Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

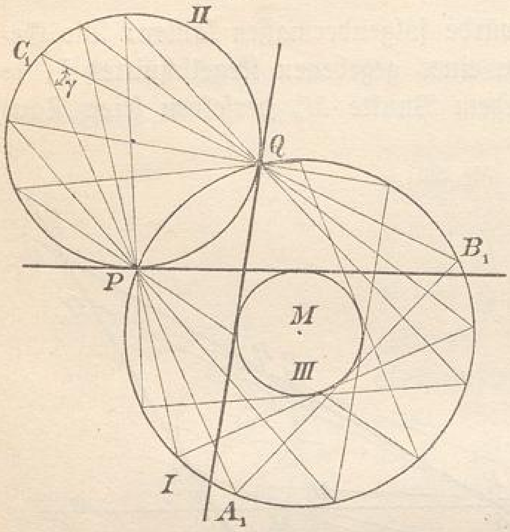
Leipzig, 1895

a) Berechnung der wichtigeren Linien an der Ellipse

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Strahlen nach P und Q, welche den Kreis I in A_n und B_n schneiden, so umhüllen, wie leicht zu zeigen ist, die Verbindungslinien $A_n B_n$ einen concentrischen Kreis, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird.

Fig. 37.



Durch Projektion erkennt man, daß dieselbe Operation bei Kegelschnitten, die sich in P und Q schneiden, auf die Umhüllung eines Kegelschnitts führt, der von den in P und Q gezogenen Tangenten berührt wird. Auf diesen Tangenten befinden sich also projektivische Punktreihen.

Beispiele dieser Art lassen sich beliebig viele geben. Aus jedem ergiebt sich eine Methode zur mechanischen Herstellung von Kegelschnitten.

VII. Übungen aus der analytischen Geometrie.

42) Da bezüglich der Kegelschnitte die synthetische Geometrie der analytischen im allgemeinen überlegen ist, weil die Kegelschnitte als rein projektivische Gebilde von den Maßbeziehungen der Koordinatensysteme unabhängig sind, so sollen hier nur einige Übungen aus der Koordinatenlehre angestellt werden, die auf den Begriff des Krümmungskreises hinleiten, ein Gegenstand, der synthetisch weniger bequem behandelt werden kann.

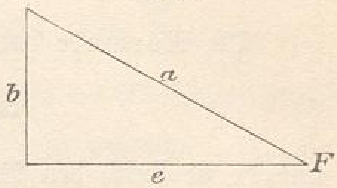
[Dabei sei bemerkt, daß für die Untersuchung von Kurven höherer Gerade die analytische Geometrie den Vorzug hat, mit Hülfe der Infinitesimalrechnung auch bedeutendere Schwierigkeiten zu überwinden, daß sie also durchaus nicht vernachlässigt werden darf.]

a) Berechnung der wichtigeren Linien an der Ellipse.

43) Für die Ellipse sei, wie früher, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ die Brennweite. Der Ausdruck $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ werde gleich ε^2 gesetzt, so daß

$\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{e}{a}$ ist. Man bezeichnet diesen Ausdruck als die numerische Excentricität der Ellipse. Sie bedeutet den Cosinus des Winkels zwischen a und e in dem aus a, b und e gebildeten Dreiecke, oder den Sinus des Winkels zwischen a und b.

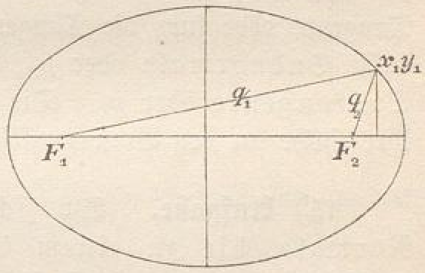
Fig. 38.



Aufgabe. Die Brennstrahlen q_1 und q_2 für einen Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus x_1 und ε zu berechnen.

Auflösung. $q_1^2 = (x_1 + e)^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + e^2 + 2x_1 e$ $= x_1^2 + (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_1^2) + (a^2 - b^2) + 2x_1\sqrt{a^2 - b^2}$. (Hier ist y_1^2 aus $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ berechnet worden.) Also

Fig. 39.



$$\begin{aligned} q_1^2 &= x_1^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + b^2 + a^2 \\ &\quad - b^2 + 2\frac{a x_1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \\ &= x_1^2 \varepsilon^2 + a^2 + 2a\varepsilon x_1 \\ &= (\varepsilon x_1 + a)^2. \end{aligned}$$

Ebenso ist $q_2^2 = (x_1 - e)^2 + y_1^2 = (\varepsilon x_1 - a)^2$, also:

$$\boldsymbol{q_1 = (a + \varepsilon x_1); \quad q_2 = (a - \varepsilon x_1);}$$

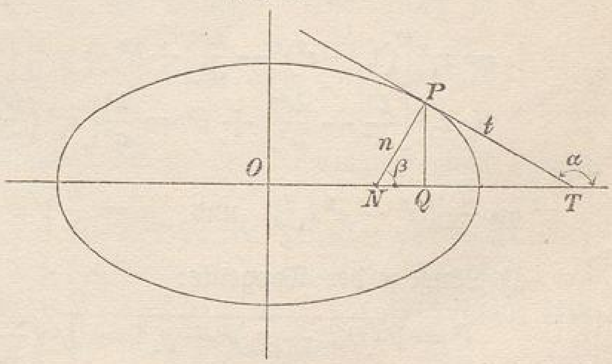
also auch

$$q_1 \cdot q_2 = a^2 - \varepsilon^2 x_1^2, \quad q_1 + q_2 = 2a, \quad q_1 - q_2 = 2\varepsilon x_1.$$

44) **Aufgabe.** Für einen Ellipsenpunkt P die Gleichung der Normale zu finden.

Auflösung. Nach Teil II (Kegelschnitte Nr. 39) war die Gleichung der Tangente in P, wenn x_1 und y_1 die Koordinaten waren,

Fig. 40.



$$1) \quad \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1,$$

oder

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1} = Ax + B.$$

Also ist die Richtungskonstante für die Tangente

2) $$\tan\alpha = A = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Die Normale hat also eine Neigung β, die sich bestimmt aus

3) $$\tan\beta = -\frac{1}{A} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1},$$

und da sie durch den Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, ist ihre Gleichung

4) $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

oder

5) $$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2)\, x_1 y_1.$$

Bemerkungen. In Fig. 40 nennt man $PN = n$ die Länge der Normale, oder kurz die Normale, $PT = t$ die Länge der Tangente oder kurz die Tangente. Die Projektion NQ der Normale heißt Subnormale oder p_n, die Projektion QT der Tangente heißt Subtangente oder p_t. Die Brennpunkt-Ordinate der Ellipse, d. h. ihre Höhe an den Brennpunktstellen, heißt halber Parameter, oder p.

45) **Aufgabe.** Wo schneiden die Tangente und die Normale, die zu einem Ellipsenpunkte $x_1 y_1$ gehören, die X-Achse, und wie groß sind die soeben erklärten Stücke?

a) Tangentenschnitt T: Setzt man in Gleichung 1) $y = 0$, so wird

$$x = \frac{a^2}{x_1} = OT.$$

b) Normalenschnitt N: Setzt man in Gleichung 5) $y = 0$, so wird

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\, x_1 = \varepsilon^2 x_1 = ON.$$

c) Länge n der Normale:

$$n^2 = (x_1 - ON)^2 + {y_1}^2 = (x_1 - \varepsilon^2 x_1)^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,{x_1}^2\right)$$
$$= {x_1}^2\left[(1-\varepsilon^2)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2 = {x_1}^2\left[\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2$$
$$= {x_1}^2\left[\frac{b^4}{a^4} - \frac{b^2}{a^2}\right] + b^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[{x_1}^2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + a^2\right],$$

also

$$n^2 = \frac{b^2}{a^2}\left[a^2 - \varepsilon^2 {x_1}^2\right] \quad \text{und} \quad n = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 {x_1}^2} = \frac{b}{a}\sqrt{q_1 q_2}.$$

d) Länge t der Tangente:

$$t^2 = \sqrt{(OT - x_1)^2 + {y_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{x_1} - x_1\right)^2 + {y_1}^2}. \quad \text{u. s. w.}$$

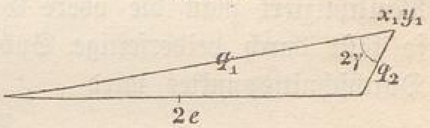
e) Ordinate p im Brennpunkte: Aus $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ folgt für $x = e$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - b^2) = \frac{b^4}{a^2}, \text{ also } p = \frac{b^2}{a}.$$

Durch Einsetzung des Halbparameters p wird die Scheitelgleichung der Ellipse auf die Form $y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2$ gebracht. (Vergl. Teil II, Kegelschnitte Nr. 40.)

46) **Aufgabe.** Für den Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse den Winkel 2γ zwischen den Brennstrahlen oder den Winkel γ zwischen Brennstrahl und Normale zu berechnen.

Fig. 41.



Auflösung. In Figur 41 ist $4e^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2 q_1 q_2 \cos 2\gamma$, folglich

$$\cos 2\gamma = \frac{q_1^2 + q_2^2 - 4e^2}{2 q_1 q_2}.$$

Logarithmisch besser ist aber die Formel für den Cosinus des halben Winkels (vergl. trigonometrische Formeltabelle in Teil II):

$$\cos^2 \gamma = \frac{(q_1 + q_2 + 2e)(q_1 + q_2 - 2e)}{4 q_1 q_2},$$

also, da $q_1 + q_2 = 2a$ ist,

$$\cos^2 \gamma = \frac{(2a + 2e)(2a - 2e)}{4 q_1 q_2} = \frac{a^2 - e^2}{q_1 q_2} = \frac{b^2}{q_1 q_2};$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{q_1 q_2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2}}.$$

Folgerung. Aus $n = \frac{b}{a} \sqrt{q_1 q_2}$ und $\cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{q_1 q_2}}$ folgt

$$n \cos \gamma = \frac{b^2}{a} = p.$$

Folglich: Die Projektion der Normale n auf jeden der zugehörigen Brennstrahlen giebt den Halbparameter p.

Jetzt folgen einige Aufgaben, die auf den Krümmungsradius führen.

47) **Aufgabe.** Zwei benachbarte Punkte der Ellipse mögen die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 haben. Wo schneidet ihre Verbindungslinie die X-Achse und wo schneiden sich die zu beiden Punkten gehörigen Normalen?

Auflösung. a) Schnitt der Tangente mit der Achse: Die Gleichung der Verbindungslinien läßt sich schreiben

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Setzt man $y = 0$, so folgt für den Schnitt die Entfernung

$$s = OT = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}.$$

b) Schnitt der Normalen: Ihre Gleichungen sind nach Obigem

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1,$$
$$a^2 y_2 x - b^2 x_2 y = (a^2 - b^2) x_2 y_2.$$

Multipliziert man die obere Gleichung mit x_2, die untere mit x_1, so fällt durch beiderseitige Subtraktion y weg, und die Abscisse des Durchschnittspunktes wird

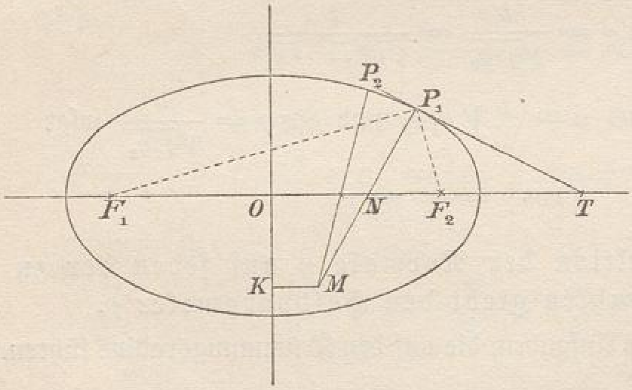
$$x = x_1 x_2 \frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

oder, wenn man wieder die Bezeichnungen ε und s einführt: Der Abstand des Schnittpunktes der Normalen von der Y-Achse ist also

$$KM = x = \frac{\varepsilon^2}{s} x_1 x_2.$$

48) **Aufgabe.** Es soll untersucht werden, wie groß der Abstand KM des berechneten Schnittpunktes von der Y-Achse wird, wenn P_2 unendlich nahe an P_1 rückt.

Fig. 42.



Auflösung. Es war

$$KM = \frac{\varepsilon^2 \cdot x_1 x_2}{s}.$$

Setzt man $x_1 = x_2$, so wird $x_1 x_2 = x_1^2$. Der obige Ausdruck

$$s = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}$$

wird aber $\frac{x_1 y_1 - x_1 y_1}{y_1 - y_1}$, also von der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. (Nicht etwa $x_1 \frac{y_1 - y_1}{y_1 - y_1} = x_1$ zu setzen!) Rückt aber P_2 unendlich nahe an P_1, so geht die Verbindungslinie $P_2 P_1$ in die Tangente über, und die Tangente in P_1 schneidet nach Aufgabe 45 a in der Entfernung $s = \frac{a^2}{x_1}$. Setzt man diesen brauchbaren Wert ein, so entsteht

$$6) \qquad KM = \frac{\varepsilon^2 x_1^{\,2}}{\left(\frac{a^2}{x_1}\right)} = \frac{\varepsilon^2 x_1^{\,3}}{a^2}.$$

Nun war aber nach Aufgabe 45 $ON = \varepsilon^2 x_1$, also ist

$$6^*) \qquad KM = \frac{x_1^{\,2}}{a^2} ON.$$

Dieser Ausdruck ist leicht zu konstruieren. Schreibt man nämlich

$$KM = \frac{\left(\frac{x_1}{a} ON\right) x_1}{a} = \frac{z \cdot x_1}{a},$$

so ist die Hülfsgröße $z = \frac{x_1}{a} ON$ aus der Proportion

$$x_1 : a = z : ON$$

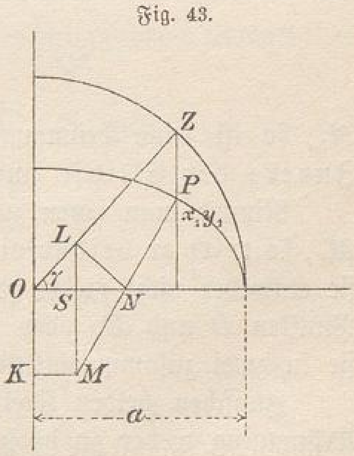
als vierte Proportionale zu konstruieren, sodann $KM = \frac{z \cdot x_1}{a}$ als vierte Proportionale aus der Proportion

$$a : x_1 = z : KM.$$

Bemerkung. Halbierung des Brennstrahlwinkels giebt die genaue Richtung der Normale. Zieht man eine Parallele zur Y-Achse in dem konstruierten Abstande KM, so findet man den Punkt M. Dieser Punkt ist von außerordentlicher Bedeutung als Krümmungsmittelpunkt der Kurve für die Stelle $x_1 y_1$.

Vorläufig genüge neben der soeben gezeigten Konstruktion die in Folgendem erläuterte.

Fig. 43.



In Figur 43 ist neben der Ellipse der mit der Halbachse a um O geschlagene Kreis gezeichnet und der Punkt Z desselben markiert, der senkrecht über P liegt. Für diesen Punkt ist $\frac{x_1}{a} = \cos\gamma$. Folglich ist jetzt

$$KM = \frac{x_1^{\,2}}{a^2} \cdot ON = ON \cos^2\gamma$$
$$= [ON \cos\gamma] \cdot \cos\gamma,$$

so daß es sich um eine zweimalige Projektion von ON mit Hülfe des Winkels γ handelt.

In der Figur ist NL das Lot auf OZ, also $OL = ON \cdot \cos\gamma$. Ferner ist

$$LS \perp ON, \text{ folglich } OS = OL \cos\gamma = ON \cos^2\gamma = KM.$$

Die vorläufige Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt der Ellipse im Punkte $x_1 y_1$ ist also folgende:

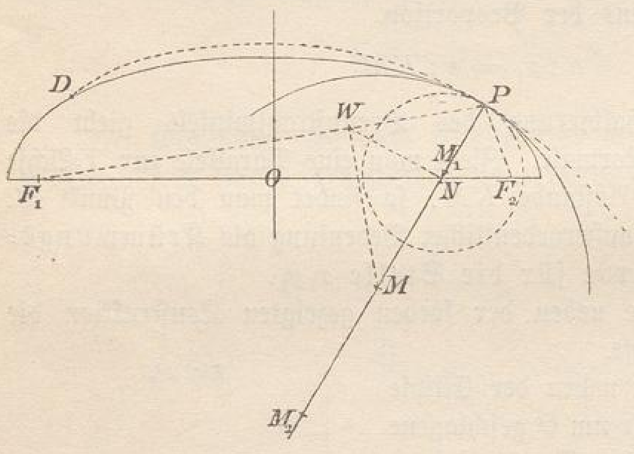
Durch Halbierung des Brennstrahlwinkels bei P findet man die Normale PN. Die Senkrechte durch P giebt den Hülfskreispunkt Z. Das Lot von N auf OZ giebt den Punkt L; die Senkrechte durch L schneidet die Normale im Krümmungsmittelpunkte M.

Schlägt man um M mit MP einen Kreis, so fällt dieser Kreis für eine weit größere Strecke mit der Ellipse zusammen, als jeder andere. Er heißt der Krümmungskreis der Ellipse für die Stelle P.

b) Krümmungsradius der Ellipse.

49) Benachbarte Radien eines Kreises schneiden sich im Mittelpunkte. Die Normale im Punkte P der Ellipse wird von den Normalen der Nachbarpunkte in verschiedenen Punkten geschnitten. Rücken die Nachbarpunkte unendlich nahe an P, so rückt der Schnittpunkt in das vorher konstruierte M, womit der kleinste Grenzwert für die Entfernung des Schnittes von P gefunden wird.

Fig. 44.



Nimmt man einen kleineren Berührungskreis der Stelle P, z. B. den Kreis M_1, so ist seine Krümmung zu groß. Er tritt beiderseits ins Innere der Ellipse und hat sonst keinen Punkt mit ihr gemein.

Nimmt man einen zu großen Berührungskreis, z. B. den Kreis M_2, so tritt er beiderseits aus der Ellipse heraus. Er schneidet sie entweder nicht mehr, oder er schneidet sie noch in zwei getrennten Punkten D und E, oder er berührt sie noch einmal (d. h. er trifft sie in zwei zusammenfallenden Punkten D und E).

Zwischen beiden Kreisen liegt nun der Krümmungskreis, dessen Krümmung weder zu groß, noch zu klein ist. Er verhält sich in ganz