Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

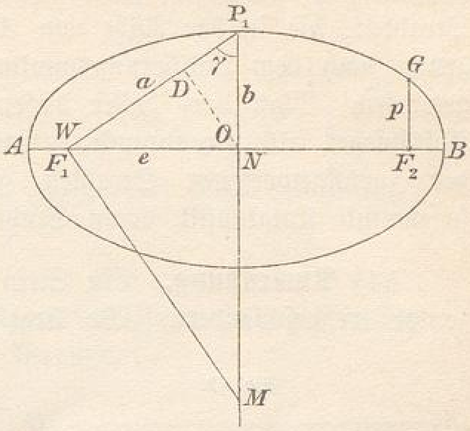
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

c) Krümmungsradius der Parabel und Hyperbel

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Fig. 46.



Für den Endpunkt B der langen Achse ist $\gamma = 0$, also

$$\varrho_1 = \frac{p}{\cos^2 0} = \frac{p}{1} = p = \frac{b^2}{a},$$

d. h. gleich dem Lote F_2G im Brennpunkte. Sind nur a und b gegeben, so findet man ϱ_1 bequem als Projektion DP_1 von b auf F_1P_1, denn

$$DP_1 = b\cos\gamma = b\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = \varrho_1.$$

Diese beiden besonderen Radien werden häufig zur angenäherten Verzeichnung der Ellipse benutzt.

c) Krümmungsradius der Parabel und Hyperbel.

52) **Aufgabe.** Den Krümmungsmittelpunkt für einen Punkt der Parabel zu konstruieren.

Auflösung. Man halbiere den Winkel zwischen dem Brennstrahl PF und der Parallelen zur Achse. Dies giebt die Normale PN. Lot auf PN in N giebt Schnittpunkt W mit dem Brennstrahle. Lot auf PW in W giebt M auf der Normale. (Ebenso könnte W_1 benutzt werden.)

Der Krümmungsradius für den Scheitel ist wieder $p = FG = 2AF$.

Fig. 47.

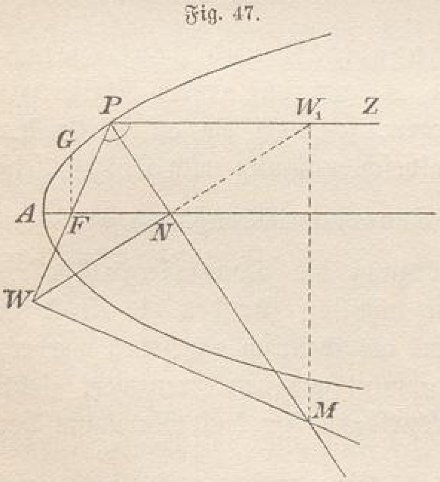
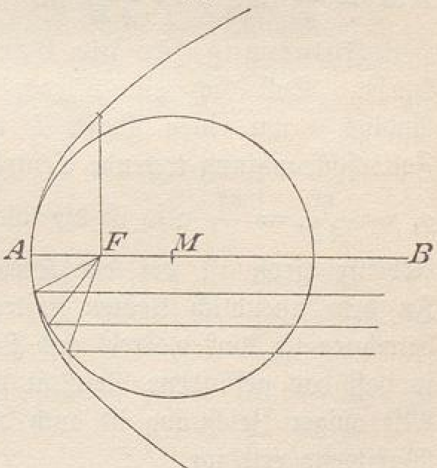


Fig. 48.

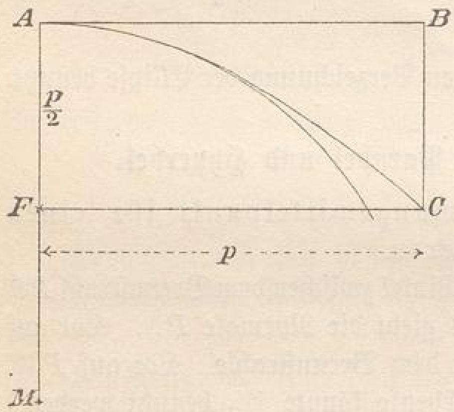


53) **Anwendung.** Statt des parabolischen Hohlspiegels wird häufig der sphärische Hohlspiegel genommen, der in der Nähe des

Scheitels A mit dem parabolischen übereinstimmt. Daher werden Strahlen, die in der Nähe von AB parallel zu AB einfallen, fast genau nach dem Halbierungspunkte von AM, d. h. nach F, zurückgeworfen. Man darf daher diesen Punkt auch bei dem sphärischen Hohlspiegel als Brennpunkt betrachten. (Die genaue Konstruktion der zurückgeworfenen Strahlen giebt eine Umhüllungskurve, die sogenannte Katakaustik, deren Spitze mit F zusammenfällt.)

54) **Anwendung.** Ein Stein werde mit Geschwindigkeit v horizontal weggeschleudert. Wo liegt der Brennpunkt F der Parabel, die er beschreibt?

Fig. 49.



Auflösung. Ist $FA = \frac{1}{2} FC$, so ist FC der Halbparameter p und $FA = \frac{p}{2}$. Nach welcher Zeit wird also C erreicht?

Es ist $AB = v \cdot t$, $BC = \frac{1}{2} gt^2$, also $\frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} vt$ und daher $t_1 = \frac{v}{g}$. Folglich $BC = AF = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} g \cdot \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g}$. Dies ist die Tiefe des Brennpunktes unter A. Der Krümmungsmittelpunkt liegt doppelt so tief, so daß $AM = \frac{v^2}{g}$ und $g = \frac{v^2}{AM}$ ist.

Folgerung für die Centrifugalkraft und Centripetalkraft. Soll sich ein Körper von A aus auf einem Kreise mit Radius r um einen Punkt F bewegen, so muß die an Stelle der Fallbeschleunigung tretende Centripetalbeschleunigung nach Obigem sein $g_1 = \frac{v^2}{AM} = \frac{v^2}{r}$, also ist die nötige Centripetalkraft $mg_1 = \frac{m v^2}{r}$. (Ebenso groß ist bei der Kreisbewegung die Centrifugalkraft.) In dem unendlich kleinen Zeitraume nämlich, für den die Kraft zu berechnen ist, dürfen Kreis und Parabel als identisch angesehen werden, so daß das gefundene Resultat den absolut genauen Grenzwert giebt. Mit obiger Zeichnung ist auch die Wurfbahn für das Maximum der Wurfweite erledigt.

55) **Aufgabe.** Den Krümmungsradius der Hyperbel zu berechnen. Die Auflösung geschieht durch entsprechende Berechnungen, wie bei der Ellipse. Die Brennstrahlen werden $q_1 = \varepsilon x + a$ und

$q_2 = \varepsilon x - a$, wo $\varepsilon = \frac{\xi}{a}$ und $\xi = \sqrt{a^2 + b^2} = e$ ist $(q_1 - q_2 = 2a)$.

Die Normale wird bestimmt aus $n^2 = \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} q_1 q_2$, der Krümmungsradius aus $\varrho^2 = \frac{(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)^3}{a^2 b^2} = \left(\frac{n^3}{p^2}\right)^2$ als $\varrho = \frac{n^3}{p^2}$.

Die für Ellipse und Parabel angegebenen Konstruktionen gelten daher auch hier.

d) Andeutungen über die allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades.

56) Die allgemeine Form ist

1) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

oder

$$y^2 + 2y\frac{bx + e}{c} = -\frac{ax^2 + 2dx + f}{c},$$

so daß

$$y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{(bx + e)^2 - (ax^2 + 2dx + f)c},$$

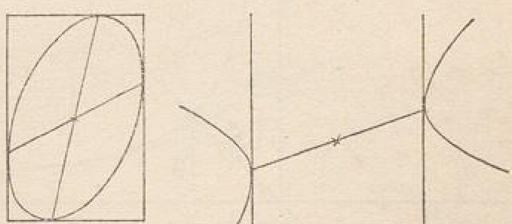
oder

2) $$y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{x^2(b^2 - ac) + 2x(be - dc) + (e^2 - fc)}.$$

Ganz ebenso wird x berechnet.

Der Nachweis, daß die Gleichung stets einen Kegelschnitt darstellt, ist etwas langwierig. Eine Andeutung über den einzuschlagenden Gang möge hier genügen. Der Ausdruck unter der Wurzel wird im allgemeinen für zwei Werte (von x) gleich Null. Ausnahmefälle mögen vorläufig unbeachtet bleiben. An diesen Stellen findet man nach Teil II (Anhang) entweder ein Maximum oder ein Minimum (worüber durch Einsetzen von Nachbarwerten entschieden werden kann). Das Entsprechende gilt für das aus Gleichung 1) berechnete x.

Fig. 50.



Man verbinde zwei zusammengehörige Minimal- bezw. Maximalpunkte und verschiebe den Anfang des Koordinatensystems nach dem Halbierungspunkte dieser Strecke. An der Form der neuen Gleichung erkennt man stets, daß jede durch den neuen Koordinatenanfang gelegte Sehne