UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

VI. Einige Beispiele projektivischer Strahlenbüschel und Punktreihen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Visual Library

die harmonischen Verhältnisse, als auch die Doppelverhältnisse allgemeiner Art erhalten.

Noch ein Punkt sei hier erwähnt: Betrachtet man das Doppelverhältnis

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD) = k,$$

so sind im ganzen 24 Umstellungen in der Reihenfolge der Punkte möglich. Von diesen sämtlichen Doppelverhältnissen stimmen je vier mit einander überein, so ist z. B., wie die ursprüngliche Schreibweise zeigt,

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = k.$$

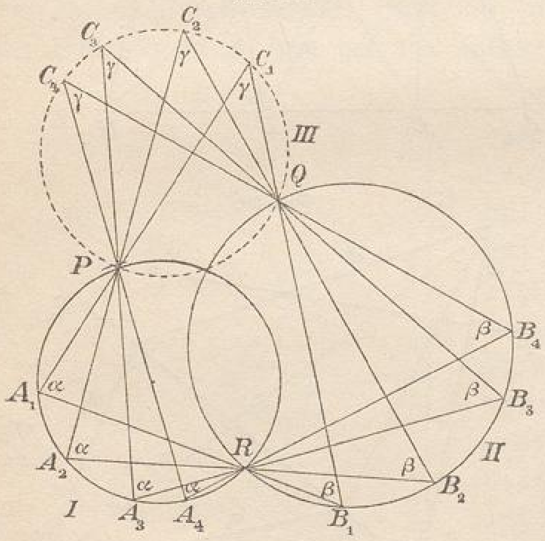
$\left(\text{Die übrigen geben die Werte } \frac{1}{k}, 1 - k, \frac{1}{1-k}, \frac{k-1}{k} \text{ und } \frac{k}{k-1}.\right)$

Entsprechendes findet für Strahlen statt.

VI. Einige Beispiele projektivischer Strahlenbüschel und Punktreihen.

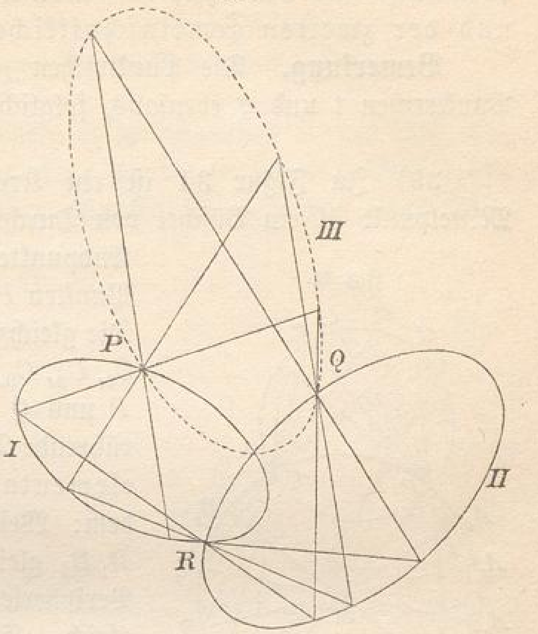
37) Figur 31 stellt zwei feste Kreise dar, die sich in R schneiden. Auf ihnen sind die festen Punkte P und Q angenommen. Durch R sind beliebig viele Sekanten AB gelegt, durch die A und den Punkt P, ebenso durch die B und den Punkt Q die entsprechenden Strahlen gezogen. Die zusammengehörigen Strahlen geben einen Kreis durch P und Q und den zweiten Schnittpunkt. Der Beweis liegt, elementar betrachtet, darin, daß alle α gleich sind, ebenso alle β, daß also jedes $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist. Demnach liegen die C sämtlich auf einem Kreise.

Fig. 31.



Projektivisch lautet der Beweis folgendermaßen: Büschel P und R sind kongruent; Büschel R und Q ebenfalls, folglich sind auch

Fig. 32.



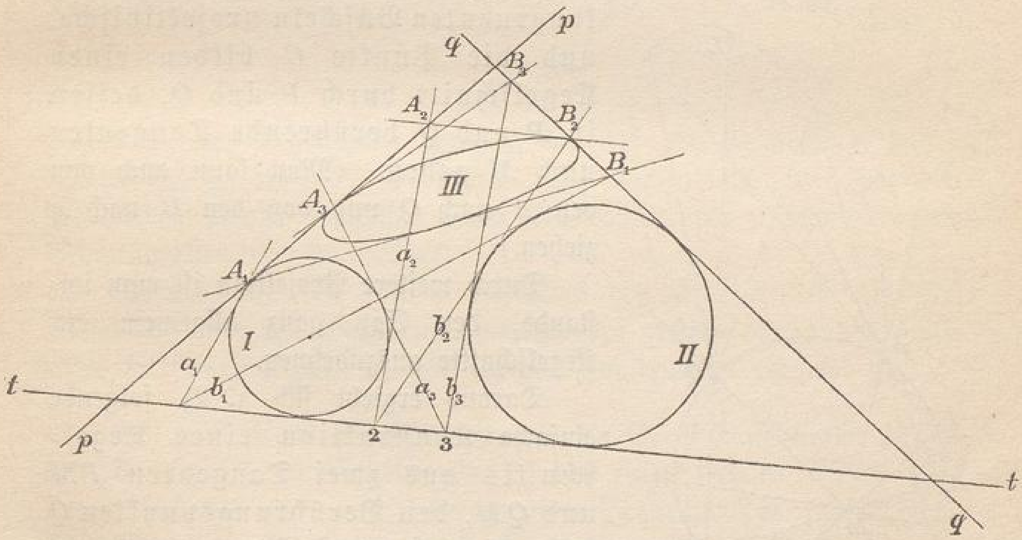
Büschel P und Q kongruent. — Die Möglichkeit der Übertragung von Fig. 31 in Fig. 32 durch Projektion ist selbstverständlich.

Sagt man statt kongruent projektivisch, so gilt dieselbe Schlußfolgerung. Sind demnach I und II beliebige Kegelschnitte, so ist auch III ein Kegelschnitt. Der darin liegende Satz ist leicht in Worten auszudrücken.

38) Der reciproke Satz wird folgendermaßen lauten:

Zieht man eine gemeinschaftliche Tangente t zweier Kegelschnitte I und II (z. B. Kreise) und von ihren Punkten aus eine Tangentenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nach einer Tangente p von I, und von denselben Punkten aus eine

Fig. 33.

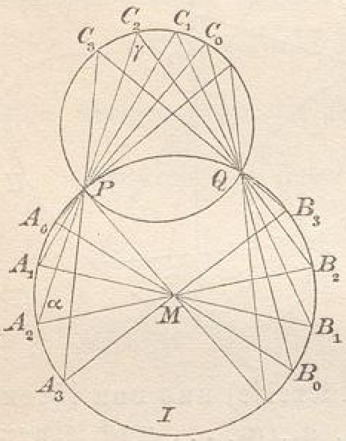


Tangentenfolge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ nach einer Tangente q von II, was die Punktreihen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ giebt, so sind diese Punktreihen projektivische, und ihre Verbindungslinien umhüllen einen Kegelschnitt, der von p und q und der zweiten gemeinschaftlichen Tangente berührt wird.

Bemerkung. Die Punktreihen p und t sind projektivische, die Punktreihen t und q ebenfalls, folglich auch die Punktreihen p und q.

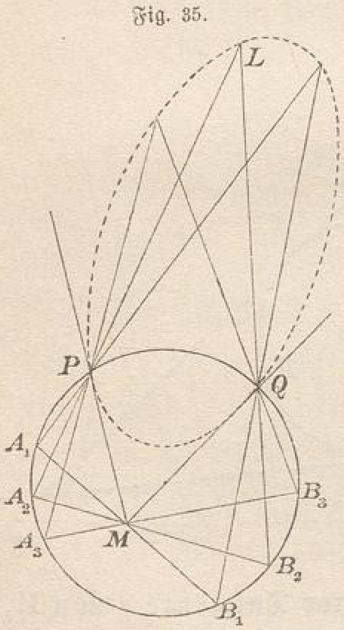
39) In Figur 34 ist ein Kreis I dargestellt, durch dessen Mittelpunkt M ein Büschel von Durchmessern gezogen ist. Sämtliche Endpunkte A und B sind mit zwei festen Punkten P bezw. Q des Kreises verbunden. Die gleichzahligen Strahlen geben Schnitte $C_1, C_2, C_3, \ldots$, die auf einem Kreise durch P und Q gehen, dessen in P und Q berührende Tangenten durch M gehen. Der elementare Beweis beruht in Folgendem: Weil je zwei Bogen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gleich groß sind, so sind auch die Peripheriewinkel $A_1 P A_2$ und $B_1 Q B_2$ gleich. Es handelt sich also bei P und Q um kongruente Strahlenbüschel. Folglich müssen die C auf einem Kreise liegen.

Fig. 34.



Projiziert man nun central, z. B. so, daß Kreis I wieder in einen Kreis übergeht, der Punkt M aber excentrisch fällt, so werden aus den kongruenten Büscheln projektivische, und die Punkte C bilden einen Kegelschnitt durch P und Q, dessen in P und Q berührende Tangenten nach M gehen. (Man kann auch von den A nach Q und von den B nach P ziehen.)

Fig. 35.



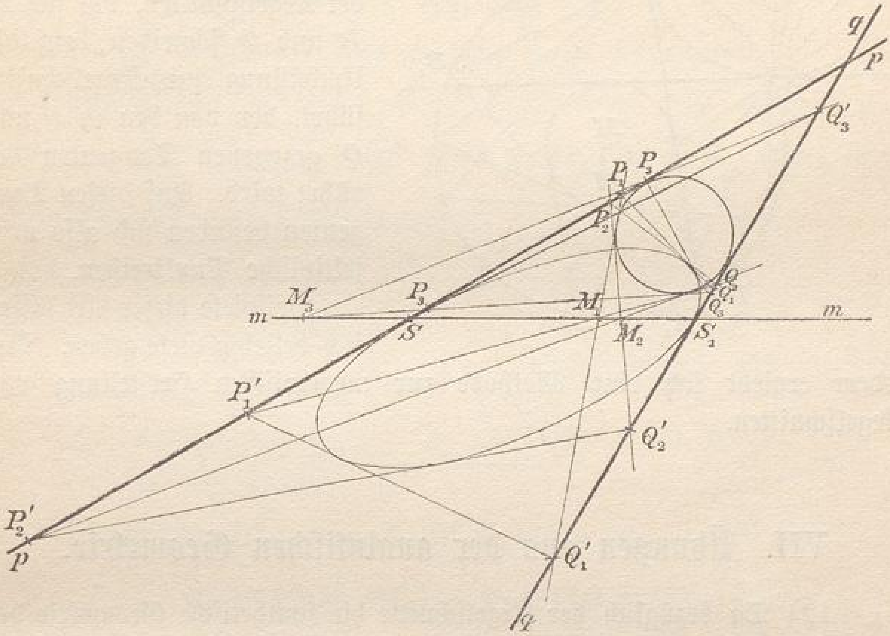
Durch weitere Projektion ist man imstande, den Satz ganz allgemein auf Kegelschnitte auszudehnen.

Daraus ergiebt sich z. B. folgende einfache Konstruktion eines Kegelschnitts aus zwei Tangenten PM und QM, den Berührungspunkten Q und M auf demselben und einem Punkte L.

Auflösung. Man ziehe LP, lege durch M eine Gerade MA_1 so, daß $\sphericalangle MA_1P = \sphericalangle PQL$ ist, und ziehe LQ bis zum Schnitte B_1 mit A_1M. Dann läßt sich um PQB_1A_1 ein Kreis schlagen (Summe der Gegenwinkel des Vierecks $= 180^0$). An diesem Kreise wird die vorige Konstruktion vorgenommen.

40) Der reciproke Satz würde folgendermaßen lauten: Die Geraden p und q seien Tangenten eines gegebenen Kegelschnittes I, m eine beliebige Gerade. Von jedem Punkte M_n derselben seien Tan-

Fig. 36.



genten an den Kegelschnitt gezogen, die auf den Geraden p und q Punkte P_n, Q_n bezw. P_n', Q_n' geben. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte umhüllen einen Kegelschnitt, der p und q in den Schnittpunkten mit m berührt.

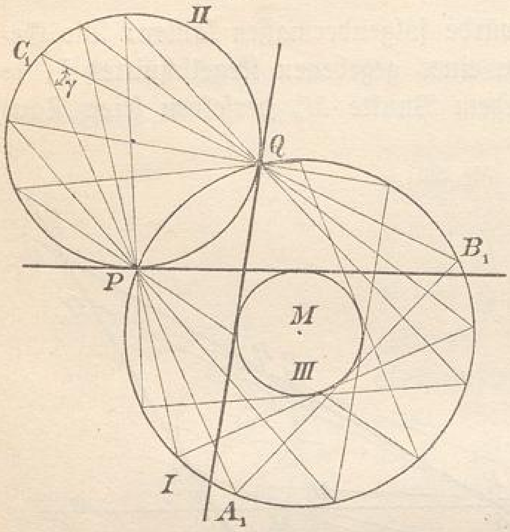
Daraus läßt sich eine Konstruktion des Kegelschnitts aus drei Tangenten und den Berührungspunkten auf zweien davon mit Hülfe eines Kreises ableiten, die zur vorigen Konstruktion reciprok ist.

41) In Figur 34 schnitten sich die Verbindungslinien der A und B sämtlich im Mittelpunkte M des einen Kreises. Dies liegt daran, daß die in P und Q berührenden Tangenten des andern durch M gehen, d. h. daß beide Kreise sich rechtwinklig schneiden.

Es giebt einen allgemeineren Fall. In Figur 37 sind zwei Kreise I und II gezeichnet, die sich in P und Q auf beliebige Art schneiden. Zieht man von jedem Punkte C_n des Kreises II aus

Strahlen nach P und Q, welche den Kreis I in A_n und B_n schneiden, so umhüllen, wie leicht zu zeigen ist, die Verbindungslinien $A_n B_n$ einen concentrischen Kreis, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird.

Fig. 37.



Durch Projektion erkennt man, daß dieselbe Operation bei Kegelschnitten, die sich in P und Q schneiden, auf die Umhüllung eines Kegelschnitts führt, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird. Auf diesen Tangenten befinden sich also projektivische Punktreihen.

Beispiele dieser Art lassen sich beliebig viele geben. Aus jedem ergiebt sich eine Methode zur mechanischen Herstellung von Kegelschnitten.

VII. Übungen aus der analytischen Geometrie.

42) Da bezüglich der Kegelschnitte die synthetische Geometrie der analytischen im allgemeinen überlegen ist, weil die Kegelschnitte als rein projektivische Gebilde von den Maßbeziehungen der Koordinatensysteme unabhängig sind, so sollen hier nur einige Übungen aus der Koordinatenlehre angestellt werden, die auf den Begriff des Krümmungskreises hinleiten, ein Gegenstand, der synthetisch weniger bequem behandelt werden kann.

[Dabei sei bemerkt, daß für die Untersuchung von Kurven höherer Gerade die analytische Geometrie den Vorzug hat, mit Hülfe der Infinitesimalrechnung auch bedeutendere Schwierigkeiten zu überwinden, daß sie also durchaus nicht vernachlässigt werden darf.]

a) Berechnung der wichtigeren Linien an der Ellipse.

43) Für die Ellipse sei, wie früher, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ die Brennweite. Der Ausdruck $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ werde gleich ε^2 gesetzt, so daß