Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

d) Andeutungen über die allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

$q_2 = \varepsilon x - a$, wo $\varepsilon = \frac{\xi}{a}$ und $\xi = \sqrt{a^2 + b^2} = e$ ist $(q_1 - q_2 = 2a)$.

Die Normale wird bestimmt aus $n^2 = \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} q_1 q_2$, der Krümmungsradius aus $\varrho^2 = \frac{(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)^3}{a^2 b^2} = \left(\frac{n^3}{p^2}\right)^2$ als $\varrho = \frac{n^3}{p^2}$.

Die für Ellipse und Parabel angegebenen Konstruktionen gelten daher auch hier.

d) Andeutungen über die allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades.

56) Die allgemeine Form ist

$$1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

oder

$$y^2 + 2y\frac{bx + e}{c} = -\frac{ax^2 + 2dx + f}{c},$$

so daß

$$y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{(bx + e)^2 - (ax^2 + 2dx + f)c},$$

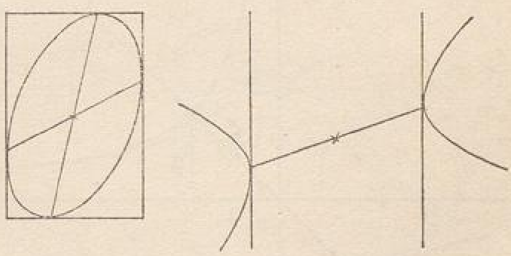
oder

$$2) \; y = -\frac{bx + e}{c} \pm \frac{1}{c}\sqrt{x^2(b^2 - ac) + 2x(be - dc) + (e^2 - fc)}.$$

Ganz ebenso wird x berechnet.

Der Nachweis, daß die Gleichung stets einen Kegelschnitt darstellt, ist etwas langwierig. Eine Andeutung über den einzuschlagenden Gang möge hier genügen. Der Ausdruck unter der Wurzel wird im allgemeinen für zwei Werte (von x) gleich Null. Ausnahmefälle mögen vorläufig unbeachtet bleiben. An diesen Stellen findet man nach Teil II (Anhang) entweder ein Maximum oder ein Minimum (worüber durch Einsetzen von Nachbarwerten entschieden werden kann). Das Entsprechende gilt für das aus Gleichung 1) berechnete x.

Fig. 50.



Man verbinde zwei zusammengehörige Minimal- bezw. Maximalpunkte und verschiebe den Anfang des Koordinatensystems nach dem Halbierungspunkte dieser Strecke. An der Form der neuen Gleichung erkennt man stets, daß jede durch den neuen Koordinatenanfang gelegte Sehne halbiert ist, wenn sie die Kurve überhaupt trifft. — Man hat also den Mittelpunkt der Kurve nachgewiesen.

Jetzt suche man (gegebenenfalls auch mit Hülfe von Polarkoordinaten) die kleinsten Entfernungen vom Mittelpunkte. In die entsprechende Richtung dreht man die Y-Achse eines neuen Koordinatensystems. Jetzt läßt sich die Gleichung stets auf die Form $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ bringen, stellt also eine Ellipse oder Hyperbel dar.

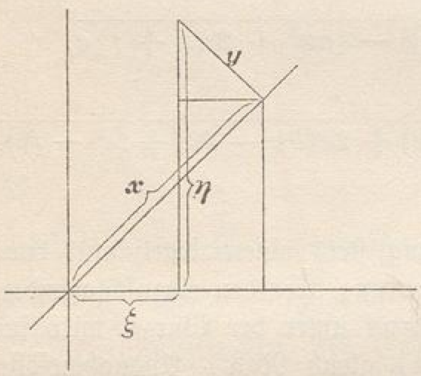
Wird aber der Ausdruck unter der Wurzel nur für einen einzigen endlichen Wert gleich Null, so kann es sich im allgemeinen nur um eine Parabel handeln. Mit Hülfe der Halbierungspunkte paralleler Sehnen erhält man die Achsenrichtung, den Scheitel und die Scheitelgleichung.

Läßt sich die Gleichung in ein Produkt von der Form

$$(ax + by + c)(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$$

zerlegen, so stellt sie zwei gerade Linien dar, deren Gleichungen in der letzten enthalten sind.

Fig. 51.



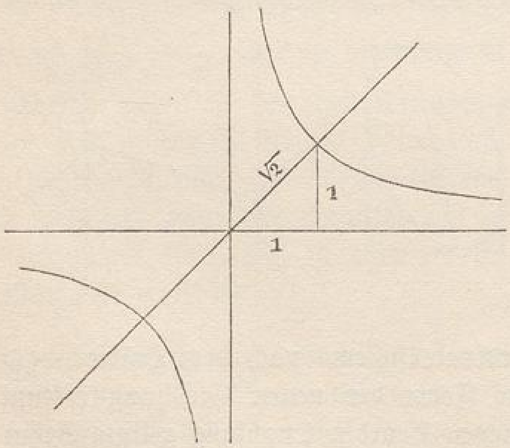
Verschiebungen des Koordinatensystems kamen schon in Teil II zur Sprache. Um auch einen Begriff von der **Drehung des Koordinatensystems** zu erhalten, drehe man beispielsweise das Koordinatensystem um 45^0.

Zwischen den Koordinaten ξ, η und x, y bestehen dann die Beziehungen

$$\eta = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + y\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\xi = x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - y\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Fig. 52.



So geht z. B. die Gleichung der „Mariotteschen Kurve“ $\eta = \frac{1}{\xi}$ (vgl. Teil II, Geom. Nr. 105) über in

$$x\sqrt{\tfrac{1}{2}} + y\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{\tfrac{1}{2}} - y\sqrt{\tfrac{1}{2}}},$$

oder in

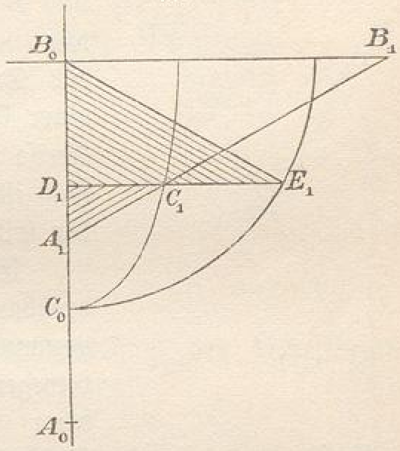
$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

so daß es sich um die Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ handelt, d. h. um eine gleichseitige Hyperbel.

e) Der Ellipsenzirkel oder das Ovalwerk des Leonardo da Vinci.

57) **Aufgabe.** Die Endpunkte einer gegebenen Geraden AB werden gezwungen, sich in zwei aufeinander senkrechten Geraden zu bewegen. Was für einen Weg legt jeder Punkt der Geraden und ihrer Verlängerung zurück?

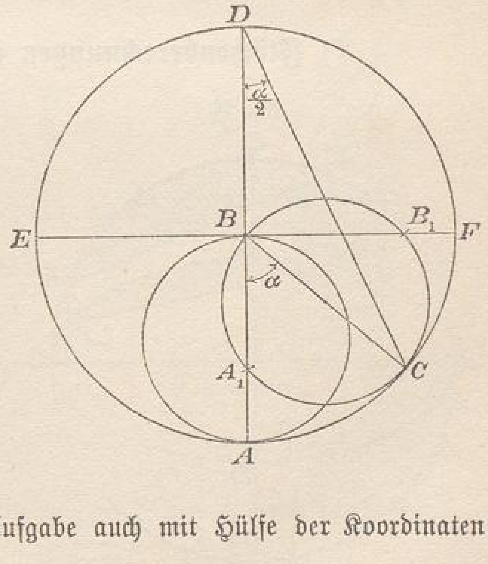
Fig. 53.



Auflösung.*) A_0B_0 sei die Gerade, C_0 der zu untersuchende Punkt der Geraden. $A_1C_1B_1$ sei eine zweite Lage.

Man schlage mit B_0C_0 einen Kreis und lege durch C_1 die Gerade $D_1E_1 \perp A_0B_0$. Dann ist $C_1B_1 = B_0E_1$, folglich $\sphericalangle B_1C_1E_1 = \sphericalangle B_0E_1C_1$, folglich $\triangle A_1D_1C_1 \sim B_0D_1E_1$, folglich $D_1C_1 : D_1E_1 = A_1C_1 : E_1B_0 = A_0C_0 : C_0B_0$. Letzteres ist aber das konstante Teilungsverhältnis der bewegten Geraden. In jeder Lage wird also die horizontale Sehne des Hülfskreises in diesem konstanten Verhältnis geteilt, d. h. der Weg von C ist eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, wo a und b die Teile der Geraden sind. Der Halbierungspunkt bewegt sich auf einem Kreise.

Fig. 54.



Ganz entsprechend wird der Beweis für Punkte auf der Verlängerung der Geraden geführt.

Bemerkung. In einem Kreise befinde sich ein Berührungskreis von halb so großem Radius in zwei verschiedenen Lagen. Der Berührungspunkt werde jedesmal

*) Der Schüler versuche die Aufgabe auch mit Hülfe der Koordinaten zu lösen.