Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

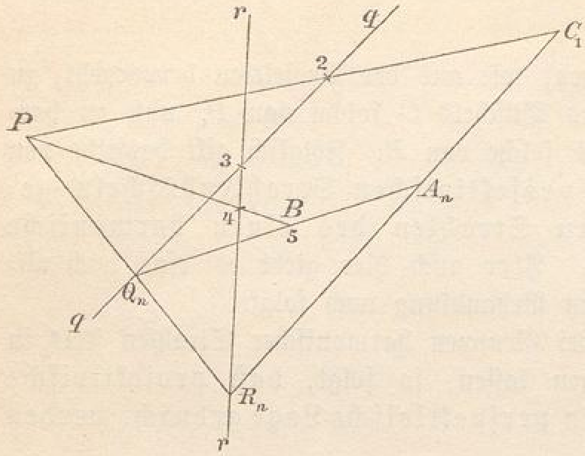
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

V. Das Doppelverhältnis

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Fig. 25.



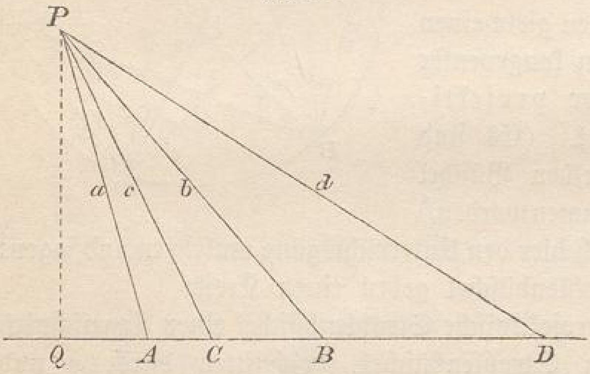
sechseck eines Kegelschnitts. P, Q_n und R_n sind die Schnittpunkte der Gegenseiten desselben, und diese liegen auf einer Geraden. Damit ist, wenn man von der Definition des Kreises bezw. der gleichen Winkel absieht, der Pascalsche Satz ohne jede Maßbeziehung bewiesen. Die Hochschule kann auch hier jeden Rest von Maßbeziehungen entfernen.

V. Das Doppelverhältnis.

31) Das eigentliche Charakteristikum der gegenseitigen Beziehungen projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel ergiebt sich folgendermaßen.

Sind A, B, C und D harmonische Punkte, so ist

Fig. 26.



$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD},$$

oder wenn man $-BC$ für CB schreibt,

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1.$$

Ist aber D nicht der vierte harmonische, sondern ein beliebiger Punkt der Geraden, so ist $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ verschieden von -1 und hat für jede Lage von D einen bestimmten Wert. Da es sich um das Verhältnis zweier Verhältnisse handelt, nennt man den Ausdruck das Doppelverhältnis der vier Punkte und bezeichnet es als $(ABCD)$.*)

*) Bei der hier gewählten Schreibweise sind die zugeordneten Punkte nebeneinander geschrieben.

32) Es fragt sich nun, ob, wenn man die Punkte A, B, C, D mit einem beliebigen Punkte P verbindet, für die Strahlen etwas Entsprechendes gilt.

Bezeichnet man den Winkel zwischen a und c mit (ac), so ist

$$2 \cdot \triangle APC = PA \cdot PC \sin(ac) = AC \cdot PQ,$$

folglich

$$\frac{AC}{\sin(ac)} = \frac{PA \cdot PC}{PQ}, \text{ und ebenso } \frac{BC}{\sin(bc)} = \frac{PB \cdot PC}{PQ},$$

durch Division also

1) $$\frac{AC}{BC} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}.$$

Ebenso ist

$$\frac{AD}{\sin(ad)} = \frac{PA \cdot PD}{PQ}, \quad \frac{BD}{\sin(bd)} = \frac{PB \cdot PD}{PQ},$$

also durch Division

2) $$\frac{AD}{BD} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Durch Division ergiebt sich aus 1) und 2) die Beziehung

3) $$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Die linke Seite ist das Doppelverhältnis der vier Punkte. Die rechte Seite heißt analog das Doppelverhältnis der vier Strahlen. Es wird mit $(abcd)$ bezeichnet. A und B, ebenso C und D sind zugeordnete Punkte, a und b, ebenso c und d zugeordnete Strahlen. Gleichung 3 lautet in der vereinfachten Schreibweise

4) $$(ABCD) = (abcd).$$

Also: Das Strahlenbüschel und die schneidende Gerade haben für je vier Elemente dasselbe Doppelverhältnis.

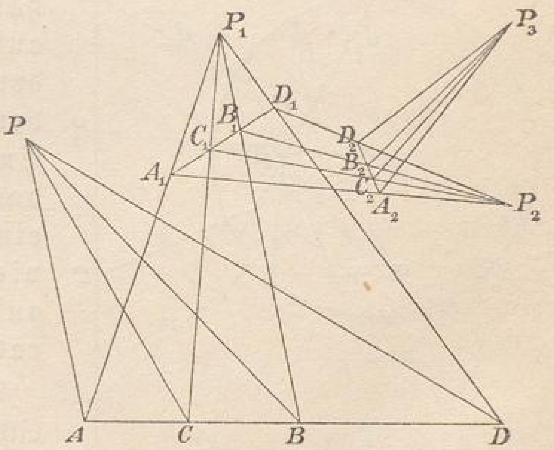
33) Bildet man nun aus dem Strahlenbüschel P auf projektivischem Wege ein perspektivisches P_1, so ist

$$(abcd) = ABCD = (a_1 b_1 c_1 d_1).$$

Bildet man aus der Punktreihe $ABCD$ eine perspektivische $A_1 B_1 C_1 D_1$, so ist

$$ABCD = (abcd) = A_1 B_1 C_1 D_1.$$

Fig. 27.



Wie man nun auch projektivisch fortfahren möge, stets bleibt der Wert der Doppelverhältnisse unveränderlich.

Folglich gelten die Sätze:

Bei projektivischen Punktreihen haben je vier Punkte des einen stets dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Punkte des andern.

Bei projektivischen Strahlenbüscheln haben je vier Strahlen des einen dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Strahlen des andern.

Da aber auch die Doppelverhältnisse der Strahlen und der zugehörigen Punktgruppen gleich sind, so folgt ganz allgemein:

Bei projektivischen Gebilden ist für je vier Paare einander entsprechender Elemente das Doppelverhältnis dasselbe.

Die drei Sätze geben die Gleichungen:

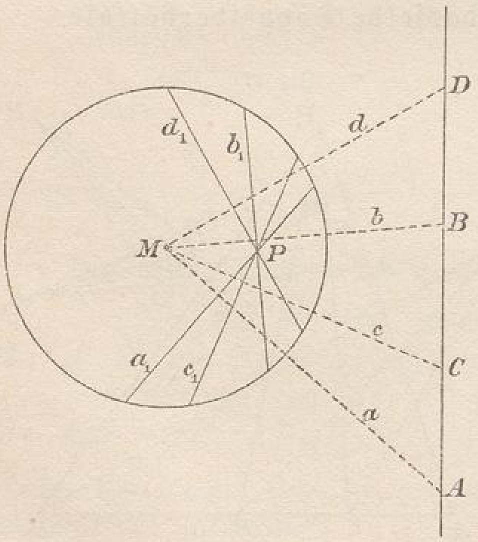
$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D), \quad (abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1),$$
$$(ABCD) = (a_1 b_1 c_1 d_1).$$

34) Bei der kongruenten Abbildung sind die homologen Winkel gleich, die Längen homologer Seiten ebenfalls gleich.

Bei der ähnlichen Abbildung sind die homologen Winkel gleich und die Längen homologer Seiten stehen in konstantem Verhältnis.

Bei der Abbildung durch Projektion ist das Doppelverhältnis von je vier Punkten auf einer Geraden gleich dem der vier entsprechenden Punkte; ebenso ist das Doppelverhältnis von je vier Strahlen gleich dem der vier entsprechenden Strahlen.

Fig. 28.



35) Es giebt aber nach Obigem auch projektivische Beziehungen, bei denen das Doppelverhältnis von je vier Punkten auf einer Geraden gleich dem der vier entsprechenden Strahlen durch einen Punkt ist, und umgekehrt, das von vier Strahlen durch einen Punkt gleich dem der vier entsprechenden Punkte auf der entsprechenden Geraden.

Dies geschieht z. B. bei der Abbildung durch reciproke Polaren.

Verbindet man nämlich die Punkte $ABCD$ in Figur 28 mit M, so sind zunächst die Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(abcd)$ einander gleich. Ist aber P der Pol der Geraden p, und fällt man von ihm aus auf die Strahlen a, b, c, d Lote, so erhält man die Polaren a_1, b_1, c_1, d_1 der Punkte $ABCD$, und diese bilden ein zum vorigen kongruentes Strahlenbüschel, denn sie folgen unter denselben Winkeln aufeinander, wie jene. Aus $(ABCD) = (abcd)$ und $(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$ folgt $(ABCD) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$.

Durch Projektion dieser Figur erkennt man, daß ganz allgemein **bei der Abbildung durch reciproke Polaren mittels eines beliebigen Kegelschnitts die Doppelverhältnisse** $(ABCD)$ und $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ ebenfalls gleich bleiben.

36) Durch Abbildung mittels reciproker Polaren wird jede Figur von der Gestalt 29 in eine von der Gestalt 30 verwandelt, d. h. perspektivische Strahlenbüschel verwandeln sich in perspektivische Punktreihen; ebenso verwandeln sich projektivische Strahlenbüschel in projektivische Punktreihen, und umgekehrt.

Fig. 29.

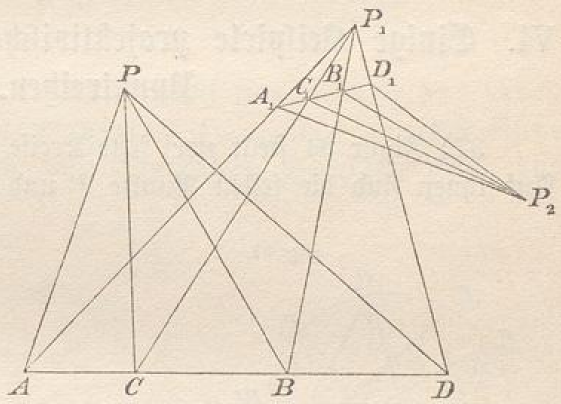
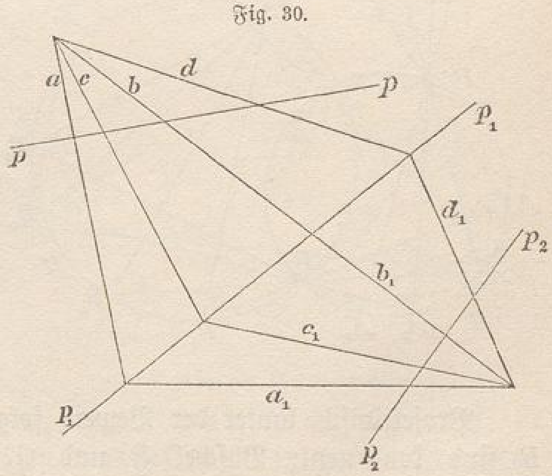


Fig. 30.



Die Verbindungslinien entsprechender Elemente projektivischer Punktreihen gehen also über in die Durchschnittspunkte entsprechender Elemente von projektivischen Strahlenbüscheln. Folglich:

Durch Abbildung mittels reciproker Polaren gehen sämtliche Punkte jedes Kegelschnitts über in die sämtlichen Tangenten eines entsprechenden Kegelschnitts.

Dabei bleiben sowohl

die harmonischen Verhältnisse, als auch die Doppelverhältnisse allgemeiner Art erhalten.

Noch ein Punkt sei hier erwähnt: Betrachtet man das Doppelverhältnis

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD) = k,$$

so sind im ganzen 24 Umstellungen in der Reihenfolge der Punkte möglich. Von diesen sämtlichen Doppelverhältnissen stimmen je vier mit einander überein, so ist z. B., wie die ursprüngliche Schreibweise zeigt,

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = k.$$

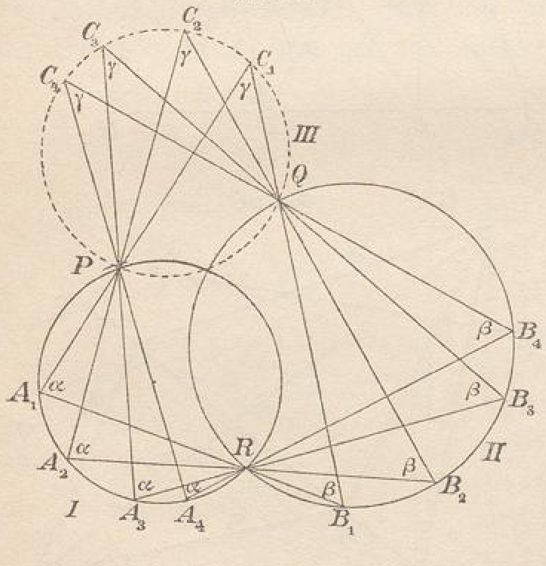
(Die übrigen geben die Werte $\frac{1}{k}$, $1 - k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$ und $\frac{k}{k-1}$.)

Entsprechendes findet für Strahlen statt.

VI. Einige Beispiele projektivischer Strahlenbüschel und Punktreihen.

37) Figur 31 stellt zwei feste Kreise dar, die sich in R schneiden. Auf ihnen sind die festen Punkte P und Q angenommen. Durch R sind beliebig viele Sekanten AB gelegt, durch die A und den Punkt P, ebenso durch die B und den Punkt Q die entsprechenden Strahlen gezogen. Die zusammengehörigen Strahlen geben einen Kreis durch P und Q und den zweiten Schnittpunkt. Der Beweis liegt, elementar betrachtet, darin, daß alle α gleich sind, ebenso alle β, daß also jedes $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist. Demnach liegen die C sämtlich auf einem Kreise.

Fig. 31.



Projektivisch lautet der Beweis folgendermaßen: Büschel P und R sind kongruent; Büschel R und Q ebenfalls, folglich sind auch