Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

III. Projektivische Punktreihen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

und e_3 durch folgende Überlegung. Wird die Polare r von e in G geschnitten, so muß die von G aus gezogene Tangente e_2 der vierte e zugeordnete Strahl zu GQ, GR und e sein. Sind nämlich X und Y die Berührungspunkte mit dem zu konstruierenden Kegelschnitte, so geht XY durch R, und X, Y, R und Z auf r sind harmonische Punkte. Nun schneidet e_2 die Gerade p in H und die Gerade q in J, während e die Gerade p in E und q in F schneidet. Die Geraden EJ und HF geben die Tangenten e_1 und e_3, die sich in K auf r schneiden, so daß auf jeder Polare zwei Tangentenschnitte liegen. Da P, Q, G, K harmonische Punkte sind, so können auch die zweiten Tangenten in E und F mit Hülfe des vierten harmonischen Strahles konstruiert werden. (Vergl. Schließungsproblem 16.) Die fertige Konstruktion kann mit Hülfe des Involutionssatzes von Desargues durchgeführt werden. (Siehe Anhang.)

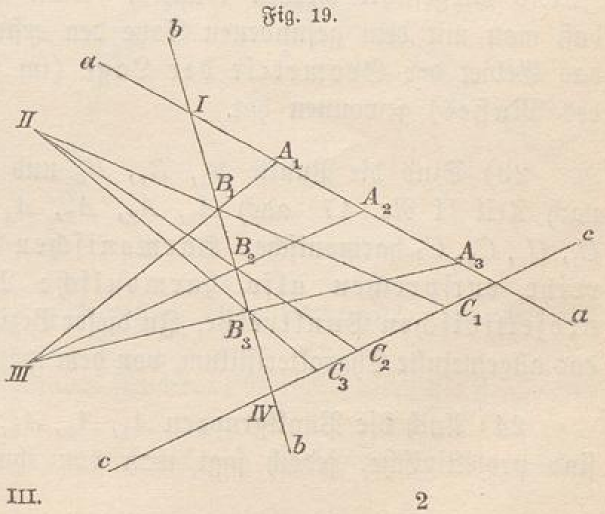
20) **Aufgabe.** Die reciproken Betrachtungen zu Abschnitt 19 anzustellen, bei denen es sich um Kegelschnitte handelt, von denen vier Tangenten gegeben sind, zu denen noch eine fünfte, oder ein Punkt tritt.

Bemerkung. Aus den letzten Betrachtungen ergiebt sich, daß, wenn von einem Kegelschnitte vier Tangenten und ein Punkt, oder vier Punkte und eine Tangente gegeben sind, man acht Stücke kennt, nämlich vier Tangenten und vier Punkte. Durch diese sind aber im allgemeinen jedesmal zwei Kegelschnitte bestimmt.

III. Projektivische Punktreihen.

21) Betrachtet man eine der Kegelschnittkonstruktionen nach Brianchon, z. B. die Konstruktion aus fünf Tangenten, so erkennt man leicht, daß sie sich aus dem Zusammenhange mit dem betreffenden Satze (über Kreis oder Kegelschnitte) ganz herauslösen läßt. Was hat dabei eigentlich stattgefunden? Gegeben waren die Punkte I, II, III, IV als Schnittpunkte der gegebenen Geraden a, $\overline{\text{I II}}$, $\overline{\text{II III}}$, $\overline{\text{III IV}}$

Fig. 19.



und c. Man hat die Gerade $\overline{\text{I IV}}$ oder b gezogen. Jeder Punkt B_n derselben ist von II aus auf c und von III aus auf a projiziert worden, was die Punkte C_n und A_n gegeben hat. Jede Verbindungslinie $A_n B_n$ wurde Tangente des gesuchten Kegelschnitts.

Durch Projektion der Figur 19 wird nichts Wesentliches geändert. Demnach gilt Folgendes:

Projiziert man die (nummerierten) Punkte einer festen Geraden von zwei festen Punkten aus auf zwei andere gegebene Gerade, und verbindet man je zwei zusammengehörige (gleichzahlige) Projektionspunkte mit einander, so umhüllen die Verbindungslinien einen Kegelschnitt, der auch die Träger der neuen Punktreihen und die Verbindungslinien zwischen den beiden Projektionscentren unter sich und mit den Schnitten der projizierten Geraden zu Tangenten hat.

22) Punktreihen wie $A_1, A_2, A_3, \ldots, C_1, C_2, C_3, \ldots$, die durch zwei verschiedene Projektionen aus ein und derselben Punktreihe entstanden sind, bezeichnet man als projektivische Punktreihen.

Der gefundene Satz läßt sich jetzt folgendermaßen ausdrücken:

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektivischer Punktreihen umhüllen einen Kegelschnitt, der auch die Träger der Punktreihen zu Tangenten hat.

Man kann diesen Satz als eine neue Definition des Kegelschnitts betrachten. Diese Erklärung ist unabhängig von jeder Maßbeziehung. Daß eine solche Definition möglich ist, charakterisiert die Kegelschnitte als rein projektivische Gebilde und klärt darüber auf, daß manche Konstruktionen ohne Hülfe des Zirkels ausgeführt werden konnten. Man wird schon jetzt erkennen, daß man mit dem gefundenen Satze den ersten wirklichen Einblick in das Gebiet der Geometrie der Lage (im Gegensatz zur Geometrie des Maßes) gewonnen hat.

23) Sind die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 harmonische, so sind nach Teil II Nr. 47) auch A_1, A_2, A_3, A_4 harmonische und ebenso C_1, C_2, C_3, C_4 harmonische. Harmonischen Punkten einer Punktreihe entsprechen also harmonische Punkte jeder zu ihr projektivischen Punktreihe. In dieser Beziehung liegt aber noch nicht das allgemeinste Charakteristikum, von dem später gesprochen werden soll.

24) Auch die Punktgruppen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sind projektivische, jedoch sagt man von ihnen, sie befinden sich in

perspektivischer Lage. Verbindet man die gleichnamigen Punkte, so gehen sämtliche Verbindungslinien durch einen Punkt, umhüllen also einen unendlich kleinen Kegelschnitt.

Man braucht nur die eine Gerade aus ihrer Lage zu verschieben und zu verdrehen, um den perspektivischen Charakter aufzuheben. Dann treffen die Strahlen nicht mehr denselben Punkt, sondern sie umhüllen einen Kegelschnitt.

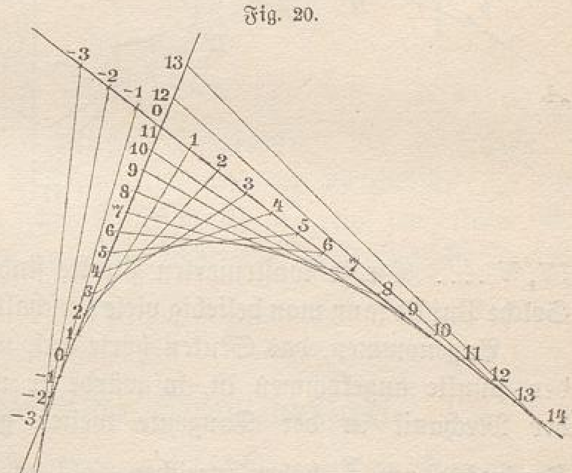
25) Nun lassen sich zwei Gruppen harmonischer Punkte dadurch in perspektivische Lage bringen, daß man zwei gleichnamige Punkte aufeinanderlegt. Vergl. Teil II, Geom. Nr. 50. Folglich:

Projektivische Punktreihen lassen sich stets in perspektivische Lage bringen. Die eine Gruppe läßt sich also auch direkt aus der andern durch Projektion erzeugen.

26) Sind die Träger a und b parallel, so nennt man die perspektivischen Punktreihen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ähnliche. Sind dabei auch die projizierenden Strahlen parallel, so nennt man sie congruente Punktreihen. Sind die Träger a und b nicht parallel, die projizierenden Strahlen aber parallel, so sind die Punktreihen ebenfalls ähnliche.

Bringt man ähnliche oder congruente Punktreihen in eine nicht perspektivische gegenseitige Lage, so muß die Umhüllungscurve der Verbindungslinien zusammengehöriger Punkte ein Kegelschnitt sein. Dieser Kegelschnitt hat nur einen Arm, reicht aber ins Unendliche, er ist also eine Parabel. Folglich:

Fig. 20.



Folgen auf zwei Geraden Punktreihen in gleichem Abstande auf einander, so ist die Umhüllungscurve der Verbindungslinien einander entsprechender Punkte im allgemeinen eine Parabel.

Im Falle gleichen Abstandes für beide Geraden wird die Zeichnung eine symmetrische.

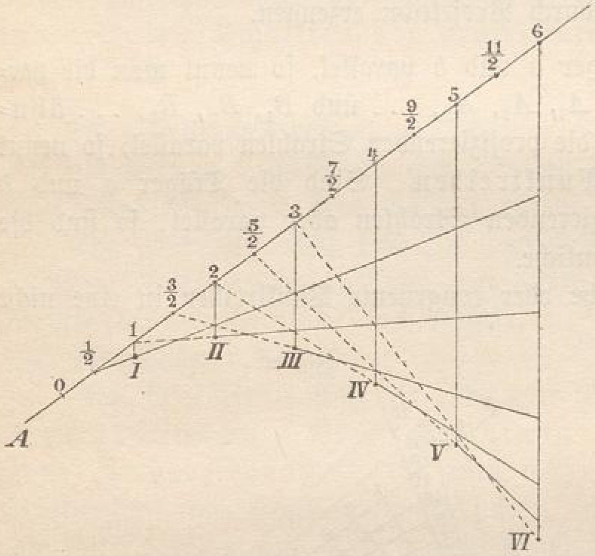
Durch die Kongruenz und Ähnlichkeit, ebenso durch die gleichen

Abstände, hat man wieder eine Maßbeziehung in die Betrachtung eingeführt, jedoch erleichtert dies für die Schulzwecke die Betrachtung.

27) Die Hochschule beginnt die neuere Geometrie der Kegelschnitte mit der Definition durch projektivische Punktreihen. Für unsern Zweck reicht es aus, die folgende Möglichkeit einer Umkehrung des früheren Lehrganges anzudeuten:

a) Die Erklärung der Parabel kann auf dem Wege der Mechanik oder Kinematik (Kinetik) gegeben werden. Ein Punkt bewege sich auf der Geraden AB mit konstanter Geschwindigkeit, diese senke sich aber dabei mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit. Nach dem Fallgesetze (vgl. Teil II, Geom. Nr. 104) ist dann der Senkungsweg in t Sekunden $h = \frac{1}{2} g t^2$, wo $\frac{g}{2}$ die Senkung in der ersten Sekunde ist. Die Senkung ist also nach 1, 2, 3, 4, 5, ... Sekunden $\frac{g}{2}$, $4\frac{g}{2}$, $9\frac{g}{2}$, $16\frac{g}{2}$, $25\frac{g}{2}$ u. s. w. Statt also nach 1, 2, 3, 4, 5 ... zu gelangen, gelangt der Punkt nach I, II, III, IV, V .... Die so konstruierten Punkte sind Punkte einer Parabel. Solche Punkte kann man beliebig viele einschalten. (Vgl. Teil II, Fig. 187.)

Fig. 21.

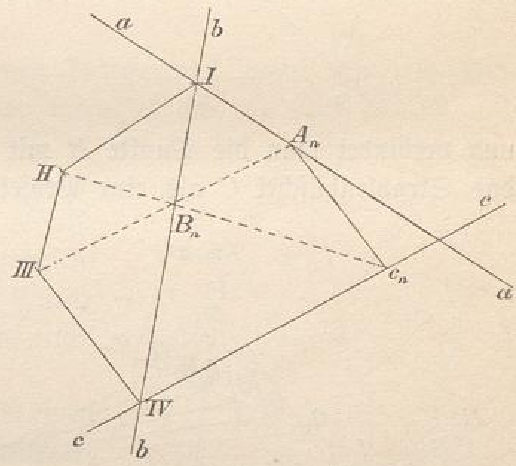


Angenommen, das Senken hörte auf, wenn der „Körper" in einem der Punkte angekommen ist, so würde er nach dem Beharrungsgesetze der Mechanik in der Tangente weiter gehen und die benachbarte Senkrechte um $\frac{g}{2}$ höher erreichen, als es vorher geschah. Also sind die Tangenten der Parabel sehr bequem mit Hülfe der Länge $\overline{1\,\mathrm{I}} = \frac{g}{2}$ zu konstruieren. Zieht man die Tangenten bis zur größten der Senkrechten durch, so sieht man auf dieser das Fallgesetz für die einzelnen Sekunden 1 : 3 : 5 : 7 : 9 ... veranschaulicht. Auf der Tangente AB aber schneiden die gezeichneten Tangenten gleiche Stücke ab. Dasselbe geschieht ebenso auf jeder andern der gezeichneten Tangenten. Folglich stimmt die Definition der Mechanik mit der Definition aus den Verbindungslinien der Punkte, die auf zwei Trägern in gleichem Abstande auf einander folgen, überein.

b) Jetzt definiert man jeden Kegelschnitt als Projektion einer Parabel. Daraus folgt, daß man durch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projektivischer Punktreihen einen Kegelschnitt erhält.

c) Ist nun b die ursprüngliche Punktreihe, c die von II aus projizierte, a die von III aus projizierte, und sind A_n und C_n die Projektionen von B_n, so ist $A_n C_n$ eine Tangente des Kegelschnitts, der außerdem, wie die Konstruktion zeigt, die Geraden a, c, $\overline{\text{I II}}$, $\overline{\text{II III}}$, $\overline{\text{III IV}}$ berührt. Demnach ist A_n I II III IV C_n ein Tangentensechseck, und in diesem treffen sich die Diagonalen I IV, II C_n und III A_n in einem Punkte. Damit ist der Brianchon-Satz, wenn man von der Parabeldefinition absieht, ohne die Geometrie des Maßes bewiesen. Die Hochschule ist imstande, jeden Rest von Maßgeometrie aus der Betrachtung zu entfernen. (Vgl. Thomae: Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung. Dort wird alles aus dem Satze über perspektivische Dreiecke abgeleitet.)

Fig. 21b.



IV. Projektivische Strahlenbüschel.

28) Die reciproke Betrachtung läßt sich an jede Aufgabe der Pascalschen Gruppe, z. B. Aufgabe 3, anschließen. Bei dieser ist im Grunde nur Folgendes geschehen.

Die Punktreihe der R_n auf einer festen Geraden r ist mit zwei Punkten P und C verbunden worden, was die Strahlenbüschel P und C giebt. Das Strahlenbüschel P ist durch eine Gerade q geschnitten, was die Punktreihe der Q_n giebt. Die Punktreihe der Q_n