Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

Fünfte Abteilung. Von den Gleichungen höheren Grades.

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Fünfte Abteilung.

Von den Gleichungen höheren Grades.

I. Gleichungen dritten Grades.

38) Die allgemeine Gleichung dritten Grades ist schon in Teil II (Arithmetik Nr. 73) aufgelöst worden. Hier soll für die eigentliche Normalform

1) $$x^3 - 3\alpha x^2 + 3\beta x - \gamma = 0$$

eine andere Lösungsmethode entwickelt werden.

Durch die Substitution $x = y + \alpha$ geht die Gleichung über in

$$y^3 - 3y(\alpha^2 - \beta) = (2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma),$$

also in die Form

2) $$y^3 - 3ky = 2b.$$

Diese Gleichung stimmt in der Form überein mit der identischen Gleichung

3) $$(u+v)^3 - 3uv(u+v) = u^3 + v^3,$$

die aus der binomischen Formel für $(u+v)^3$ folgt.

Gleichung 2) stimmt mit 3) überein, sobald man $u^3 + v^3 = 2b$, $uv = k$ und $u + v = y$ setzt. Dadurch wird auch 2) in eine identische Gleichung verwandelt. Die Werte von y aber, die Gleichung 2) identisch erfüllen, heißen die Wurzeln der Gleichung 2). Diese müssen also durch $y = u + v$ bestimmt sein, sobald man u und v aus den genannten Gleichsetzungen berechnet.

Nun folgt aus

$$(u^3 + v^3)^2 = 4b^2$$

und

$$4u^3v^3 = 4k^3$$

durch Subtraktion und Wurzelausziehung

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{b^2 - k^3},$$

und durch Vergleichung mit $u^3 + v^3 = 2b$ folgt

$$u^3 = b + \sqrt{b^2 - k^3} \quad \text{und} \quad v^3 = b - \sqrt{b^2 - k^3}.$$

Es ist also, wenn man zunächst von der Dreideutigkeit der Kubikwurzel absieht,

$$u = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - k^3}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - k^3}}.$$

In Wirklichkeit handelt es sich um je drei Werte

$$u_1 = uw_1, \quad u_2 = uw_2, \quad u_3 = uw_3,$$
$$v_1 = vw_1, \quad v_2 = vw_2, \quad v_3 = vw_3,$$

wo die w die dritten Wurzeln aus der Einheit bedeuten, also

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad w_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Es fragt sich nun, welche u und v in $y = u + v$ zusammengehören. Selbstverständlich ist so zu gruppieren, daß die Gleichung 3) identisch erfüllt bleibt. Dies ist nur der Fall, wenn man u_1 und v_1, u_2 und v_3, u_3 und v_2 kombiniert. Die Wurzeln der Gleichung 2) sind also

$$4)\left\{\begin{aligned}
y_1 &= u_1 + v_1 = u + v = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - k^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - k^3}},\\
y_2 &= u_2 + v_3 = u\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + v\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{u + v}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2},\\
y_3 &= u_3 + v_2 = u\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + v\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{u + v}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2}.
\end{aligned}\right.$$

Der Ausdruck für y_1 heißt die Cardanische Formel, obwohl Geronimo Cardano die von Nicolo Tartalea entdeckte Formel nur veröffentlicht hat (1545).

39) Die drei Hauptfälle.

Man beschränkt sich für das praktische Rechnen in der Regel auf den Fall, wo die Koeffizienten der Gleichung 1) und daher auch die der Gleichung 2) reell sind.

Dann sind drei Fälle möglich.

a) Ist $b^2 - k^3$ positiv, so sind u und v reell, also y_1 reell, aber y_2 und y_3 konjugiert komplex.

b) Ist $b^2 - k^3 = 0$, so wird

$$y_1 = 2\sqrt[3]{b}, \quad y_2 = -\sqrt[3]{b}, \quad y_3 = -\sqrt[3]{b},$$

so daß sämtliche Wurzeln reell und die beiden letzten gleich sind.

c) Ist $b^2 - k^3$ negativ, so steht unter jeder Kubikwurzel Komplexes. Weil man ursprünglich mit dem Imaginären nicht zu rechnen verstand, nannte man diesen Fall den casus irreducibilis. Schon die Entwickelung der Wurzeln in binomischen Reihen, nämlich den Reihen für $(b \pm \sqrt{b^2 - k^3})^{\frac{1}{3}} = (b \pm i\sqrt{k^3 - b^2})^{\frac{1}{3}}$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, würde gezeigt haben, daß es sich um konjugiert komplexe Ausdrücke handelt, so daß in $u_1 + v_1$ das Imaginäre wegfällt, ebenso in $u_2 + v_3$ und $u_3 + v_2$, daß also sämtliche Wurzeln reell sind.

Am besten übersieht man dies an der reducierten Schreibweise der komplexen Ausdrücke für u und v. Bei dieser wird

$$u = \sqrt[3]{b + i\sqrt{k^3 - b^2}} = \sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)},$$

wo $r = \sqrt{b^2 + (k^3 - b^2)} = +\sqrt{k^3}$ ist und φ sich aus $\cos\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{+\sqrt{k^3}}$ bestimmt, wobei das Vorzeichen von b über den ersten oder zweiten Quadranten entscheidet. (Die Substitution $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{k^3}}$ ist gestattet, weil $k^3 > b^2$ angenommen ist, so daß der Bruch kleiner als 1 ist.)

Nach dem Moivreschen Satze wird jetzt

$$u_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$u_2 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 360^0}{3} + i\sin\frac{\varphi + 360^0}{3}\right),$$

$$u_3 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 720^0}{3} + i\sin\frac{\varphi + 720^0}{3}\right),$$

und entsprechend

$$v_1 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$v_3 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 360^0}{3} - i\sin\frac{\varphi + 360^0}{3}\right),$$

$$v_2 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 720^0}{3} - i\sin\frac{\varphi + 720^0}{3}\right).$$

In $y = u + v$ sind nach Obigem die Werte so zu kombinieren, daß Reelles entsteht. (Die Indices von v sind der Analogie wegen den obigen entsprechend gewählt.) Demnach sind die Wurzeln von Gleichung 2) jetzt

$$5)\quad \begin{cases} y_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ y_2 = u_2 + v_3 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi + 360^0}{3} = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right), \\ y_3 = u_3 + v_2 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi + 720^0}{3} = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right). \end{cases}$$

Damit ist der irreducible Fall erledigt.

40) **Bemerkungen.** Dasselbe Resultat ergiebt sich für den irreduciblen Fall selbständig auf folgendem goniometrischen Wege.

In der Gleichung 2) d. h. in

$$y^3 - 3ky = 2b$$

setze man $y = 2\sqrt{k}z$, so daß sie übergeht in $8k\sqrt{k}z^3 - 3k2\sqrt{k}z = 2b$ oder in

$$6)\quad z^3 - \frac{3}{4}z = \frac{1}{4}\frac{b}{\sqrt{k^3}}.$$

Nun ist identisch

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \quad \text{oder} \quad \cos^3\varphi - \frac{3}{4}\cos\varphi = \frac{1}{4}\cos 3\varphi,$$

wo φ noch um 360^0 oder 720^0 vergrößert werden darf. Führt man in diese identische Gleichung den dritten Teil des Winkels ein, so lautet sie entweder

$$7)\quad \left(\cos\frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{4}\cos 3\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{4}\cos\varphi,$$

oder

$$\left[\cos\frac{\varphi + 360^0}{3}\right]^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi + 360^0}{3} = \frac{1}{4}\cos 3\frac{\varphi + 360^0}{3} = \frac{1}{4}\cos\varphi,$$

d. h.

$$8)\quad \left[-\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right]^3 - \frac{3}{4}\left[-\cos\varphi\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right] = \frac{1}{4}\cos\varphi,$$

oder endlich

$$\left[\cos\frac{\varphi + 720^0}{3}\right]^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi + 720^0}{3} = \frac{1}{4}\cos 3\frac{\varphi + 720^0}{3} = \frac{1}{4}\cos\varphi,$$

d. h.

$$9)\quad \left[-\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right]^3 - \frac{3}{4}\left[-\cos\varphi\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right] = \frac{1}{4}\cos\varphi.$$

Gleichung 6) stimmt nun mit der identischen Gleichung 7) bezw. mit 8) oder 9) überein, sobald man $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{k^3}}$ und außerdem $z = \cos\frac{\varphi}{3}$ bezw. $= -\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)$ oder $= -\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)$ setzt. Da sie für die letzteren Werte von z identisch erfüllt ist, so sind diese die Wurzeln der Gleichung 6). Folglich sind die der Gleichung 2) wie vorher

$$y_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3},\quad y_2 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$
$$y_3 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right).$$

41) Zusammenhang zwischen den Wurzeln und Koeffizienten.

Schon in Teil I ist gezeigt worden, daß das Produkt

$$10)\qquad (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

auf

$$x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3,$$

d. h. auf die linke Seite der Normalform der Gleichung dritten Grades führt. Die Koeffizienten der letzteren sind demnach

$$11)\quad \alpha = x_1 + x_2 + x_3,\ \beta = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,\ \gamma = x_1x_2x_3.$$

Der erste Koeffizient ist also die Summe der Wurzeln, der zweite Koeffizient die Summe der Produkte von je zwei Wurzeln, der dritte ist das Produkt der drei Wurzeln.

Weil sämtliche Wurzeln in jedem Koeffizienten in übereinstimmender Weise vorkommen, bezeichnet man die Koeffizienten als symmetrische Funktionen der Wurzeln.

Die Auflösung der Gleichung ist also nichts anderes, als die Zerlegung der linken Seite in ein Produkt.

[Betrachtet man in dem Gleichungssysteme 11) die Wurzeln als Unbekannte, die man zu berechnen hat, so erhält man wieder eine Gleichung dritten Grades. Versuche dieselbe aufzustellen. Sie wird

$$x_3{}^3 - \alpha x_3{}^2 + \beta x_3 - \gamma = 0,$$

also von der alten Form.]

Will man sich selbst Gleichungen bilden, die auf den irreduciblen Fall führen, so wähle man lauter reelle Wurzeln, z. B. 2, 3 und 4. Das Beispiel giebt

$(x-2)(x-3)(x-4)=0$ oder $x^3-9x^2+26x-24=0$,

was noch mit einen konstanten Faktor multipliziert werden darf.

Soll dagegen die Gleichung auf den Cardanischen Fall führen, so wähle man eine reelle und zwei komplex konjugierte Wurzeln, z. B. 2, $3+4i$, $3-4i$. Dies giebt

$$(x-2)[x-(3+4i)][x-(3-4i)]=0$$

oder

$$x^3-8x^2+37x-50=0.$$

Würde man drei komplexe, oder eine komplexe und zwei reelle, oder eine reelle und zwei nicht konjugiert komplexe Wurzeln wählen, so würden die Koeffizienten der Gleichung nicht sämtlich reell werden. Auch solche Gleichungen lassen sich auflösen, sie haben aber für die Praxis geringeren Wert.

Sämtliche ganzen rationalen Funktionen dritten Grades, welche dieselben Wurzeln x_1, x_2 und x_3 haben, können sich höchstens um einen konstanten Faktor unterscheiden. Die einfachste ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= x^3-(x_1+x_2+x_3)x+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x^2-x_1x_2x_3; \end{aligned}$$

alle anderen sind von der Form

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= k(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= kx^3-k(x_1+x_2+x_3)x+k(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x^2-kx_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Beide Funktionen werden zu Null für $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$. Sie stimmen also für drei Werte überein. Ist $k=1$, so stimmen sie auch für $x=\infty$ überein und sind daher identisch.

Jede ganze rationale Funktion 3ten Grades kann in ein solches Produkt linearer Faktoren zerlegt werden, denn für jede kann man die Wurzeln finden.

---

42) **Zusammenfassung der Resultate für numerische Berechnungen.**

Die Gleichung

1) $$x^3-3\alpha x^2+3\beta x-\gamma=0$$

geht durch $x=y+\alpha$ über in

2) $$y^3-3ky=2b,$$

wo $k=\alpha^2-\beta$ und $2b=2\alpha^3-3\alpha\beta+\gamma$ ist.

Ist $b^2 - k^3$ positiv, so sind die Wurzeln von 2)

$$y_1 = u + v = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - k^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - k^3}},$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{u-v}{2},$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{u-v}{2}.$$

Ist $b^2 - k^3$ negativ, so bilde man φ aus $\cos\varphi = \frac{b}{+\sqrt{k^3}}$, dann sind die Wurzeln

$$y_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$y_3 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Zum Schluß bilde man

$$x_1 = y_1 + \alpha, \quad x_2 = y_2 + \alpha, \quad x_3 = y_3 + a,$$

womit die Wurzeln von 1) gefunden sind.

43) Praktische Beispiele.

Aufgabe. Ein Kugelsegment sei der dritte Teil des Kugelkörpers. Wie groß ist seine Höhe?

Auflösung.

$$\frac{\pi x^2}{3}[3r - x] = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}r^3\pi, \quad \text{oder} \quad x^3 - 3rx^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0.$$

Die reduzierte Gleichung wird

$$y^3 - 3r^2y = \frac{2r^3}{3}.$$

Der Hülfswinkel φ bestimmt sich aus $\cos\varphi = \frac{\frac{r^3}{3}}{\sqrt{r^6}} = \frac{1}{3}$ als $\varphi = 70^0\,31'\,44''$.

Die Lösungen von 2) werden also

$$y_1 = 2r\cos 23^0\,30'\,35'', \quad y_2 = -2r\cos 36^0\,29'\,25'',$$

$$y_3 = -2r\cos 83^0\,30'\,35'',$$

d. h.

$$y_1 = 1{,}83399r, \quad y_2 = -1{,}60791r, \quad y_3 = -0{,}226074r.$$

(Zur Probe: $y_1 + y_2 + y_3 = 0$!) Die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung sind

$$x_1 = 2{,}83397r, \quad x_2 = -0{,}60791r, \quad x_3 = 0{,}77393r.$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 = 3r$.)

Die Lösungen x_1 und x_2 sind unbrauchbar, denn sie fallen außerhalb der Kugel, nur x_3 ist brauchbar, was durch Probe erhärtet werden kann.

Aufgabe. Eine Kugelzone hat die Grundradien r_1 und r_2 und den Inhalt J. Wie groß ist die Höhe?

Auflösung.

$$\frac{\pi x}{6}[3r_1^2 + 3r_2^2 + x^2] = J \quad \text{oder} \quad x^3 + 3x(r_1^2 + r_2^2) = \frac{6J}{\pi},$$

was schon von selbst die reduzierte Form ist. Es handelt sich um den Cardanischen Fall, so daß

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{3J}{\pi} + \sqrt{\left(\frac{3J}{\pi}\right)^2 + (r_1 + r_2)^3}} + \sqrt[3]{\frac{3J}{\pi} - \sqrt{\left(\frac{3J}{\pi}\right)^2 + (r_1 + r_2)^3}}$$

die einzige reelle Lösung ist.

Beispiel. $r_1 = 5$, $r_2 = 4$ und $J = 150$ giebt

$$x_1 = 2{,}23797.$$

Aufgabe. Ein Kugelsegment habe den Grundradius $\varrho = 15$ und den Inhalt $J = 822$. Wie groß ist die Höhe x?

Auflösung.

$$\frac{\pi x}{6}(x^2 + 3\varrho^2) = J, \quad \text{oder} \quad x^3 + 675x = 2 \cdot \frac{2466}{\pi}.$$

Die Cardanische Formel giebt als einzigen reellen Wert

$$x_1 = 2{,}3076.$$

Aufgabe. Ein Kugelsegment habe den Inhalt J und die Haubenfläche c. Wie groß ist die Höhe x?

Auflösung. $\frac{\pi x^2}{3}(3r - x) = J$ und $2r\pi x = c$ geben die Gleichung

$$x^3 - x\frac{3c}{2\pi} = -\frac{3J}{\pi}.$$

Aufgabe. Eine Kugel habe den Radius r und das spezifische Gewicht p $(p < 1)$. Wie tief sinkt sie ins Wasser ein?

Auflösung.

$$\frac{\pi x^2}{3}(3r - x) = \tfrac{4}{3}r^3\pi \cdot p \quad \text{oder} \quad x^3 - 3rx^2 + 4r^3p = 0.$$

Durch Substitution $x = y + r$ entsteht

$$y^3 - 3r^2y = 2r^3(1 - 2p).$$

Die Cosinus-Methode giebt $\cos\varphi = 1 - 2p$ (bei $p < \frac{1}{2}$ erster Quadrant, bei $p < \frac{1}{2}$ zweiter Quadrant). Die Lösungen von 2) sind

$$y_1 = 2r\cos\frac{\varphi}{3},\quad y_2 = -2r\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$
$$y_3 = -2r\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right),$$

also

$$x_1 = r\left(1 + 2\cos\frac{\varphi}{3}\right),\quad x_2 = r\left(1 - 2\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right),$$
$$x_3 = r\left(1 - 2\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right).$$

Da $\varphi < 180^0$ ist, so ist $\frac{\varphi}{3} < 60^0$, folglich ist $\cos\frac{\varphi}{3} > \frac{1}{2}$ und $x_1 > 2r$, also x_1 unbrauchbar.

$60^0 - \frac{\varphi}{3}$ zwischen 0^0 und 60^0, also $\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)$ zwischen 1 und $\frac{1}{2}$, folglich x_2 unbrauchbar, weil negativ.

$60^0 + \frac{\varphi}{3}$ zwischen 60^0 und 120^0, der cos zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, folglich x_3 der einzige brauchbare Wert.

Beispiel.

$r = 1$ und $p = 0{,}81$ giebt $x_3 = 1{,}44215$.

$r = 6$ und $p = 0{,}3$ giebt $x_3 = 4{,}35909$.

Aufgabe. Ein Kugelsegment vom Kugelradius r, von der Höhe h und dem spezifischen Gewicht p (< 1) sinkt mit der Wölbung voran wie tief ins Wasser ein?

Auflösung.

$$\frac{\pi x^2}{3}(3r - y) = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)p$$

oder

$$x^3 - 3ry^2 + ph^2(3r - h) = 0.$$

Substitution $x = y + r$ giebt

$$y^3 - 3r^2y = 2r^3 - ph^2(3r - h).$$

Die Cosinus-Methode giebt

$$\cos\varphi = \frac{r^3 - \frac{ph^2}{2}(3r - h)}{r^3}.$$

Die Lösungen von 1) sind

$$x_1 = r\left(1 + 2\cos\frac{\varphi}{3}\right), \quad x_2 = r\left[1 - 2\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right],$$
$$x_3 = r\left[1 - 2\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right].$$

Nur x_3 ist brauchbar.

Beispiel:

$$r = 5, \; h = 3, \; p = 0{,}8 \quad \text{giebt} \quad x_3 = 2{,}644385.$$

II. Gleichungen vierten Grades.

44) Allgemeine Auflösung.

Als Normalform ist zu betrachten

1) $$x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0.$$

Durch die Substitution $x = y + \frac{\alpha}{4}$ geht sie über in eine Gleichung ohne die dritte Potenz, nämlich in

$$y^4 + y^2\left(-\frac{3}{8}\alpha^2 + \beta\right) + y\left(-\frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha\beta}{2} - \gamma\right)$$
$$+ \left(-\frac{3\alpha^4}{256} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta\right) = 0,$$

so daß man die Form

2) $$y^4 + ay^2 + by + c = 0$$

erhält. Um eine Produktzerlegung zu erhalten, führe man neue Unbekannte u, v und w ein und setze für die linke Seite versuchsweise

2*) $$(y^2 + uy + v)(y^2 - uy + w),$$

so daß man, da y^3 hier ebenfalls wegfällt, die Gleichung

3) $$y^4 + y^2(v + w - u^2) + yu(w - v) + vw = 0$$

erhält.

Sollen 2) und 3) übereinstimmen, so hat man zu setzen

$$v + w - u^2 = a, \quad u(w - v) = b, \quad vw = c.$$

Aus

$$w + v = a + u^2 \quad \text{und} \quad w - v = \frac{b}{u}$$

folgt durch Subtraktion bezw. Addition

$$v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right), \quad w = \frac{1}{2}\left(a + u^2 + \frac{b}{u}\right),$$

also durch Multiplikation

$$v \cdot w = \frac{1}{4}\left[(a + u^2)^2 - \frac{b^2}{u^2}\right],$$

also wegen $vw = c$

$$\frac{1}{4}\left[a^2 + 2\,au^2 + u^4 - \frac{b^2}{u^2}\right] = c,$$

oder

4) $$u^6 + 2au^4 + u^2(a^2 - 4c) - b^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich u, die eine der Hülfsgrößen, bestimmen, indem man $u^2 = z$ setzt. Man erhält zur Bestimmung die Gleichung dritten Grades

5) $$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)\,z - b^2 = 0.$$

Die Behandlung dieser Gleichung geschieht nach der im vorigen Abschnitte dargestellten Methode.

Da jetzt $u^2 = z$ bekannt ist, ist auch $v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right)$ als bekannt zu betrachten, ebenso $w = \frac{1}{2}\left(a + u^2 + \frac{b}{u}\right)$.

Die gefundenen Werte werden eingesetzt in

$$(y^2 + uy + v)\,(y^2 - uy + w) = 0,$$

was mit Gleichung 2) identisch ist. Damit ist letztere zerlegt in zwei Gleichungen vom zweiten Grade:

$$y^2 + uy + v = 0$$
$$y^2 - uy + w = 0.$$

Die eine hat die Wurzeln

$$y_{1,2} = -\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - v},$$

die andere

$$y_{3,4} = +\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - w},$$

wo für u, v und w die gefundenen Werte einzusetzen sind. Damit sind die vier Werte für y gefunden und zugleich die für x. Ist eine der Wurzeln komplex, so muß nach den Formeln für die y auch die konjugierte Wurzel vorhanden sein.

Dabei war zunächst stillschweigend vorausgesetzt, daß für u, v und w stets reelle Größen gefunden werden, denn nur dann können 2) und 2*) übereinstimmen. Ob die Zerlegung in ein Produkt

$$(y^2 + uy + v)\,(y^2 - uy + w) = 0$$

mit reellen Koeffizienten stets möglich ist, soll untersucht werden, nachdem einige Beispiele berechnet worden sind.

45) Einige Beispiele.

Beispiel I. Die Gleichung

1) $$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

geht durch Einsetzung von

$$x = y + \tfrac{10}{4} = y + \tfrac{5}{2}$$

über in

2) $$y^4 - \tfrac{5}{2}y^2 + \tfrac{9}{16} = 0.$$

Da hier auch das Glied mit y weggefallen ist, handelt es sich um eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten $y^2 = z$. Man findet für 1) die Wurzeln 1, 2, 3 und 4.

Beispiel II. Die Gleichung

1) $$x^4 - 13x^3 + 59x^2 - 107x + 60 = 0$$

geht durch

$$x = y + \tfrac{13}{4}$$

über in

2) $$y^4 - \tfrac{35}{8}y^2 + \tfrac{15}{8}y + \tfrac{189}{256} = 0.$$

Hier ist

$$a = -\tfrac{35}{8}, \quad b = \tfrac{15}{8}, \quad c = \tfrac{189}{256}.$$

Die Hülfsgleichung

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0$$

wird also

$$z^3 - \tfrac{35}{4}z^2 + \tfrac{259}{16}z - \tfrac{225}{64} = 0$$

oder

3) $$z^3 - 3\cdot\tfrac{35}{12}z^2 + 3\cdot\tfrac{259}{48}z - \tfrac{225}{64} = 0,$$

womit die Form

$$z^3 - 3\alpha z^2 + 3\beta z - \gamma = 0$$

gefunden ist.

$z = \eta + \frac{35}{12}$ verwandelt dies in

$$\eta^3 - 3k\eta = 2b,$$

wo

$$k = \alpha^2 - \beta = \left(\tfrac{35}{12}\right)^2 - \tfrac{259}{48} = \tfrac{28}{9},$$

$$2b = 2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma = 2\left(\tfrac{35}{12}\right)^3 - 3\,\tfrac{35}{12}\cdot\tfrac{259}{48} + \tfrac{225}{64} = \tfrac{160}{27}$$

ist, also $b = \frac{80}{27}$. Die letzte Hülfsgleichung lautet also

4) $$\eta^3 - 3\tfrac{28}{9}\eta = 2\tfrac{80}{27}.$$

Da $b^2 - k^3 = \frac{6400}{729} - \frac{21\,952}{729}$ negativ ist, hat man die Cosinus-Methode anzuwenden. Der Hülfswinkel bestimmt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{k^3}} = \frac{80}{\sqrt{21\,952}}$$

als

$$\varphi = 57^0\,19'\,10'',$$

so daß

$$\frac{\varphi}{3} = 19^0\,6'\,23''$$

ist. Die eine Wurzel von 4) ist demnach

$$\eta_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{28}\cos 19^0\,6'\,23'' = \frac{10}{3}.$$

Dazu gehört

$$z_1 = \frac{10}{3} + \frac{35}{12} = \frac{75}{12} = \frac{25}{4} = u^2,$$

so daß $u = \frac{5}{2}$ eine Wurzel der nicht hingeschriebenen Hülfsgleichung

$$u^6 + 2au^4 + u^2(a^2 - 4c) - b^2$$

ist.

Demnach ist

$$v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{35}{8} + \frac{25}{4} - \frac{15}{8}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{16}.$$

Folglich

$$y_{1,2} = -\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - v} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16}} = -\frac{5}{4} \pm 1,$$

d. h.

$$y_1 = -\frac{1}{4},\quad y_2 = -\frac{9}{4}.$$

Schon damit ist als Wurzel von Gleichung 1) gefunden

$$x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{13}{4} = \frac{12}{4} = 3,\quad x_2 = -\frac{9}{4} + \frac{13}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Die übrigen Wurzeln bestimmen sich ebenso einfach als $x_3 = 4$ und $x_4 = 5$. Man kann dazu auch die Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten benutzen. Siehe unten (Nr. 47).

46) Allgemeine Bemerkungen.

Statt $u_1 = \frac{5}{2}$ konnte im letzten Beispiele auch $u_1 = -\frac{5}{2}$ benutzt werden. Denn auch dann wären v und w reelle Größen geworden. Ob statt η_1 auch η_2 und η_3 benutzt werden dürfen (die hier sämtlich reell waren), darüber wird allgemein folgendermaßen entschieden.

Die Gleichung 5) für z in Abschnitt 44 hat reelle Koeffizienten a und $a^2 - 4c$, folglich ist sie für uns stets lösbar. Nun sind zwei Hauptfälle möglich:

a) sämtliche Wurzeln z_1, z_2, z_3 sind reell;

b) eine, z. B. z_1 ist reell, die beiden andern, z_2 und z_3 sind der reellen Koeffizienten wegen konjugiert komplex und von der Form $p \pm qi$.

Fall a) Weil $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = b^2$, also positiv ist, so sind entweder sämtliche z positiv, oder eins davon, z. B. z_1 ist positiv, die andern beiden aber sind negativ. Andere Fälle sind ausgeschlossen. In dem einen Unterfalle giebt jedes z ein reelles $u = \sqrt{z}$, im andern giebt das eine positive ein reelles $u = \sqrt{z}$. Im einen Falle kann man also die Zerlegung mit drei verschiedenen u, im andern nur mit dem einen u vornehmen.

Fall b) Weil

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = z_1 \cdot (p + qi)(p - qi) = z_1 \cdot (p^2 + q^2)$$

gleich der positiven Größe b^2 sein muß, und weil der Faktor $p^2 + q^2$ stets positiv ist, so muß z_1 notwendig positiv sein, also giebt es auch hier ein reelles u.

Damit ist gezeigt, daß man stets mindestens ein reelles u findet und die angegebene Zerlegung stets möglich ist.

47) Zusammenhang zwischen den Wurzeln und Koeffizienten.

Jede Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten kann nach Obigem aufgelöst werden. Folglich läßt sich jede ganze rationale Funktion vierten Grades mit reellen Koeffizienten in ein Produkt von vier linearen Faktoren zerlegen, d. h. es ist

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

sobald x_1, x_2, x_3 und x_4 die Wurzeln der entsprechenden Gleichung sind. Sämtliche andern ganzen rationalen Funktionen vierten Grades, welche dieselben Wurzeln haben, können sich von dem Produkte nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

Multipliziert man das letztere aus, so erhält man

$$\begin{aligned} x^4 &- x^3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ &+ x^2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) \\ &- x(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) + x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

Folglich bestehen zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

die Beziehungen

$$a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$
$$c = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4,$$
$$d = x_1 x_2 x_3 x_4,$$

die leicht in Worte zu kleiden sind.

(Summe der Wurzeln, bezw. Summe aller möglichen Produkte aus je 2, 3, 4 Wurzeln.)

Es ist also leicht, Gleichungen vom vierten Grade aufzustellen, die gegebene Wurzeln haben sollen.

Sollen aber sämtliche Koeffizienten reell werden, so können komplexe Wurzeln nur in gerader Anzahl vorkommen, und sie müssen (nach den Schlußformeln für y) paarweise konjugiert sein.

So kann man z. B. Gleichungen bilden, die folgende Wurzeln haben:

$$2, 5, 6, 9; \quad 2, 5, 6 + 3i, 6 - 3i;$$
$$2 + 5i, 2 - 5i, 6 + 3i, 6 - 3i; \quad \text{u. s. w.}$$

III. Andeutungen über die Gleichungen n^{ten} Grades.

48) Die Wurzeln und Koeffizienten.

Die Gleichung n^{ten} Grades

$$1) \qquad (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) = 0$$

hat die Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, denn setzt man x gleich einem dieser Werte, so ist sie erfüllt.

Multipliziert man aus, so erhält man links eine ganze rationale Funktion vom n^{ten} Grade, also

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots + kx - l$$

oder

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots - kx + l,$$

je nachdem n eine ungerade oder gerade ganze Zahl ist. Dabei ist

$$
\begin{aligned}
a &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + n = \sum x_p, \\
b &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \cdots + x_{n-1} x_n = \sum x_p x_q, \\
c &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \sum x_p x_q x_r, \\
&\vdots \\
l &= x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n,
\end{aligned}
$$

was leicht in Worte zu fassen ist.

Jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, welche für dieselben Werte von x verschwindet und mit x^n beginnt, ist mit der Funktion 1) identisch.

Bemerkung. Damit zwei Funktionen identisch seien, müssen sie nach Seite 120 für mindestens $(n+1)$ Werte von x übereinstimmen. Die Übereinstimmung in $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist angenommen. Ein $(n+1)^{\text{ter}}$ Wert, in dem beide übereinstimmen, ist der Wert $x = \infty$. An einem Beispiele ist dies leicht zu verdeutlichen. Man betrachte zwei Funktionen

$$y = 3x^2 + 5x + 7 = x^2\left(3 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$$

und

$$\eta = 5x^2 + 8x + 6 = x^2\left(5 + \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}\right).$$

In jeder von ihnen werde $x = \infty$ gesetzt, dann wird $y = 3x^2$, $\eta = 5x^2$, so daß sich für $x = \infty$ die Werte der Funktionen wie 3 und 5 verhalten. Dagegen werden die Funktionen

$$y = 3x^2 + 5x + 7 = x^2\left(3 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$$

und

$$\eta = 3x^2 + 8x + 6 = x^2\left(3 + \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$

für $x = \infty$ beide gleich $3x^2$, d. h. sie stimmen für $x = \infty$ überein. So ist es stets, wenn die höchsten Potenzen denselben Faktor haben.

Damit ist die Übereinstimmung im $(n+1)^{\text{ten}}$ Werte für die beiden oben untersuchten Funktionen n^{ten} Grades nachgewiesen.

Ob jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades n Wurzeln hat, das bleibe vorläufig dahingestellt. Hat aber die Funktion n Wurzeln, so finden zwischen diesen und den Koeffizienten $a, b, c, \ldots, l$ die oben genannten Beziehungen statt.

Nur von diesem Falle soll vorläufig die Rede sein.

49) Sind die Koeffizienten $a, b, c, \ldots, l$ reell, so muß zu jeder etwa vorkommenden komplexen Wurzel $p + qi$ auch die konjugierte $p - qi$ vorhanden sein.

Beweis an einem Beispiele.

$$f(z) = z^2 + az + b$$

verschwinde für den komplexen Wert $z_1 = x_1 + y_1 i$, dann ist

$$\begin{aligned} f(z_1) &= (x_1 + y_1 i)^2 + a(x_1 + y_1 i) + b \\ &= x_1^2 + 2x_1 y_1 i - y_1^2 + ax_1 + ay_1 i + b \\ &= (x_1^2 - y_1^2 + ax_1 + b) + i(2x_1 y_1 + ay) = 0, \end{aligned}$$

folglich ist der reelle Teil für sich gleich Null und ebenso der imaginäre. Da aber

$$(x_1 - y_1^2 + ax_1 + b) = 0$$

und

$$i(2x_1 y_1 + ay_1) = 0$$

ist, so folgt auch

$$(x_1 - y_1^2 + ax_1 + b) - i(2x_1 y_1 + ay_1) = 0,$$

d. h. es ist auch

$$(x_1 - y_1 i)^2 + a(x_1 - y_1 i) + b = 0.$$

Folglich: Wenn $f(z) = z^2 + az + b$ für $z_1 = x_1 + y_1 i$ verschwindet, so verschwindet es auch für $z_1' = x_1 - y_1 i$.

Ganz dasselbe gilt, wie die Anwendung des binomischen Satzes auf $(x + y_1)$ zeigt, auch für Funktionen vom n^{ten} Grade. Bei jeder zeigt sich, daß

$$f(x_1 + y_1 i) = U_1 + V_1 i$$

sich in einen reellen und einen imaginären Teil zerlegen läßt, und daß beim Verschwinden der Funktion U_1 und V_1 für sich gleich Null sein müssen. Ist demnach $f(x_1 + y_1 i) = 0$, so muß auch

$$f(x_1 - y_1 i) = U_1 - V_1 i = 0$$

sein. Der Beweis gilt aber nur, weil das Imaginäre nicht in den Koeffizienten, sondern nur in dem Argumente $z = x + yi$ enthalten ist.

Nur dadurch, daß zu jeder Wurzel zugleich die konjugierte vorhanden ist, wird es ermöglicht, daß die Koeffizienten $a, b, c, \ldots, l$ reell sind.

In jedem heben sich die imaginären Bestandteile gegenseitig auf.

50) Andeutungen über den Fundamentalsatz.

Hat die Funktion n^{ten} Grades n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist sie durch $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, $\ldots$, $(x - x_n)$ ohne Rest teilbar.

Kennt man also von einer entsprechenden Gleichung eine Wurzel x_1, so kann man die Gleichung durch Division mit $(x - x_1)$ auf den $(n - 1)^{ten}$ Grad zurückführen.

Mit Hülfe von Stetigkeitsbetrachtungen, die über das Ziel der Schule hinausgehen, beweist die höhere Analysis, daß jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades mindestens eine Wurzel haben muß.

[Elementar erkennt man dies sofort an den ungeraden Funktionen. So sieht man z. B. daß

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)$$

für $x = + \infty$ den positiven Grenzwert $+ x^3$ hat, dagegen für $x = - \infty$ den negativen Grenzwert $- x^3$. Nach Seite 133 muß also zwischen $+ \infty$ und $- \infty$ mindestens eine Wurzel liegen.]

Ist dieser Satz bewiesen, so gilt er auch für die Funktion $(n - 1)^{ten}$ Grades, die man durch Division durch $(x - x_1)$ erhält. Folglich muß noch eine zweite Wurzel x_2 existieren. Man dividiert durch $(x - x_2)$, erhält den $(n - 2)^{ten}$ Grad und wiederholt so den Schluß.

So wird bewiesen, daß jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades n Wurzeln haben muß.

Erst Gauß ist es gelungen, den wichtigen Satz streng zu beweisen, was nur dadurch möglich war, daß die Variable x genötigt wurde, alle möglichen komplexen Zahlenwerte anzunehmen. Die Einführung der komplexen Größen ist also die Vorbedingung für den Fundamentalsatz der Algebra. Nur durch sie war eine wissenschaftliche Abrundung dieses Gebietes zu ermöglichen. Diese kann aber nur auf der Hochschule gegeben werden.