# Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1895**

b) Krümmungsradius der Ellipse

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

In der Figur ist $NL$ das Lot auf $OZ$, also $OL = ON \cdot \cos\gamma$. Ferner ist

$$LS \perp ON, \quad \text{folglich} \quad OS = OL \cos\gamma = ON \cos^2\gamma = KM.$$

Die vorläufige Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt der Ellipse im Punkte $x_1 y_1$ ist also folgende:

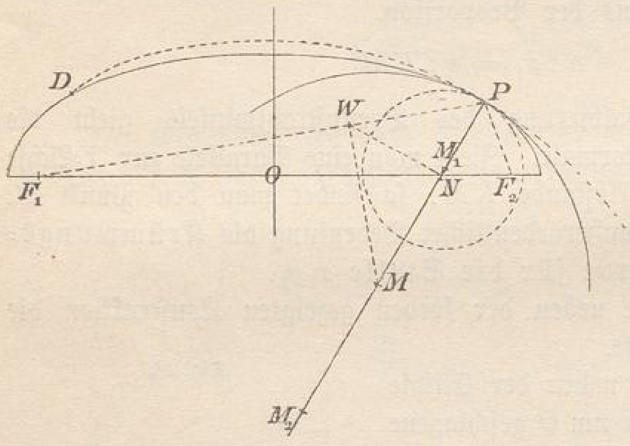
Durch Halbierung des Brennstrahlwinkels bei $P$ findet man die Normale $PN$. Die Senkrechte durch $P$ giebt den Hülfskreispunkt $Z$. Das Lot von $N$ auf $OZ$ giebt den Punkt $L$; die Senkrechte durch $L$ schneidet die Normale im Krümmungsmittelpunkte $M$.

Schlägt man um $M$ mit $MP$ einen Kreis, so fällt dieser Kreis für eine weit größere Strecke mit der Ellipse zusammen, als jeder andere. Er heißt der Krümmungskreis der Ellipse für die Stelle $P$.

## b) Krümmungsradius der Ellipse.

49) Benachbarte Radien eines Kreises schneiden sich im Mittelpunkte. Die Normale im Punkte $P$ der Ellipse wird von den Normalen der Nachbarpunkte in verschiedenen Punkten geschnitten. Rücken die Nachbarpunkte unendlich nahe an $P$, so rückt der Schnittpunkt in das vorher konstruierte $M$, womit der kleinste Grenzwert für die Entfernung des Schnittes von $P$ gefunden wird.

Fig. 44.




Nimmt man einen kleineren Berührungskreis der Stelle $P$, z. B. den Kreis $M_1$, so ist seine Krümmung zu groß. Er tritt beiderseits ins Innere der Ellipse und hat sonst keinen Punkt mit ihr gemein.

Nimmt man einen zu großen Berührungskreis, z. B. den Kreis $M_2$, so tritt er beiderseits aus der Ellipse heraus. Er schneidet sie entweder nicht mehr, oder er schneidet sie noch in zwei getrennten Punkten $D$ und $E$, oder er berührt sie noch einmal (d. h. er trifft sie in zwei zusammenfallenden Punkten $D$ und $E$).

Zwischen beiden Kreisen liegt nun der Krümmungskreis, dessen Krümmung weder zu groß, noch zu klein ist. Er verhält sich in ganz anderer Weise. Weil die Krümmung der Ellipse von $P$ aus nach links abnimmt, tritt der gezeichnete Krümmungskreis nach links in die Ellipse hinein. Weil die Krümmung von $P$ aus nach rechts zunimmt, so tritt der gezeichnete Krümmungskreis nach rechts aus der Ellipse heraus. Es tritt also der merkwürdige Fall ein, daß der Krümmungskreis in $P$ sowohl schneidet als auch berührt.

Dieses scheinbare Paradoxon klärt sich auf, wenn man den Krümmungsradius allmählich von $M_2P$ auf $MP$ abnehmen läßt. Anfangs hat man dann die Berührung in $P$ (zwei Schnittpunkte bedeutend) und die Schnittpunkte $D$ und $E$. Beim Kleinerwerden des Krümmungsradius rückt $D$ an $P$ heran und fällt schließlich mit $P$ zusammen. Jetzt hat der Krümmungsradius mit der Kurve in $P$ drei zusammenfallende Punkte gemein, und nur ein einziger abgetrennter Schnittpunkt $E$ bleibt übrig, was bei keinem andern der Berührungskreise der Fall ist.

Für die Endpunkte der Hauptachsen ist die Betrachtung etwas zu verändern. Es zeigt sich, daß der Krümmungsmittelpunkt dort sogar vier Punkte mit der Kurve gemein hat, da nicht nur $D$, sondern der Symmetrie halber auch $E$ mit $P$ zusammenfällt.

50) **Aufgabe.** Den Krümmungsmittelpunkt für die Stelle $P$ zu berechnen.

**Auflösung.** Seine Koordinaten seien $x$ und $y$, die von $P$ seien $x_1$ und $y_1$, dann ist nach Pythagoras

$$\text{a)} \qquad \varrho^2 = \overline{MP}^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 .$$

Nun war die Gleichung der Normale (Aufgabe 44, Gleichung 5)

$$b^2 x_1 y = a^2 y_1 x - (a^2 - b^2) x_1 y_1 .$$

Setzt man hier $x = KM = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}$ (nach Gleichung 6 in Aufgabe 48) ein, so erhält man als Gleichung zur Berechnung der Ordinate des Punktes $M$

$$b^2 x_1 y = a^2 y_1 \cdot \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} - (a^2 - b^2) x_1 y_1 ,$$

also ist (vgl. Fig. 43)

$$SM = y = \frac{\varepsilon^2 x_1^2 y_1}{b^2} - \frac{(a^2 - b^2) y_1}{b^2} = \frac{\varepsilon^2 y_1}{b^2}(a^2 - x_1^2) .$$

Nach der Ellipsengleichung ist aber $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, also $x_1^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_1^2$. Dies, in die vorige Gleichung eingesetzt, giebt

$$y = -\frac{\varepsilon^2 y_1}{b^2} \frac{a^2}{b^2} y_1^2 = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4} = SM .$$

Setzt man in Gleichung a) die Werte $x = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}$ und $y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^2}$ ein, so erhält man eine Gleichung zur Berechnung von $\varrho^2$. In dieser setze man $b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2$ für $y_1^2$, und so ergiebt sich

$$\varrho^2 = \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^3}{a^2 b^2} = \frac{(q_1 q_2)^3}{a^2 b^2}.$$

Nun war aber $q_1 q_2 \frac{b^2}{a^2} = n^2$, also $q_1 q_2 = \frac{a^2 n^2}{b^2}$. Einsetzung giebt

$$\varrho^2 = \frac{n^6 a^4}{b^8} \text{ und } \varrho = \frac{n^3 a^2}{b^4}$$

oder, da $\frac{b^2}{a} = p$ war:

b) $$\varrho = \frac{n^3}{p^2}.$$

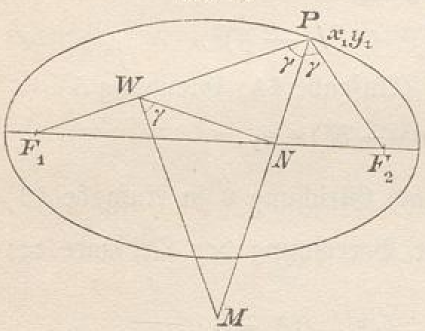
Da außerdem $p = n \cos \gamma$ war, so folgt noch

c) $$\varrho = \frac{n}{\cos^2 \gamma}.$$

Demnach muß sich $\varrho$ mit Hülfe zweier rechtwinkligen Dreiecke einfach konstruieren lassen.

51) **Aufgabe.** Für den Punkt $x_1 y_1$ der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ den Krümmungsmittelpunkt zu konstruieren.

Fig. 45.




**Auflösung.** Halbiere den Winkel der Brennstrahlen, errichte auf der Normalen im Schnittpunkte $N$ (der Normale und $X$-Achse) ein Lot $NW$ bis zu dem einen der Brennstrahlen, errichte in $W$ auf dem Brennstrahl ein Lot bis zum Schnitte $M$ mit der Normale, dann ist $M$ der Krümmungsmittelpunkt. Denn $PW = \frac{n}{\cos \gamma}$, folglich $MP = \frac{PW}{\cos \gamma} = \frac{n}{\cos^2 \gamma} = \varrho$.

Für den höchsten Punkt $P_1$ ist $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle FP_1O$, folglich fällt $W$ mit $F_1$ zusammen, und das Lot $WM$ auf $WP_1$ giebt den Krümmungsmittelpunkt $M$. In diesem Falle ist

$$\varrho = \frac{b}{\cos^2 \gamma} = \frac{b}{\left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2}{b}.$$

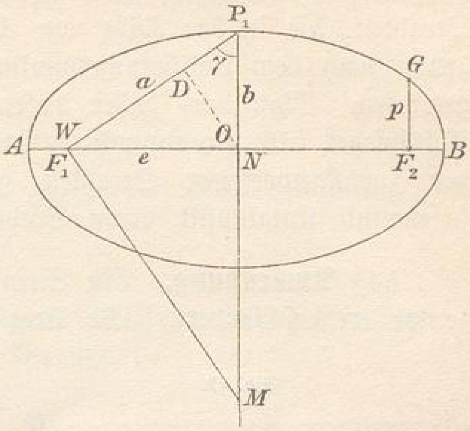
Für den Endpunkt $B$ der langen Achse ist $\gamma = 0$, also

$$\varrho_1 = \frac{p}{\cos^2 0} = \frac{p}{1} = p = \frac{b^2}{a},$$

d. h. gleich dem Lote $F_2 G$ im Brennpunkte. Sind nur $a$ und $b$ gegeben, so findet man $\varrho_1$ bequem als Projektion $DP_1$ von $b$ auf $F_1P_1$, denn

$$DP_1 = b\cos\gamma = b\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = \varrho_1.$$

Fig. 46.




Diese beiden besonderen Radien werden häufig zur angenäherten Verzeichnung der Ellipse benutzt.

## c) Krümmungsradius der Parabel und Hyperbel.

52) **Aufgabe.** Den Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt der Parabel zu konstruieren.

**Auflösung.** Man halbiere den Winkel zwischen dem Brennstrahl $PF$ und der Parallelen zur Achse. Dies giebt die Normale $PN$. Lot auf $PN$ in $N$ giebt Schnittpunkt $W$ mit dem Brennstrahle. Lot auf $PW$ in $W$ giebt $M$ auf der Normale. (Ebenso könnte $W_1$ benutzt werden.)

Der Krümmungsradius für den Scheitel ist wieder $p = FG = 2AF$.

Fig. 47.

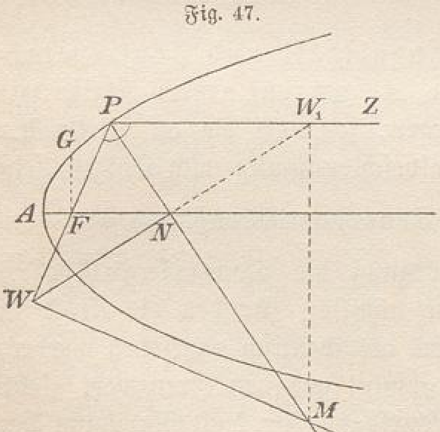
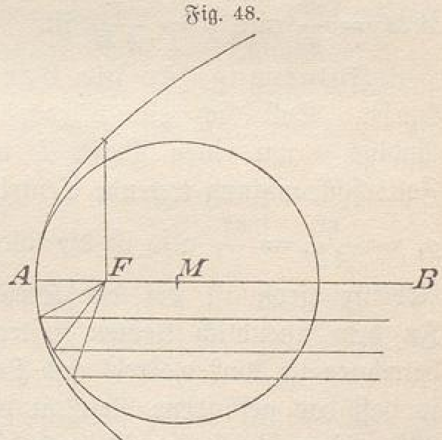



Fig. 48.




53) **Anwendung.** Statt des parabolischen Hohlspiegels wird häufig der sphärische Hohlspiegel genommen, der in der Nähe des