UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

IV. Projektivische Strahlenbüschel

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

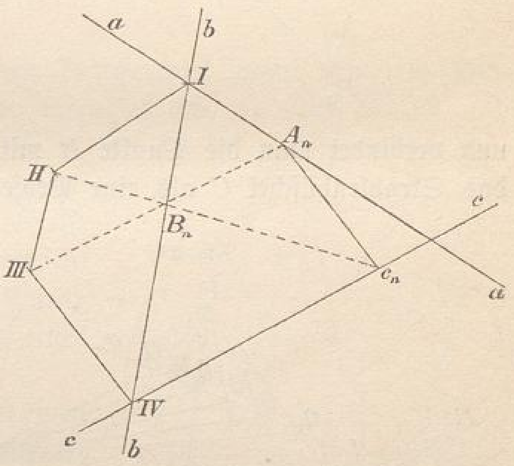
Visual Library

gleiche Stücke ab. Dasselbe geschieht ebenso auf jeder andern der gezeichneten Tangenten. Folglich stimmt die Definition der Mechanik mit der Definition aus den Verbindungslinien der Punkte, die auf zwei Trägern in gleichem Abstande auf einander folgen, überein.

b) Jetzt definiert man jeden Kegelschnitt als Projektion einer Parabel. Daraus folgt, daß man durch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projektivischer Punktreihen einen Kegelschnitt erhält.

c) Ist nun b die ursprüngliche Punktreihe, c die von II aus projizierte, a die von III aus projizierte, und sind A_n und C_n die Projektionen von B_n, so ist $A_n C_n$ eine Tangente des Kegelschnitts, der außerdem, wie die Konstruktion zeigt, die Geraden a, c, $\overline{\text{I II}}$, $\overline{\text{II III}}$, $\overline{\text{III IV}}$ berührt. Demnach ist A_n I II III IV C_n ein Tangentensechseck, und in diesem treffen sich die Diagonalen I IV, II C_n und III A_n in einem Punkte. Damit ist der Brianchon-Satz, wenn man von der Parabeldefinition absieht,

Fig. 21 b.



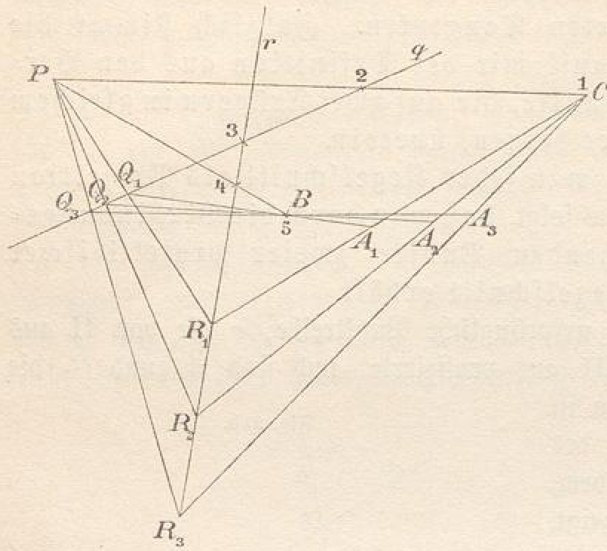
ohne die Geometrie des Maßes bewiesen. Die Hochschule ist imstande, jeden Rest von Maßgeometrie aus der Betrachtung zu entfernen. (Vgl. Thomae: Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung. Dort wird alles aus dem Satze über perspektivische Dreiecke abgeleitet.)

IV. Projektivische Strahlenbüschel.

28) Die reciproke Betrachtung läßt sich an jede Aufgabe der Pascalschen Gruppe, z. B. Aufgabe 3, anschließen. Bei dieser ist im Grunde nur Folgendes geschehen.

Die Punktreihe der R_n auf einer festen Geraden r ist mit zwei Punkten P und C verbunden worden, was die Strahlenbüschel P und C giebt. Das Strahlenbüschel P ist durch eine Gerade q geschnitten, was die Punktreihe der Q_n giebt. Die Punktreihe der Q_n

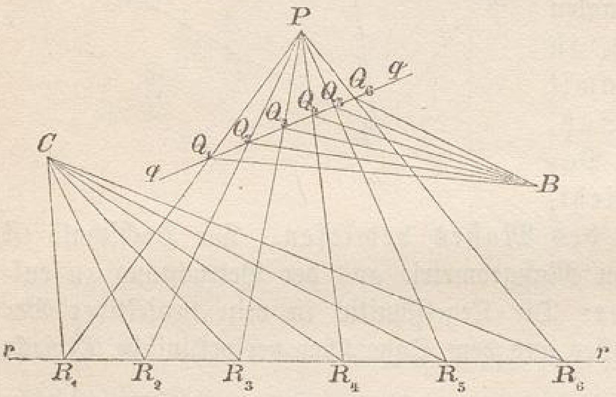
Fig. 22.



ist mit einem festen Punkte B verbunden worden, was ein Strahlenbüschel B giebt. Die gleichnamigen Strahlen der Büschel B und C schneiden sich in Punkten A_n, die einem Kegelschnitte angehören, der durch C, 2, 3, 4, B geht.

Schneidet man das Strahlenbüschel P durch eine Gerade r, und verbindet man die Punkte R mit einem Punkte C, so kann man das Strahlenbüschel C als eine Projektion des Büschels P, vermittelt durch die Gerade r, betrachten. Ebenso ist das Büschel B eine Projektion vom Büschel P. Die Büschel B und C, die durch verschiedene Projektionen aus demselben Büschel P entstanden sind, bezeichnet man als **projektivische Strahlenbüschel.** Von den Büscheln P und C sagt man, sie befinden sich in **perspektivischer Lage**, ebenso von den Büscheln P und B. Die Gerade heißt Perspektivitätsachse.

Fig. 23.



Die ganze Ausdrucksweise ist die reciproke zu der im vorigen Abschnitte angewandten. An Stelle der Punkte sind Strahlen, an Stelle der Punktreihen Strahlenbüschel getreten und umgekehrt.

Aus der oben genannten Konstruktion folgt der Satz: **Die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen projektivischer Strahlenbüschel liegen auf einem Kegelschnitte, der auch durch die Büschelpunkte geht.**

Dieser Satz ist unabhängig von jeder Maßbeziehung.

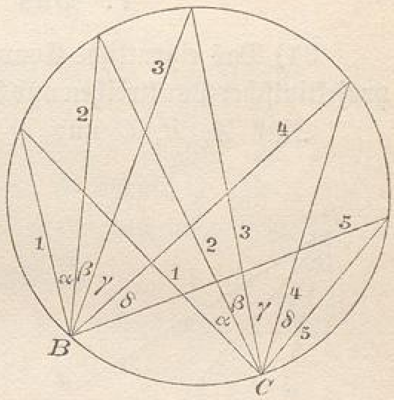
Er kann zu einer neuen Definition des Begriffs Kegelschnitt verwandt werden.

29) Auch hier gehören, wie aus der Projektion hervorgeht, zu harmonischen Strahlen des Büschels C solche von P, und zu harmonischen Strahlen von P solche von B. Folglich gilt dasselbe von B und C. Also: **Bei projektivischen Strahlenbüscheln gehören zu harmonischen Strahlen des einen harmonische Strahlen des andern.** Aber auch hier giebt es eine noch allgemeinere Beziehung, deren Behandlung noch folgt.

Da sich übrigens zwei Gruppen harmonischer Strahlen stets in perspektivische Lage bringen lassen, so folgt, **daß projektivische Strahlenbüschel stets in perspektivische Lage gebracht werden können.**

30) Strahlenbüschel können **kongruent** bezw. **ähnlich** sein. Sieht man von der Länge der Strahlen ab, so sind ähnlich und kongruent hier identisch.

Fig. 24.



Nach dem Satze von der Gleichheit der Peripheriewinkel am Kreise geben aber zwei kongruente Strahlenbüschel B und C als Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen einen **Kreis**. (Fig. 24.)

Projektion des letzteren giebt einen Kegelschnitt, die Projektion kongruenter Strahlenbüschel giebt aber **projektivische Strahlenbüschel**. (Es sind gewissermaßen mit demselben Büschel zwei Projektionen vorgenommen worden.)

Man könnte also auch hier den Unterrichtsgang umkehren und sagen:

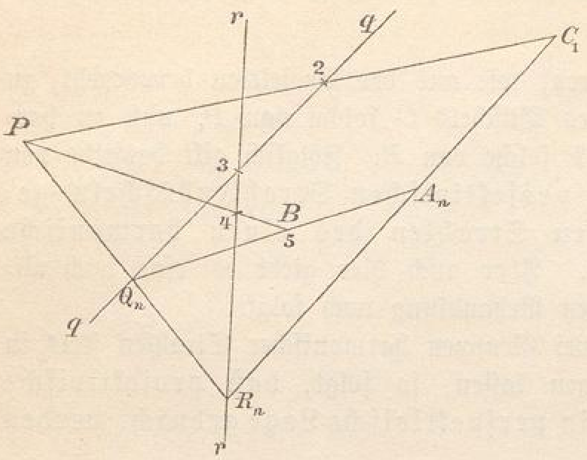
a) Kongruente Strahlenbüschel geben einen Kreis.

b) Demnach geben projektivische Strahlenbüschel einen Kegelschnitt.

c) Ist nun P ein Strahlenbüschel, geschnitten durch r und q, und sind $B_{(5)}$ und $C_{(1)}$ feste Punkte, sind ferner Q_n und R_n, ebenso Q_n und A_n zusammengehörige Punkte der Projektivbüschel durch P, B und C, so ist der Ort für A_n, wie die Konstruktion zeigt, ein Kegelschnitt, der durch folgende Punkte geht: durch C_1, durch 2, d. h. den Durchschnitt von q und dem gemeinschaftlichen Strahle PC_1, durch 3, den Schnitt von q und r, durch 4, den Schnitt von r und dem gemeinschaftlichen Strahle PB und durch B_5. Man hat also in $C_1 2 3 4 B_5 A_n$ ein Sehnen-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 25.



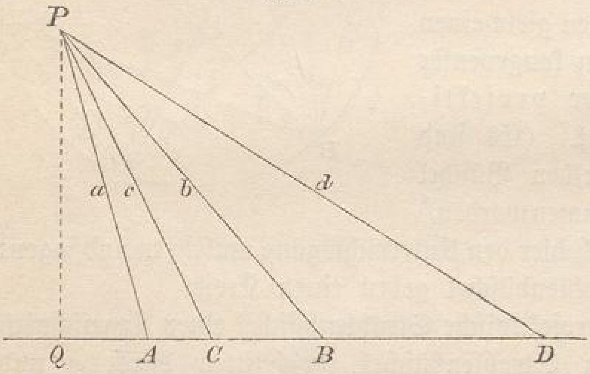
sechseck eines Kegelschnitts. P, Q_n und R_n sind die Schnittpunkte der Gegenseiten desselben, und diese liegen auf einer Geraden. Damit ist, wenn man von der Definition des Kreises bezw. der gleichen Winkel absieht, der Pascalsche Satz ohne jede Maßbeziehung bewiesen. Die Hochschule kann auch hier jeden Rest von Maßbeziehungen entfernen.

V. Das Doppelverhältnis.

31) Das eigentliche Charakteristikum der gegenseitigen Beziehungen projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel ergiebt sich folgendermaßen.

Sind A, B, C und D harmonische Punkte, so ist

Fig. 26.



$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD},$$

oder wenn man $-BC$ für CB schreibt,

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1.$$

Ist aber D nicht der vierte harmonische, sondern ein beliebiger Punkt der Geraden, so ist $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ verschieden von -1 und hat für jede Lage von D einen bestimmten Wert. Da es sich um das Verhältnis zweier Verhältnisse handelt, nennt man den Ausdruck das Doppelverhältnis der vier Punkte und bezeichnet es als $(ABCD)$.*)

*) Bei der hier gewählten Schreibweise sind die zugeordneten Punkte nebeneinander geschrieben.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN