frac{n+\nu}{1},$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)}{1\cdot 2},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)(n+\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)(n+\nu-2)(n+\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

u. s. w.

An jeder dieser Gleichungen erkennt man auch durch Auswertung der rechten Seiten, daß sie identische sind.

Daß sie auch für gebrochene und negative n und ν identische sein müssen*), ergiebt sich durch folgende Überlegung. Ist n fest und ν veränderlich, so handelt es sich rechts und links der Reihe nach um Ausdrücke 1., 2., 3., 4., ... Grades in Bezug auf ν. Die Ausdrücke auf der linken Seite mögen daher der Reihe nach mit $f_1(\nu)$, $f_2(\nu)$, $f_3(\nu)$ ..., die auf der rechten mit $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ... bezeichnet werden. Sie sind der Reihe nach in Bezug auf ν vom 1., 2., 3. Grade, und sind ganze rationale Funktionen von ν, die für alle positiven ganzzahligen Werte nach dem binomischen Satze für ganzzahlige positive Exponenten übereinstimmen. Daher stimmen z. B. $f_p(\nu)$ und $\varphi_p(\nu)$, die vom p^{ten} Grade sind, für mehr als $p+1$ Werte überein, sind also nach Abschnitt 2) vollkommen identisch und stimmen für alle denkbaren Werte von ν, für gebrochene, irrationale und sogar für imaginäre und komplexe überein.

Dies gilt zunächst für jedes feste, ganzzahlige, positive n, also beim Grade p für mehr als $p+1$ solcher Werte; folglich sind sie aus demselben Grunde identisch als ganze rationale Funktionen von n. Damit ist die volle Identität nachgewiesen. Die Gleichungen gelten also, wenn man sie rein mechanisch und ohne jede Beziehung auf den binomischen Lehrsatz bildet, nicht nur für ganze und positive n, sondern auch für gebrochene, negative, sogar auch für irrationale, imaginäre und komplexe n und ν.

24) Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Man bilde rein mechanisch für beliebiges n und ν die Newtonschen Reihen

$$1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots = B(n),$$
$$1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \nu_4 x^4 + \cdots = B(\nu),$$

die unter der Voraussetzung $-1 < x < +1$ konvergent sind, so daß ihre unbekannten Summen mit $B(n)$ und $B(\nu)$ bezeichnet werden dürfen.

Durch Multiplikation geht aus konvergenten Reihen wiederum eine konvergente Reihe hervor, deren Summe gleich dem Produkte der ursprünglichen Summen ist. Demnach ist hier

$$1 + (n_1 + \nu_1)\,x + (n_2 + n_1\nu_1 + \nu_2)\,x^2$$
$$+ (n_3 + n_2\nu_1 + n_1\nu_2 + \nu_3)\,x^3 + \cdots = B(n)\cdot B(\nu).$$

*) Man hat dabei von der binomischen Entstehungsweise ganz abzusehen und die Gleichungen rein mechanisch hinzuschreiben.

Infolge der vorher bewiesenen Identitäten darf man (für beliebiges n und ν) für die linke Seite schreiben:

$$1 + (n + \nu)_1 x + (n + \nu)_2 x^2 + (n + \nu)_3 x^3 + \cdots,$$

was man analog mit $B(n + \nu)$ zu bezeichnen hat. Folglich gilt für die betreffenden unbekannten Summen identisch die Gleichung

$$1) \qquad B(n) \cdot B(\nu) = B(n + \nu),$$

in der man ohne weiteres das Additionstheorem der Potenzen gleicher Grundzahl wieder erkennt.

Sind also $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ ganz beliebige Zahlen, die zur mechanischen Bildung der Koeffizienten Newtonscher Reihen benutzt sind, so gilt für den Konvergenzfall $-1 < x < +1$ die Gleichung

$$2) \qquad B(\alpha) \cdot B(\beta) \cdot B(\gamma) \cdots = B(\alpha + \beta + \gamma + \cdots).$$

Setzt man hier $\alpha = \beta = \gamma = \cdots$, so folgt für beliebiges α, aber für ganzes positives n, die Formel

$$3) \qquad [B(\alpha)]^n = B(n\alpha).$$

Setzt man z. B. $\alpha = \frac{1}{n} \cdot m$, wo m und n ganze, positive Zahlen sind, so wird

$$\left[B\left(\frac{1}{n} \cdot m\right)\right]^n = B\left(n \frac{1}{n} m\right) = B(m).$$

Für ganzes positives m ist aber $B(m) = (1 + x)^m$, folglich ist

$$B\left(\frac{m}{n}\right) = [B(m)]^{\frac{1}{n}} = (1 + x)^{\frac{m}{n}},$$

d. h.: Die Gleichung

$$1 + \frac{p}{1} x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots = (1 + x)^p$$

gilt bei $-1 < x < +1$ auch für den positiven, gebrochenen Exponenten $p = \frac{m}{n}$.

Setzt man in $B(\alpha) \cdot B(\beta) = B(\alpha + \beta)$ für β den Wert $-\alpha$ ein, so wird

$$B(\alpha) \cdot B(-\alpha) = B(\alpha - \alpha) = B(0) = (1 + x)^0 = 1,$$

also ist

$$B(-\alpha) = \frac{1}{B(\alpha)}.$$

Ist nun α eine positive, gebrochene oder ganze Zahl, so ist $B(\alpha) = (1 + x)^\alpha$, also

$$B(-\alpha) = \frac{1}{(1 + x)^\alpha} = (1 + x)^{-\alpha}.$$

Folglich: Die Gleichung

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^p$$

gilt bei $-1 < x < +1$ auch für den negativen (ganzen oder gebrochenen) Exponenten $p = -\alpha$.

Bemerkung. Auf den Fall, wo in $(1+x)^p$ der Exponent p irrational oder imaginär ist, braucht die Elementarmathematik nicht einzugehen. Die Potenz bedarf dann einer besonderen Definition, und diese wird durch die entsprechende Newtonsche Reihe gegeben, die dann neuen Untersuchungen zu unterwerfen ist.

25) Binomische Entwickelung irrationaler Ausdrücke.

Der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten gestattet eine derartige Fülle von Anwendungen, daß er als ein Haupthebel der neueren Mathematik bezeichnet werden darf. Zunächst finden die in Teil II über die Exponentialreihe, den Moivreschen Lehrsatz, über die Reihen für Cosinus und Sinus gegebenen Ausführungen ihre Abrundung durch das Aufheben der Beschränkung auf ganze positive n. Andere Anwendungen sind die jetzt folgenden.

Aufgabe. Die Ausdrücke $\sqrt{1+x}$ oder $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1-x}$ oder $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{1 \pm x}$ oder $(1 \pm x)^{\frac{1}{3}}$, sollen für $-1 < x < +1$ in Reihen entwickelt werden.

Auflösung 1.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2}x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{1536}x^5 - \cdots.$$

Beispiel.

$$\sqrt{146} = \sqrt{144+2} = \sqrt{144}\sqrt{1+\frac{2}{144}} = 12\sqrt{1+\frac{1}{72}}$$

$$= 12\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{72} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{72^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{72^3} - \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{72^4} + \cdots\right] = ?$$

Die Reihe konvergiert sehr schnell. Weil die Vorzeichen abwechseln, liegt der wahre Wert stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Summenwerten s_n und s_{n+1}.

Auflösung 2.

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 - \tfrac{7}{1536}x^5 - \cdots.$$

Beispiel.

$$\sqrt{142} = \sqrt{144-2} = 12\sqrt{1-\tfrac{1}{72}}$$

$$= 12\left[1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{72^2} - \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{72^3} - \tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{72^4} - \cdots\right] = ?$$

Auflösung 3.

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3^2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \tfrac{2\cdot 5}{3^3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

oder auch

$$= 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3\cdot 6}x^2 + \tfrac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15}x^5 + \cdots$$

Ebenso

$$(1-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3\cdot 6}x^2 - \tfrac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15}x^5 - \cdots$$

Das wirkliche Wurzelausziehen ist also durch diese Reihen wesentlich erleichtert, namentlich in größerer Nähe von Zahlen, aus denen die Wurzel glatt ausgezogen werden kann.

Aufgabe. Bilde mit Hülfe dieser Resultate die Reihen für

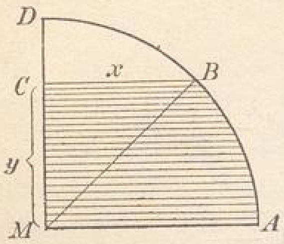
$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x};\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x};\ \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x};$$
$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}.$$

Aufgabe. Bilde die Reihen für $\dfrac{1}{\sqrt{1\pm x}} = (1\pm x)^{-\frac{1}{2}}$ für $\sqrt[3]{1\pm x} = (1\pm x)^{-\frac{1}{3}}$ u. s. w.

Man ist jetzt im Stande, für Kurven von der Gleichung $y = (a+bx)^n = a^n\left(1+\dfrac{b}{a}x\right)^n$, wo n auch negativ und gebrochen sein darf, die Flächenberechnung $\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}}$ und die Bestimmung der Tangentenrichtung für jeden Punkt durchzuführen.

26) Ableitung von Reihen für π, $\arcsin y$ und $\arccos y$ auf geometrischem Wege.

Fig. 139.



a) Figur 139 stellt einen Viertelkreis vom Radius 1 dar. Seine Gleichung ist $x^2 + y^2 = 1^2$, also ist der Querschnitt in Höhe y

$$x = \sqrt{1 - y^2} = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder, in binomischer Reihenentwickelung,

$$x = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^4 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^6 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}y^8 - \cdots.$$

Die Fläche $MABC$, d. h. die Fläche bis zur Höhe y, ist also nach der Summenformel

$$1)\quad \overset{y}{\underset{0}{F}} = \frac{y}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{y^3}{3} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{y^5}{5} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{y^7}{7} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\frac{y^9}{9} - \cdots.$$

Die Fläche, bis zur Höhe 1 genommen, ist gleich $\frac{\pi}{4}$, also hat man die Reihe

$$2)\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1\cdot 1}{2!}\cdot\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1\cdot 3}{3!}\cdot\frac{1}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!}\cdot\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5!}\cdot\frac{1}{11} - \cdots$$

oder auch

$$2^*)\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{1}{11} - \cdots$$

b) Dagegen ist

$$\text{Sektor } MAB = MABC - MBC = \overset{y}{\underset{0}{F}} - y\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[2\overset{y}{\underset{0}{F}} - y\sqrt{1-y^2}\right],$$

also

$$\text{Sektor } MAB$$

$$= \frac{y}{2}\left[\frac{2}{1} - \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1!}\frac{y^2}{3} + \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{y^4}{5} - \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{y^6}{7} + \cdots\right]$$

$$- \frac{y}{2}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^4 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^6 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{y^9}{9} + \cdots\right].$$

Nun ist aber Sektor $MAB = \widehat{AB} \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin y$. Gleichsetzung giebt

3)
$$\operatorname{arc} \sin y$$
$$= \frac{y^1}{1} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{y^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\frac{y^9}{9} + \cdots.$$

Schon die Anschauung zeigt, daß y nicht > 1 genommen werden darf.

Ohne besondere Konvergenzuntersuchung leuchtet geometrisch ein, daß für $y = 1$ die Reihe noch konvergiert. Dabei handelt es sich um $\frac{\pi}{2}$, und zwar ist

4) $$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} + \cdots.$$

Aus 2*) und 4*) folgt noch durch Subtraktion

5) $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{11} + \cdots.$$

Nach derselben Figur ist $\operatorname{arc} \cos y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin y$, also

6) $$\operatorname{arc} \cos y = \frac{\pi}{2} - \left[y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{y^7}{7} + \cdots \right].$$

Setzt man für $\frac{\pi}{2}$ seine Reihe ein, so entsteht

7) $$\operatorname{arc} \cos y = (1 - y) + \frac{1}{2}\frac{1 - y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{1 - y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{1 - y^7}{7} + \cdots$$

Die Konvergenzgrenzen sind dieselben wie vorher.

[Nun ist ferner

$$\widehat{AB} = \operatorname{arc} \tan \frac{y}{x} = \operatorname{arc} \tan \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = \operatorname{arc} \sin y,$$

also

$$\operatorname{arc} \tan \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = y \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{y^4}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{y^6}{7} + \cdots \right].$$

Setzt man also $\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = z$, d. h. $y = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$, so erhält man

$$\operatorname{arc} \tan z$$
$$= \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{z^2}{3(1 + z^2)} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{z^4}{5(1 + z^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^6}{7(1 + z^2)^3} + \cdots \right].$$

An Stelle dieser Reihe, die sich nur unbequem umwandeln läßt, wird jedoch später eine weit einfachere treten. Vorläufig möge sie zeigen, daß auch $\operatorname{arc} \tan z$ in einer nach ungeraden Potenzen aufsteigende Reihe entwickelt werden kann. Auch die letzte Reihe giebt für $z = 1$ eine brauchbare Entwickelung für $\frac{\pi}{4}$.

Später wird die Reihe für $\operatorname{arc\,sin} y$ auf rein arithmetischem Wege entwickelt werden.

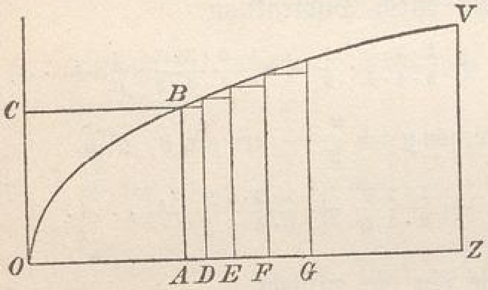
Man merke noch

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{128}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\right)+\cdots].$$

V. Anwendung auf algebraische Funktionen.

27) Quadratur der Kurven $y = x^p$ für beliebiges reelles p. Figur 140 stellt ein Quadrat $OABC$ von der Seite 1 und eine Parabel höherer Ordnung von der Gleichung $y = x^p$ dar, wo jedoch p eine gebrochene positive oder negative Zahl sein soll. Die Fläche $AZVB$ soll berechnet werden. OZ soll vorläufig unbestimmt bleiben. Jetzt sei $\frac{m}{n}$ ein beliebiger echter Bruch. Man

Fig. 140.



mache $OD=\left(1+\frac{m}{n}\right)$, $OE=\left(1+\frac{m}{n}\right)^2$, $OF=\left(1+\frac{m}{n}\right)^3$, und fahre so fort bis $OZ=\left(1+\frac{m}{n}\right)^n$, so daß man durch die entsprechenden Ordinaten n Flächenstreifen erhält, die man wie in der Figur als Rechtecke auffasse.

Die Grundlinien der Rechtecke sind der Reihe nach: $\frac{m}{n}$,

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^2-\left(1+\frac{m}{n}\right)=\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n}-1\right)=\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right),$$

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^3-\left(1+\frac{m}{n}\right)^2=\left(1+\frac{m}{n}\right)^2\left(1+\frac{m}{n}-1\right)=\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^2,$$

und so geht es weiter bis $\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n-1}$.

Die Höhen sind der Reihe nach

$$1,\ \left(1+\frac{m}{n}\right)^p,\ \left[\left(1+\frac{m}{n}\right)^2\right]^p=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{2p},\ \left(1+\frac{m}{n}\right)^{3p},\ \ldots,\ \left(1+\frac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Das letzte Lot $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{np}$ bleibt unbenutzt.

Die Inhaltssumme der Rechtecke ist also

$$\frac{m}{n}\left[1+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{p+1}+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{2(p+1)}+\cdots+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)}\right].$$

Dies ist eine geometrische Reihe von n Gliedern und von der Form

$$\frac{m}{n}[1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}] = \frac{m}{n} \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

so daß die Summe der Rechtecksinhalte wird

$$\frac{m}{n} \frac{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{p+1}}$$

oder

$$\frac{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{\frac{n}{m}\left[1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{p+1}\right]}.$$

Der Nenner giebt, nach der binomischen Reihe für gebrochene Exponenten entwickelt,

$$\frac{n}{m}\left[1 - 1 - \frac{p+1}{1}\frac{m}{n} - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}\frac{m^2}{n^2} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{m^3}{n^3} - \cdots\right]$$

$$= -\frac{p+1}{1} - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}\frac{m}{n} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{m^2}{n^2} - \cdots.$$

Denkt man sich nun m endlich, aber n unendlich groß, so fallen die Glieder dieser ohnehin schnell konvergierenden Reihe fort, und der Nenner reduziert sich auf $-(p+1)$. Zugleich aber geht der Zähler über in $1 - e^{m(p+1)}$, und da zugleich die Treppenräume über den unendlich zahlreich gewordenen Flächenräumen verschwunden sind, so ist die Fläche $AZVB$ geworden:

1) $$F = \frac{1 - e^{m(p+1)}}{-(p+1)} = \frac{e^{m(p+1)} - 1}{p+1}.$$

Nun war $OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m$, also die Abscisse $x_1 = e^m$.

Setzt man diesen Wert ein, so ergiebt sich die Fläche

2) $$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = \frac{x_1^{p+1} - 1}{p+1}.$$

Für ein größeres x_2 ist ebenso $\overset{x_2}{\underset{1}{F}} = \frac{x_2^{p+1} - 1}{p+1}$.

Durch Subtraktion erhält man als Fläche über $x_2 - x_1$

3) $$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2^{p+1} - x_1^{p+1}}{p+1}.$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man von $x = 1$ nach links gehend die innerhalb des Quadrates liegende Diagrammfläche untersucht. Man hat nur $-\frac{m}{n}$ statt $+\frac{m}{n}$ in die Rechnung einzuführen, so daß es sich um die Abstände

$$1,\quad \left(1-\frac{m}{n}\right),\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^2,\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^3,\quad \cdots\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^n$$

handelt.

Die Grundlinien der nach links an Breite abnehmenden Rechtecke sind dann

$$-\frac{m}{n},\quad -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right),\quad -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)^2,\quad \cdots\quad -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-1}.$$

Die Höhen sind

$$1,\ \left(1-\frac{m}{n}\right)^p,\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^{2p},\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^{3p},\quad \cdots,\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Die Inhaltssumme der Rechtecke wird

$$-\frac{m}{n}\left[1+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{p+1}+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{2(p+1)}+\cdots+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)}\right]$$
$$=-\frac{m}{n}\,\frac{1-\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{1-\left(1-\frac{m}{n}\right)^{p+1}}.$$

Die Wiederholung der früheren Behandlung mit $n=\infty$ giebt

$$F=\frac{1-e^{-m(p+1)}}{-(p+1)}=\frac{e^{-m(p+1)}-1}{p+1}.$$

Setzt man $OZ_1=\left(1-\frac{m}{n}\right)^n=e^{-m}=x_1$, so erhält man wieder die Formeln 2) und 3).

Mit Ausnahme des Exponenten $p=-1$, der auf die Fläche $\frac{x_2{}^0-x_1{}^0}{0}=\frac{0}{0}$ führt, was unbestimmt ist, sind damit die Diagramme für alle Parabeln höherer Ordnung $y=x^p$ berechnet. Der Fall -1, der auf die gleichseitige Hyperbel $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ führt, ist aber schon vorher besonders behandelt worden.

Dieser Grenzfall scheidet zwei Gruppen von Parabeln höherer Ordnung von einander, für welche einerseits $p>-1$ und $p<-1$ ist.

a) Für $p>-1$ ist die von 1 bis 0 gehende Fläche, da $(p+1)$ positiv ist,

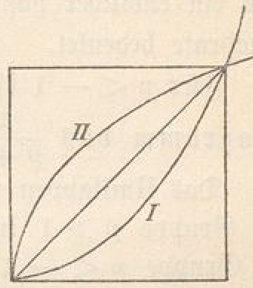
$$\overset{0}{\underset{1}{F}}=\frac{0^{p+1}-1}{p+1}=\frac{-1}{p+1},$$

also in entgegengesetzter Richtung genommen

4) $$\overset{1}{\underset{0}{F}} = \frac{1}{p+1},$$

d. h.: Für $p > -1$ schneidet die Parabel p^{ter} Ordnung den $(p+1)^{\text{ten}}$ Theil vom Quadrate ab.

Fig. 141.



Dabei ist die Parabel nach rechts steigend, sobald $p > 0$ ist, dagegen nach rechts sinkend, sobald $-1 < p < 0$ ist. Im letzteren Falle beginnt sie mit der Ordinate ∞, und trotzdem ist die ins Unendliche reichende schraffierte Fläche vom Inhalte $\frac{1}{p+1}$. Die Grenze bildet die gleichseitige Hyperbel. Bei $p > +1$ ist die Parabel von unten gesehen konvex, bei p positiv und < 1 ist sie konkav, bei $p = 1$ fällt sie mit der Diagonale zusammen.

Fig. 142.

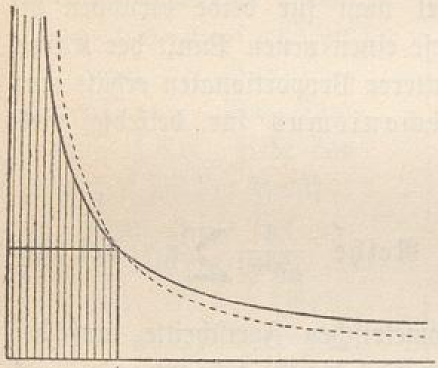
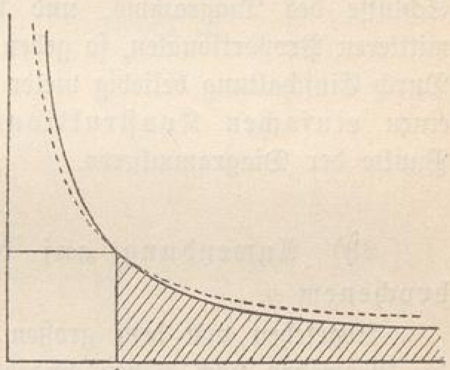


Fig. 143.



Für den gesamten Fall a) ist aber $\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{\infty^{p+1} - 1}{p+1} = \infty$.

b) Für $p < -1$ ist $p + 1$ negativ, also

$$0^{p+1} = \frac{1}{0^{-(p+1)}} = \infty \quad \text{und} \quad \infty^{p+1} = \frac{1}{\infty^{-(p+1)}} = 0.$$

Folglich ist jetzt

$$\overset{0}{\underset{1}{F}} = \frac{0^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{\infty - 1}{p+1} = \frac{\infty}{p+1} = -\infty,$$

weil der Nenner negativ ist, also

$$\overset{1}{\underset{0}{F}} = +\infty.$$

Dagegen ist die schraffierte Fläche (Figur 143)

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{\infty^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{0-1}{p+1} = -\frac{1}{p+1},$$

was ein endlicher positiver Wert ist, und wieder das $\frac{1}{p+1}$-fache vom Quadrate bedeutet.

Für $p < -1$ ist also das von $x = 1$ bis $x = \infty$ gehende Diagramm das $\frac{1}{p+1}$-fache des Quadrates.

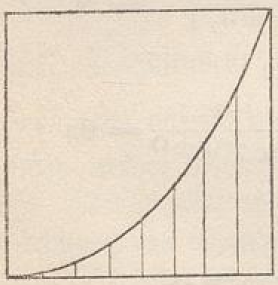
Das Umklappen um die Diagonale verwandelt bei positivem p die Gruppe $p > 1$ in die Gruppe $0 < p < 1$; bei negativem p die Gruppe $p < -1$ in die Gruppe $-1 < p < 0$. Dadurch bestätigen sich die gefundenen Resultate.

An Figur 140 wurde gezeigt, daß, wenn bei Parabeln höherer Ordnung die Abscissen eine geometrische Reihe bilden, die Ordinaten dasselbe thun. Kennt man also die Koordinaten am Anfange und Schlusse des Diagramms, und bildet man für beide Gruppen die mittleren Proportionalen, so geben diese einen neuen Punkt der Kurve. Durch Einschaltung beliebig vieler mittlerer Proportionalen erhält man einen einfachen Konstruktionsmechanismus für beliebig viele Punkte der Diagrammkurve.

28) Anwendung auf die Reihe $\frac{1}{n^{p+1}} \sum n^p$ bei gebrochenem p.

Abgesehen von dem großen geometrischen Fortschritte, auf den die Geometrie noch näher eingehen wird, ergiebt sich für $p > -1$ durch Einteilung der im Quadrate befindlichen Diagrammfläche in unendlich viele Streifen von gleicher Breite, daß die Formel

Fig. 144.



$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$
$$(\text{für } n = \infty)$$

für jedes reelle p gilt, welches größer ist, als -1.

[Daß die Formel für $p < -1$ unbrauchbar ist, ergiebt sich schon daraus, daß dann links Positives, rechts Negatives steht. Dies geht auch daraus hervor, daß für $p < -1$ der Zähler eine endliche Summe giebt, während der Nenner gleich Null wird.]

So ist z. B.

$$\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4},$$

Dagegen

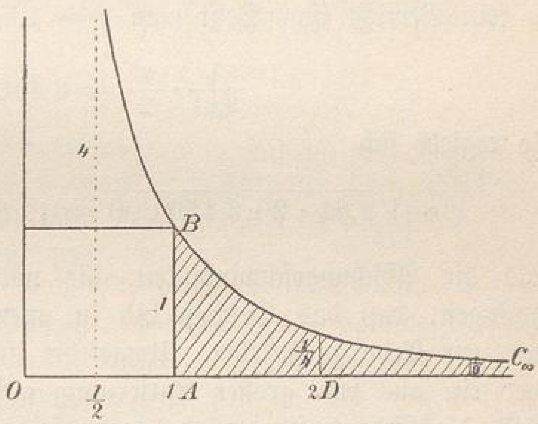
$$\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}} = \frac{1^{-\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}+\cdots+n^{-\frac{1}{3}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

29) Anwendung auf die Gravitation.

Von besonderer Wichtigkeit ist geometrisch der Fall $p = -2$, denn nach Teil II Geom. Nr. 104 ist $y = x^{-2}$ die Gleichung der Gravitationskurve. Das Diagramm ABC_∞ giebt das Potential für den Punkt A an, wenn in O der anziehende Körper steht.

Fig. 145.



Ist O der Erdmittelpunkt, OA der Erdradius, und wiegt ein Körper an der Oberfläche in A 1 kg, wieviel Arbeit ist dann nötig, ihn in die Entfernungen 2, 3, 4, ... ∞ zu bringen?

Auflösung.

$$\overset{2}{\underset{1}{F}} = \frac{2^{-1}-1}{-2+1} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2-1} = \frac{1}{2}$$

giebt die Hälfte des Quadrates. Letzteres bedeutet die Arbeit, die zur Überwindung eines Widerstandes von 1 kg längs des Weges $860 \cdot 7500$ m (Erdradius) nötig ist. Also ist zum Entfernen des Körpers bis zur Stelle D die Arbeit $\frac{1}{2} \cdot 860 \cdot 7500 = 3\,225\,000$ mkg nötig.

Ebenso ist

$$\overset{3}{\underset{1}{F}} = \frac{3^{-1}-1}{-2+1} = \frac{\frac{1}{3}-1}{-1} = \frac{2}{3} \text{ des Quadrates.}$$

$$\overset{4}{\underset{1}{F}} = \frac{4^{-1}-1}{-2+1} = \frac{\frac{1}{4}-1}{-1} = \frac{3}{4} \text{ des Quadrates.}$$

Dies bedeutet 4 300 000 mkg bezw. 4 837 500 mkg Arbeit.

Endlich ist

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{-1}{-2+1} = 1,$$

d. h. gleich der Quadratfläche selbst. Das Fortschaffen des Körpers bis in unendliche Entfernung verlangt also 6 450 000 mkg Arbeit. (Potential der Anziehung zwischen Erd- und Kilogrammasse für die Erdoberfläche.)

Nun hat aber ein mit der Geschwindigkeit v fortgeschleuderter Körper die Arbeitswucht (lebendige Kraft) $m \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{q}{9{,}81} \cdot \frac{v^2}{2}$, wenn q sein Gewicht ist. Setzt man $q = 1$ kg:

$$\frac{1}{9{,}81} \cdot \frac{v^2}{2} = 6\,450\,000,$$

so ergiebt sich

$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot 2 \cdot 6\,450\,000} = 11\,249 \text{ m} = \sim 1\tfrac{1}{2} \text{ Meile}$$

als die Abschußgeschwindigkeit, die nötig sein würde, um zu erzwingen, daß das Geschoß bis in unendliche Entfernung geht und nie zur Erde zurückkehrt. Umgekehrt ist es die Geschwindigkeit, mit der ein aus sehr großer Entfernung auf die Erde fallender Meteorstein die Erde treffen würde, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit Null war. Division durch 425 würde die Anzahl von Calorien geben, die dabei höchstens entwickelt werden können, nämlich 15 177. Ähnliche Aufgaben lassen sich für den Sonnenkörper lösen*).

Durch die Betrachtung der Kurven $y = x^{-2}$ wird also der Einblick in kosmologische und astronomische Verhältnisse gewonnen, der zum Verständnis wichtiger Forschungsresultate der neueren Zeit führt.

*) Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gr} = 86{,}41$ Meilen; Anzahl der Calorien für jedes kg fallender Masse 49 412 000. Ist also die Sonne durch allmählichen Zusammensturz kosmischer Massen entstanden, so erscheint ihr hoher Wärmegrad trotz der Ausstrahlung als etwas ganz Natürliches.

30) Anwendung auf adiabatische Expansions- und Kompressions-Diagramme.

Eine der wichtigsten Parabeln höherer Ordnung ist die adiabatische*) Expansionskurve, d. h. die Diagrammkurve für die Expansionsarbeit abgesperrter Gase unter der Bedingung, daß Wärme weder durch die Cylinderwände hindurch verloren geht, noch künstlich von außen hereingebracht wird. Der Dampf arbeitet also unter Arbeitsleistung und kühlt sich dabei ab, weil auf je 425 mkg geleisteter Arbeit eine Calorie verloren geht. Die Spannung nimmt also schneller ab als bei Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes (konstante Temperatur).

Es handelt sich bei dem adiabatischen Zustande um das Poissonsche oder potenzierte Mariottesche Gesetz $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m$, wo m für atmosphärische Luft den Wert 1,41, für gesättigte Dämpfe durchschnittlich $1,125 = \frac{9}{8}$ hat. Die Spannungen verhalten sich also umgekehrt wie die entsprechend potenzierten Volumina. Das physikalische Gesetz läßt sich elementar nachweisen.

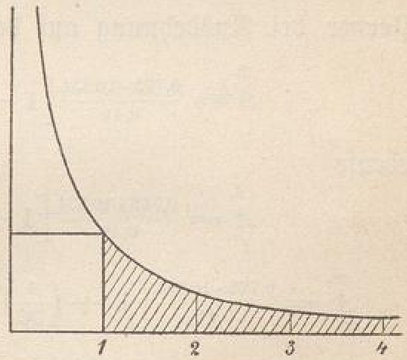
Die adiabatische Kurve hat also eine Gleichung von der Form

$$\frac{y}{y_1} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^{1,41}, \quad \text{oder} \quad y = (y_1 x_1^{1,41})\, x^{-1,41}.$$

(Statt 1,41 gegebenenfalls 1,125 gesetzt.)

Aufgabe. Die Kurve $y = x^{-1,41}$ hat an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ welche Ordinaten? Von 1 ab gerechnet ist das Diagramm bis 2, 3, 4, ... wie groß?

Fig. 146.



Auflösung. $y = \infty, 1, 0,3761, 0,21245, 0,14161$.

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = -\frac{1}{1+p} = -\frac{1}{-1,41+1} = \frac{1}{0,41} = 2,439,$$

$$\overset{\infty}{\underset{2}{F}} = -\frac{2^{-1,41+1}}{-1,41+1} = \frac{1}{0,41 \cdot 2^{0,41}} = 1,8362,$$

$$\overset{2}{\underset{1}{F}} = 2,439 - 1,8362 = 0,603.$$

Entsprechend sind die anderen Fragen zu lösen.

*) $\dot{\alpha}$ = nicht, $\delta\iota\dot{\alpha}$ = durch, $\beta\alpha\acute{\iota}\nu\omega$ = gehen. Es handelt sich um „Nichtdurchgang" von Wärme durch die Cylinderwände.

Aufgabe. Wie groß ist das Diagramm der Adiabate von x_1 bis x_2?

Auflösung.

$$\overset{x_2}{\underset{x^1}{F}} = (y_1 x_1^{1,41}) \frac{x_2^{-1,41+1} - x_1^{-1,41+1}}{-1,41+1} = x_1^{1,41} y_1 \frac{x_1^{-0,41} - x_2^{-0,41}}{0,41}$$

$$= x_1^{1,41-0,41} \cdot y_1 \frac{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-0,41}}{0,41}$$

oder endlich

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_1 y_1}{0,41}\left[1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0,41}\right].$$

Beispiele.

Aufgabe. Ein Kilogramm atmosphärischer Luft von einer Atmosphäre Spannung und von Null Grad Celsius dehne sich adiabatisch unter voller Arbeitsleistung auf das doppelte, dreifache, vierfache, unendlichfache des Volumens aus. Wieviel Arbeit wird dabei geleistet?

Auflösung. Ein Kilogramm Luft von solchem Zustande nimmt den Raum 0,773 cbm ein und giebt auf 1 qm Druckfläche 10 334 kg Druck. Denkt man sich die Kolbenfläche des Cylinders als 1 qm, also den Anfangsdruck y_1 als 10 334 kg, und die Entfernung x_1 des Kolbens vom Cylinderboden als 0,773 m, so hat man bei Ausdehnung auf das doppelte Volumen $(x_2 = 2 \cdot 0773)$:

$$\text{Arbeit} = \frac{x_1 y_1}{0,41}\left[1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0,41}\right] = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{0,41}\right] = 4819,7 \text{ mkg}.$$

Ferner bei Ausdehnung auf das dreifache Volumen:

$$\overset{3}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{0,41}\right] = 7065,8 \text{ mkg};$$

ebenso

$$\overset{4}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{0,41}\right] = 8447,1 \text{ mkg};$$

$$\overset{\infty}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\frac{1}{\infty}\right)^{0,41}\right] = \frac{0,773 \cdot 10\,334}{0,41} = 19\,484 \text{ mkg}.$$

Bemerkungen. Die Schlußspannungen sind nach der Formel $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{1,41}$ der Reihe nach $p_2 = 0,3761$ Atm., $p_3 = 0,21245$ Atm., $p_4 = 0,14161$ Atm., $p_\infty = 0$ Atm. Die Physik lehrt, daß auf je 425 mkg geleisteter Arbeit 1 Calorie verloren geht, und daß die Luft die Kapazität $C_v = 0,16851$ hat, d. h. daß 0,16851 Calorie nötig sind, um 1 kg Luft um 1^0 zu erwärmen. Bei der Ausdehnung auf das ∞-fache Volumen gehen also $\frac{19\,484}{425}$ Calorien verloren und die Temperaturerniedrigung beträgt $\frac{19\,484}{425 \cdot 0{,}16851}$ Grad Celsius, d. h. die Luft kommt auf den absoluten Nullpunkt, etwa -273^0 C. In ähnlicher Weise sind die Schlußtemperaturen bei den übrigen Fällen zu berechnen. So erkennt man z. B., daß Luft, die ein Gebirge übersteigt, infolge der beim Steigen stattfindenden Ausdehnung und der aus letzterer folgenden Arbeitsleistung sich ganz erheblich abkühlt.

Setzt man in die Arbeitsformel statt des Exponenten 0,41 den Exponenten $1{,}125 - 1 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$ ein, so erhält man die Arbeitsleistung des Wasserdampfes in der Dampfmaschine. Schlußspannung und Schlußtemperatur ergeben sich ebenfalls (letztere mit Hülfe des entsprechenden C_v), allerdings unter der Voraussetzung, daß keine Kondensation stattfindet.

Aufgabe. Ein Kilogramm Luft von 0^0 C. und 1 Atm. Spannung werde auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ des Volumens zusammengepreßt. Wieviel Arbeit ist nötig, wie groß ist die Schlußtemperatur und wie groß die Schlußspannung?

Auflösung. In der Arbeitsformel sind nur die Zeichen zu wechseln, da es sich um negative gewonnene Arbeit handelt. Also:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{A}} = \frac{x_1 y_1}{0{,}41}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0{,}41} - 1\right].$$

Folglich erhält man in den genannten Fällen als Arbeit:

$$\overset{\frac{1}{2}v}{\underset{v}{A}} = \frac{0{,}773 \cdot 10\,334}{0{,}41}[2^{0{,}41} - 1] = 6404{,}3 \text{ mkg},$$

$$\overset{\frac{1}{3}v}{\underset{v}{A}} = \frac{0{,}773 \cdot 10\,334}{0{,}41}[3^{0{,}41} - 1] = 11\,086 \text{ mkg}$$

$$\overset{\frac{1}{4}v}{\underset{v}{A}} = 14\,913 \text{ mkg}.$$

Die Schlußspannungen ergeben sich als 2,6574, 4,7070, 7,0615 Atm.

Die Schlußtemperaturen als $89^0{,}423$ C., $154^0{,}80$ C., $208^0{,}5$ C.

Bei Dampfmaschinen, Heißluft- und Druckluftmaschinen handelt es sich wiederum um die Volldruckarbeit V, die Expansionsarbeit $\frac{V}{0{,}41}\left[1-\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{m-1}\right]$ und um die Gegenarbeit G der Atmosphäre oder des Kondensators. Die Anzahl der Pferdestärken erhält man wieder durch Multiplikation mit $\frac{2n}{60\cdot 75}=\frac{n}{2250}$. (Vergl. Seite 139 bis 141.)

Beispiel. Eine doppeltwirkende Druckluftmaschine arbeite mit 5 Atm. Anfangsdruck. Der Kolben habe 0,4 m Durchmesser und 0,8 m Hub. Die Tourenzahl sei 100. (Der Widerstand von 1 Atm. ist zu überwinden.) Wieviel leistet sie bei verschiedenen Füllungsgraden?

Auflösung.

Bei ganzer Füllung (Volldruckarbeit)	184	Pferdestärken.
" $\frac{1}{2}$ "	138,91	"
" $\frac{1}{3}$ "	98,84	"
" $\frac{1}{4}$ "	72,57	"

Dieselbe Aufgabe für Dämpfe $\left(m=1{,}125=\frac{9}{8}\right)$ bei Auspuffmaschinen.

Auflösung. Volldruck wie vorher. $\frac{1}{2}$ Füllung 145,9 Pferdestärken. $\frac{1}{3}$ Füllung 109,78 Pferdestärken. $\frac{1}{4}$ Füllung 85,01 Pferdestärken.

Dieselbe Aufgabe für Dampfmaschine mit Kondensator von $\frac{1}{12}$ Atmosphäre mittlerem Gegendruck.

Auflösung. Volldruck: 227,02 Pferdestärken. $\frac{1}{2}$ Füllung 188,24 Pferdestärken. $\frac{1}{3}$ Füllung 152,11 Pferdestärken. $\frac{1}{4}$ Füllung 127,33 Pferdestärken.

Aufgabe. Bei einer Gebläsemaschine soll Luft auf 1,2 Atmosphären zusammengepreßt und dann in die Kanäle getrieben werden. Die Kolbenfläche sei 1 qm, der Gesamthub 1 m, die Tourenzahl 60. Wie viele Pferdestärken sind theoretisch nötig?

Auflösung. 25,8 Pferdestärken.

31) Bemerkungen über algebraische Funktionen.

Handelt es sich jetzt um Funktionen, die folgendem Beispiele entsprechen,

$$y=\cdots+d_1x^{-\frac{9}{8}}+c_1x^{-1}+b_1x^{-\frac{5}{6}}+a+bx^{\frac{1}{2}}+cx^{\frac{2}{3}}+dx^4+\cdots,$$

so ist für diese $\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}}$ leicht zu bilden, nämlich für das Beispiel

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = - \cdots + \frac{d_1}{-\frac{9}{8}+1}\left(x_2^{-\frac{9}{8}+1} - x_1^{-\frac{9}{8}+1}\right) + c_1\left({}^e\lg x_2 - {}^e\lg x_1\right)$$

$$+ \frac{b_1}{-\frac{5}{6}+1}\left(x_2^{-\frac{5}{6}+1} - x_1^{-\frac{5}{6}+1}\right) + \frac{c}{\frac{2}{3}+1}\left(x_2^{\frac{2}{3}+1} - x_1^{\frac{2}{3}+1}\right) + \cdots,$$

nur darf in diesem Falle die Stelle $x = 0$ nicht im Diagramme liegen, weil dort die beiden ersten Posten unendlich Großes geben. Dagegen würde bei dem 3. Posten diese Vorsicht nicht nötig sein, weil $-\frac{5}{6} > -1$ ist. Es giebt also bedenkliche und nichtbedenkliche Unendlichkeitsstellen. Die einen sind aus dem Diagramm auszuschließen, die anderen können mit eingerechnet werden. In allen Fällen aber ist es gut, die einzelnen Quadranten für sich zu berechnen, wenn die Gesamtfläche in sämtliche hineinragt.

Auch Funktionen von der Form

$$y = (a - x)^{p_1} + (b - 2\,x)^{p_2} + \left(a - \frac{3}{x}\right)^{p_3} + \cdots,$$

wo die p beliebige reelle Zahlen bedeuten, kann man jetzt behandeln, nur sind die Unendlichkeitsstellen darauf hin zu untersuchen, ob man sie einrechnen darf, oder nicht. In dem einen Falle dürfen sie im Diagramme liegen, im anderen nicht.

Damit hat die Lehre von den algebraischen Funktionen, d. h. denjenigen Funktionen, bei denen mit x nur algebraische Operationen vorgenommen werden, einen vorläufigen elementaren Abschluß erlangt. Unter algebraischen Operationen werden dabei nur Addition, Multiplikation, Potenzierung und Radicierung verstanden, wobei die Anzahl der Operationen eine endliche sein soll. Die Frage, ob Ausdrücke wie $x^{\sqrt{2}}$ (wo also der Exponent irrational und der Ausdruck wegen des unendlich großen Nenners des Exponenten unendlich vieldeutig ist) als algebraisch oder transcendent aufzufassen sind, soll hier nicht entschieden werden. Dagegen werden Ausdrücke, wie a^x als transcendente Funktionen bezeichnet. Ihre Untersuchung beruht im Wesentlichen darauf, sie wie e^x in unendlichen Reihen zu entwickeln, die nur ganze Potenzen von x enthalten, wie z. B.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Wie also endlose Dezimalbrüche sowohl rational, als auch irrational und transcendent sein können, so sind auch unendliche Summen rationaler Funktionen entweder rational, wie die geometrische Reihe, oder irrational, wie gewisse binomische Reihen, oder transcendent, wie die Exponentialreihe. Die Analogie ist eine vollständige, ihre Untersuchung aber übersteigt das Ziel der Schule.

VI. Reihenentwickelungen für einige transcendente Funktionen.

32) Logarithmus.*)

Ist $z = {}^e\lg y$, so folgt $e^z = y$, oder da (für $n = \infty$) $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ ist, $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y$. In Folgendem soll n stets als unendlich groß gedacht werden.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$z = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}},$$

also ist

$${}^e\lg y = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Man setze nun $y = 1 + x$, dann ist

$${}^e\lg(1 + x) = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Ist also $-1 < x < +1$, so darf man nach der binomischen Reihe entwickeln, und erhält, wenn man die unendlich kleine Größe $\frac{1}{n} = \delta$ setzt:

$${}^e\lg(1 + x) = \frac{(1 + x)^\delta - 1}{\delta}$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\left(1^\delta + \frac{\delta}{1}x + \frac{\delta(\delta - 1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\delta(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots\right) - 1\right],$$

oder

$${}^e\lg(1 + x) = x + \frac{\delta - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots.$$

---

*) Fortsetzung von Teil II, Arithmetik, Abschnitt VI (Nr. 52).

Läßt man δ unendlich klein werden, so hat man für die Grenze $\delta = 0$ und für $-1 < x < 1$:

$$1) \qquad {}^e\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Setzt man $(-x)$ für x ein, so folgt

$$2) \qquad {}^e\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots.$$

Durch Subtraktion erhält man die Reihe für ${}^e\lg(1+x) - {}^e\lg(1-x)$ oder

$$3) \qquad {}^e\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right]$$

für $-1 < x < 1$.

Setzt man $\frac{1+x}{1-x} = a$, so ist $x = \frac{a-1}{a+1}$ zu setzen, was für jedes positive a absolut genommen kleiner als 1 ist. So folgt

$$4) \qquad {}^e\lg a = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots\right]$$

für jedes positive a.

Setzt man hier $a = 1 + z$, so wird $\frac{a-1}{a+1} = \frac{z}{2+z}$, und es gilt für $-1 < z < \infty$ die Reihe

$$5) \quad {}^e\lg(1+z) = 2\left[\frac{z}{2+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \cdots\right],$$

die für kleine z sehr schnell konvergiert.

Hier setze man $z = \frac{y}{x}$, also $1 + z = 1 + \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x}$, folglich $\lg(1+z) = \lg\frac{x+y}{x} = \lg(x+y) - \lg x$. Dabei wird ferner $\frac{z}{2+z} = \frac{\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}} = \frac{y}{2x+y}$. Setzt man alles in 5) ein und bringt man $-\lg x$ nach rechts, so ergiebt sich

$$6) \quad \lg(x+y) = \lg x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$

für $\frac{y}{x} > -1$.

Mit Hülfe dieser Reihen ist man im Stande, die natürlichen Logarithmen gegebener Zahlen sehr schnell zu berechnen, wobei man, um schnelle Konvergenz zu erreichen, gewisse Kunstgriffe anzuwenden hat.

Um z. B. ${}^e\lg 2$ zu berechnen, kann man $\lg\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\right) = \lg\frac{3}{2} + \lg\frac{4}{3}$ zu Grunde legen, Logarithmen, die man erhält, wenn man in Gleichung 3) $x = \frac{1}{5}$ bezw. $x = \frac{1}{7}$ einsetzt. Dies giebt die schnell konvergierenden Reihen

$$\begin{aligned} {}^e\lg\frac{3}{2} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} + \cdots\right] \\ &= 0{,}405\,465\,108\,108\,164\ldots, \\ {}^e\lg\frac{4}{3} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot 7^7} + \frac{1}{9\cdot 7^9} + \cdots\right] \\ &= 0{,}287\,682\,072\,451\,781. \end{aligned}$$

Die Summe giebt ${}^e\lg 2 = 0{,}693\,147\,180\,559\,945\ldots$

Um auf ${}^e\lg 10$ zu gelangen, benutze man Gleichung 3) für $x = \frac{1}{9}$. Dies giebt

$$\begin{aligned} {}^e\lg\frac{5}{4} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \cdots\right] \\ &= 0{,}223\,143\,551\,314\,210\ldots. \end{aligned}$$

Nun ist $10 = \frac{5}{4}\cdot 2^3$, also ${}^e\lg 10 = {}^e\lg\frac{5}{4}\,e + 3\lg 2$. Man erhält

$${}^e\lg 10 = 2{,}302\,585\,092\,994\,045\ldots$$

Hieraus ergiebt sich als Modul der Briggschen Logarithmen

$$m = \frac{1}{{}^e\lg 10} = 0{,}434\,294\,481\,903\,251\ldots$$

Reihe 3) ist also sehr brauchbar zur Berechnung der Logarithmen von Brüchen, die nahe bei 1 liegen.

Behufs der Entwickelung von a^x setze man $a = e^\alpha$, also $\alpha = {}^e\lg a$. Dann ist

$$a^x = (e^\alpha)^x = e^{\alpha x} = e^{x\lg a} = 1 + \frac{x\lg a}{1!} + \frac{(x\lg a)^2}{2!} + \frac{(x\lg a)^3}{3!} + \cdots$$

32) Reihen für π und cyklometrische Funktionen.

In Teil II war bewiesen

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+i}{1-i}.$$

Man wende hierauf die Reihe 3) an, dann wird

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\,2\left[i + \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} + \frac{i^7}{7} + \cdots\right],$$

oder

7) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots,$$

die wegen der wechselnden Zeichen noch konvergent ist*). Die Konvergenz ist aber so schwach, daß mehrere Millionen Glieder berechnet werden müßten, wenn man π bis auf 7 Dezimalstellen genau berechnen wollte.

Dies ist die Leibnitzsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$.

Die früher gefundenen Reihen für $\frac{\pi}{4}$ bezw. $\frac{\pi}{2}$ waren brauchbarer. Noch bessere werden später gegeben.

Die hier zu Grunde gelegte Formel war nach Teil II ein besonderer Fall der folgenden:

$$e^{2iz} = \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z}.$$

Aus ihr folgt nach 3)

$$8)\quad z = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z} = \tan z - \frac{\tan^3 z}{3} + \frac{\tan^5 z}{5} - \frac{\tan^7 z}{7} + \cdots,$$

wo jedoch $-1 < \tan z < +1$ sein muß, d. h. $-45^0 < \alpha < 45^0$.

Setzt man hier $\tan z = x$, also $z = \operatorname{arc} \tan x$, so folgt

$$9)\qquad \operatorname{arc} \tan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

was für $-1 < x < +1$ konvergiert. Für den Grenzfall $x = +1$ erhält man wieder die Reihe 7).

In Gleichung 8) war z in einer nach Potenzen von $\tan z$ fortschreitenden Reihe entwickelt. Da $\tan z$ eine ungerade Funktion von z ist, so konnten nur ungerade Potenzen vorkommen, denn für gerade Potenzen würde die Vertauschung von $+z$ und $-z$ gleichgültig sein, die für die linke Seite nicht gleichgültig ist.

Da nun $\sin x$ ebenfalls eine ungerade Funktion von x ist, so läßt sich vermuten, daß x in einer Reihe entwickelt werden kann, die nach ungeraden Potenzen von $\sin x$ fortschreitet. Danach würde sein:

$$\text{a)}\qquad x = a \sin x + b \sin^3 x + c \sin^5 x + d \sin^7 x + \cdots,$$

wo die Koeffizienten unbestimmt sind, und ebenso

$$y = a \sin y + b \sin^3 y + c \sin^5 y + d \sin^7 y + \cdots,$$

folglich

$$x - y = a(\sin x - \sin y) + b(\sin^3 x - \sin^3 y) + c(\sin^5 x - \sin^5 y) + \cdots,$$

also auch

$$\text{b)}\quad \frac{x - y}{\sin x - \sin y} = a + b\frac{\sin^3 x - \sin^3 y}{\sin x - \sin y} + c\frac{\sin^5 x - \sin^5 y}{\sin x - \sin y} + \cdots.$$

*) Die Untersuchung, ob die Konvergenz bedingt oder unbedingt ist, soll hier unterbleiben.

Auf der linken Seite ist

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

also für den Fall, daß y nahe an x und $(x-y)$ sehr klein, also auch $\sin \frac{x-y}{2}$ sehr nahe an $\frac{x-y}{2}$ ist:

$$\frac{x-y}{\sin x - \sin y} = \frac{x-y}{(x-y)\cos \frac{2x}{2}} = \frac{1}{\cos x}.$$

Rechts dagegen ist jedes

$$\frac{\sin^n x - \sin^n y}{\sin x - \sin y} = \sin^{n-1} x + \sin^{n-2} x \sin y + \sin^{n-3} x \sin^2 y + \cdots$$
$$+ \sin x \sin^{n-2} y + \sin^{n-1} y,$$

also steht, wenn y sehr nahe an x liegt, rechts $n \sin^{n-1} x$ für jedes n. Demnach geht b) über in

$$\frac{1}{\cos x} = a + 3b \sin^2 x + 5c \sin^4 x + 7d \sin^6 x + \cdots.$$

Nun ist aber zugleich

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} \sin^2 x + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 x + \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^6 x + \cdots,$$

folglich muß sein

$$a = 1, \quad 3b = \tfrac{1}{2}, \quad 5c = \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad 7d = \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \quad \text{u. s. w.}$$

Damit sind die Koeffizienten bestimmt, und Gleichung a) geht über in

$$10) \quad x = \sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\sin^7 x}{7} + \cdots.$$

Demnach ist, wie schon früher geometrisch gefunden war*),

$$11) \quad \operatorname{arc} \sin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{x^9}{9} \cdots,$$

woraus für $x = 1$ die schon gefundene Reihe für $\frac{\pi}{2}$ und für $\operatorname{arc} \cos x$ nachstehende ebenfalls schon besprochene Reihe folgt:

$$12) \qquad \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots\right].$$

*) Die Übereinstimmung mit dem früheren Resultate möge hinreichen, gewissen Zweifeln bezüglich der Strenge der Beweisführung, die hier erhoben werden könnten, vorläufig zu begegnen.

[34) Die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$.

Der Vollständigkeit halber könnte noch auf die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$ eingegangen werden.

Nach dem Früheren ist z. B.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}.$$

Da man im Konvergenzfalle die Division mechanisch ausführen darf, so erhält man

$$\tan x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \cdots$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{215} + \cdots.$$

Da jedoch die Division bald unbequem wird, soll auf diese weniger übersichtliche Reihe nicht weiter eingegangen werden. Mit Hülfe der Bernoullischen Zahlen ist es gelungen, eine übersichtlichere Form zu gewinnen. Dies geht aber für die Schule zu weit, ebenso, wie die Untersuchung des Konvergenzgebietes.]

35) Quadratur und Tangentenproblem für die behandelten transcendenten Funktionen.

Nachdem die betreffenden Funktionen nach aufsteigenden Potenzen von x in Reihen entwickelt sind, gelten von ihnen die Flächen- und Tangentensätze, die für ganze rationale Funktionen gelten.

So ist z. B. für $y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$, also für die logarithmische Kurve,

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1}{1} + \frac{{x_1}^2}{2!} + \frac{{x_1}^3}{3!} + \frac{{x_1}^4}{4!} + \cdots = e^{x_1} - 1,$$

folglich

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = e^{x_2} - e^{x_1}.$$

Die Fläche von $-\infty$ bis 0 ist also gleich 1, dagegen $\overset{x}{\underset{-\infty}{F}} = e^x$.

Ferner ist an jeder Stelle x die Tangentenrichtung zu bestimmen aus

$$\tan \alpha = 1 + \frac{2x}{1 \cdot 2} + \frac{3x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$$

Aus $\tan \alpha = \frac{e^x}{1}$ folgt, daß die Projektion der Tangente auf die X-Achse, die sog. Subtangente, an jeder Stelle gleich 1 ist.

Für $y = \sin x$, die besonders wichtige Sinus-Kurve, ist

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{\,2}}{1!2} - \frac{x_1^{\,4}}{3!4} + \frac{x_1^{\,6}}{5!6} - \cdots = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots = 1 - \cos x_1,$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = (1 - \cos x_2) - (1 - \cos x_1) = \cos x_1 - \cos x_2.$$

Die Tangentenrichtung an jeder Stelle bestimmt sich aus

$$\tan\alpha = \frac{1x^0}{1!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \cos x.$$

Entsprechend ist es mit den übrigen in Reihen entwickelten Funktionen.

Nur liegen bisweilen die geschlossenen Ausdrücke etwas versteckt. So ist z. B. für $y = \operatorname{arc}\sin x$

$$\overset{x}{\underset{0}{F}} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{x^6}{6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{x^8}{8} + \cdots$$
$$= \left[\frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^8}{7} + \cdots\right]$$
$$- \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^6}{6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^8}{8} + \cdots\right]$$
$$= x\cdot\operatorname{arc}\sin x - 1 + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^8}{8} - \cdots\right]$$
$$= x\cdot\operatorname{arc}\sin x - 1 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Also

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = x_1 \operatorname{arc}\sin x_1 + \sqrt{1 - x_1^{\,2}} - 1$$

und

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = (x_2 \operatorname{arc}\sin x_2 - x_1 \operatorname{arc}\sin x_1) + \left(\sqrt{1 - x_2^{\,2}} - \sqrt{1 - x_1^{\,2}}\right).$$

Die Tangentenrichtung bestimmt sich aus

$$\tan\alpha = 1 + \frac{1}{2}\frac{3x^2}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{5x^4}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7x^6}{7} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \cdots,$$

oder

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Aus den früher besprochenen Anwendungen der algebraischen Analysis ergiebt sich, welcher außerordentliche Fortschritt für die analytische

Geometrie und Flächenberechnung, für die Körperberechnungen und für die Mechanik mit diesen Reihenentwickelungen gewonnen ist.

Die überall vermerkten Einschränkungen aber deuten schon hinreichend an, daß damit erst die Vorhöfe einer höheren Wissenschaft betreten sind, in der die Theorie des Unendlichkleinen zum eigentlichen Austrage kommt und der Funktionsbegriff in seiner ganzen Tragweite sichtbar wird. Dies ist die Differential- und Integralrechnung, die Hand in Hand mit der allgemeinen Funktionentheorie ganz neue Bereiche des mathematischen Denkens erschlossen hat, die aber der Hochschule vorbehalten werden müssen.

36) Nachträge über die Berechnung der Zahl π.

Die Wichtigkeit der Zahl π für die niedere und höhere Mathematik hat es wünschenswert erscheinen lassen, schnell konvergierende Reihen für ihre Berechnung zu finden. Die Leibnitzsche Reihe war ganz unbrauchbar.

Durch Einsetzung von $x = \frac{\pi}{6}$ in die Reihe für $\operatorname{arc}\tan x$ fand man, da $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5(\sqrt{3})^5} + \frac{1}{7(\sqrt{3})^7} + \cdots,$$

also

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3\cdot 3^1} + \frac{1}{3\cdot 5^2} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \cdots\right],$$

womit es unter großem Zeitaufwand gelang, π auf etwa 100 Stellen genau zu berechnen. Besser ist schon die Eulersche Reihenentwickelung mit Hülfe der Formel

$$4)\qquad \begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \operatorname{arc}\tan\frac{1}{2} + \operatorname{arc}\tan\frac{1}{3}\\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots\right]\\ &\quad + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \cdots\right].\end{aligned}$$

Die Formel 4) ist folgendermaßen entstanden. Euler wollte statt $\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ einen kleineren Wert haben, setzte daher in $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ willkürlich $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, woraus sich $\tan\beta = \frac{1}{3}$ ergiebt.

Auf demselben Grundgedanken fußend kann man noch weit schneller konvergierende Reihen finden. So ist z. B. folgender Gang eingeschlagen worden.

In $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1$ setzt man willkürlich $\tan\alpha = \frac{1}{5}$, so daß sich ergiebt $\tan\beta = \frac{2}{3}$, also

a) $$\operatorname{arc}\tan 1 = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} + \operatorname{arc}\tan\frac{2}{3}\,.$$

Um das ungünstige $\operatorname{arc}\tan\frac{2}{3}$ zu entfernen, setzt man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2}{3}$ $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ ein, woraus $\tan\beta = \frac{7}{17}$ folgt. Man erhält so

b) $$\operatorname{arc}\tan\frac{2}{3} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{4} + \operatorname{arc}\tan\frac{7}{17}\,.$$

Um das ungünstige $\frac{7}{17}$ zu entfernen, setzt man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{7}{17}$ wiederum $\tan\alpha = \frac{1}{5}$, was $\tan\beta = \frac{9}{46}$ giebt. Es wird

c) $$\operatorname{arc}\tan\frac{7}{17} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} + \operatorname{arc}\tan\frac{9}{46}\,.$$

Einsetzung von $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{9}{46}$ giebt schließlich $\tan\beta = -\frac{1}{239}$ und

d) $$\operatorname{arc}\tan\frac{9}{46} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} - \operatorname{arc}\tan\frac{1}{239}\,.$$

Bei Summierung der Gleichungen a) bis d) hebt sich alles weg, bis auf die **Clausensche** Formel

5) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\tan 1 = 4\operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} - \operatorname{arc}\tan\frac{1}{239},$$

die schon recht brauchbare Reihen giebt.

Um noch Brauchbareres zu erhalten, setzte man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{5}$ ein $\tan\alpha = \frac{1}{10}$, was $\tan\beta = \frac{5}{51}$ giebt, bildete also

e) $$\operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{10} + \operatorname{arc}\tan\frac{5}{51},$$

setzte in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{5}{51}$ wiederum $\tan\alpha = \frac{1}{10}$, was $\tan\beta = -\frac{1}{515}$ ergab, also

f) $$\operatorname{arc}\tan\frac{5}{51} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{10} - \operatorname{arc}\tan\frac{1}{515}\,.$$

Erweitert man die Gleichungen e) und f) mit dem Faktor 4 und addiert man die rechten und ebenso die linken Seiten der neuen Gleichungen und der Formel 5), so entsteht schließlich die **Meißelsche** Formel:

6) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\tan 1 = 8\operatorname{arc}\tan\frac{1}{10} - \operatorname{arc}\tan\frac{1}{239} - 4\operatorname{arc}\tan\frac{1}{515}\,.$$

Nur eine geringe Anzahl der Glieder von den Reihen für die genannten arc tan ist nötig, um mit 12 Stellen Genauigkeit

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,59\ldots$$

zu geben.

Selbstverständlich kann man die Konvergenz noch weiter treiben. Entsprechende oder dieselben Formeln erhielt Schellbach durch Nachweis gewisser Identitäten, z. B.

$$e^{2i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{2+i}{2-i}\cdot\frac{3+i}{3-i} = \frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\cdot\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}},$$

woraus folgt

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\left(\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\cdot\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}}\right) = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}} + \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}},$$

was der Gleichung 4) entspricht.

Ebenso ist

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{3+i}{3-i}\cdot\frac{7+i}{7-i}, \quad \text{also} \quad \frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{3+i}{3-i}\right)^2\left(\frac{7+i}{7-i}\right),$$

folglich gilt die Vegasche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{i}\lg\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}} + \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{7}}{1-\frac{i}{7}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} - \frac{1}{7\cdot 7^7} + \cdots\right).$$

Ähnlich ist $(5 \pm i)^4 = 4\,(119 \pm 120\,i)$, folglich

$$\left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4 = \frac{119+120\,i}{119-120\,i} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{239+i}{239-i}.$$

So findet man wieder die Clausensche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{5}}{1-\frac{i}{5}} - \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{239}}{1-\frac{i}{239}}.$$

Um auch die Meißelsche Formel zu finden, zeige man, daß $(10 \pm i)^2 = (99 \pm 20\,i)$, also

$$\left(\frac{10+i}{10-i}\right)^2 = \frac{99+20\,i}{99-20\,i} = \frac{5+i}{5-i}\cdot\frac{515+i}{515-i}$$

ist, folglich

$$\frac{5+i}{5-i} = \left(\frac{10+i}{10-i}\right)^2 : \frac{515+i}{515-i}$$

und

$$\frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{10+i}{10-i}\right)^8 : \left[\frac{239+i}{239-i} \cdot \left(\frac{515+i}{515-i}\right)^4\right].$$

So ergiebt sich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{10}}{1-\frac{i}{10}} - \frac{1}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{239}}{1-\frac{i}{239}} - \frac{4}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{515}}{1-\frac{i}{515}}.$$

VII. Zusammenstellung der wichtigsten Resultate.

1) Die ganzen rationalen Funktionen n^{ten} Grades $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind identisch, wenn sie für $(n+1)$ Werte des Arguments übereinstimmen.

2) Für $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$ ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = \frac{ax_1}{1} + \frac{bx_1{}^2}{2} + \frac{cx_1{}^3}{3} + \frac{dx_1{}^4}{4} + \cdots + \frac{kx_1{}^{n+1}}{n+1},$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{a(x_2 - x_1)}{1} + \frac{b(x_2{}^2 - x_1{}^2)}{2} + \frac{c(x_2{}^3 + x_1{}^3)}{3} + \cdots + \frac{k(x_2{}^{n+1} - x_1{}^{n+1})}{n+1},$$

und an jeder Stelle x ist die Neigung der Tangente

$$\tan\alpha = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nkx^{n-1}.$$

3) Für $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ ist

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2 - x_1}{6}[y_1 + 4y_m + y_2],$$

wo y_m zur Stelle $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ gehört. (Simpson-Regel.)

4) Zur angenäherten Berechnung von Diagrammen dient $\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} =$

$$\frac{x_n - x_0}{6 \cdot \frac{n}{2}}[(h_0 + h_n) + 2(h_2 + h_4 + h_6 + \cdots + h_{n-2}) + 4(h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{n-1})].$$

5) Für die gleichseitige Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = {}^e\lg x_1, \quad \overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = {}^e\lg \frac{x_2}{x_1}.$$

6) Für $y = x^p$ ist, sobald $p > -1$,

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = \frac{x_1^{p+1}}{p+1} \quad \text{und} \quad \overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2^{p+1} - x_1^{p+1}}{p+1}.$$

Bedenkliche Unendlichkeitsstellen zwischen x_1 und x_2 sind zu vermeiden.

7) Unendliche Reihen:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1+x} \text{ für } -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_1^\infty m^p = \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

$$\text{für } n = \infty \text{ und } p > -1;$$

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\text{für } -1 < x < 1 \text{ und für jedes } n;$$

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ a^x &= 1 + \frac{x\,{}^e\!\lg a}{1!} + \frac{(x\,{}^e\!\lg a)^2}{2!} + \frac{(x\,{}^e\!\lg a)^3}{3!} + \cdots \\ \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \end{aligned}\right\} \text{für jedes } x.$$

Die Reihen für $\tan x$ und $\cos x$ siehe in Abschnitt 34.

$$\operatorname{arc}\sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \cdots$$

$$\operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{x_1}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots\right]$$

$$\operatorname{arc}\tan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} {}^e\!\lg(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\ {}^e\!\lg(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \\ {}^e\!\lg\frac{1+x}{1-x} &= 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right] \end{aligned}\right\} \text{für} -1 < x < 1.$$

$${}^e\!\lg a = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots\right] \text{ für positives } a.$$

$${}^e\!\lg(1+z) = 2\left[\frac{z}{2+z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \cdots\right] \text{für } z > -1.$$

$$\lg(x+y) = \lg x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$

$$\text{für } \frac{y}{x} > -1.$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+i}{1-i} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots = \frac{1}{2i}\,{}^{e}\lg i.$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9} + \cdots$$

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3\cdot 3^1} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \cdots\right].$$