Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

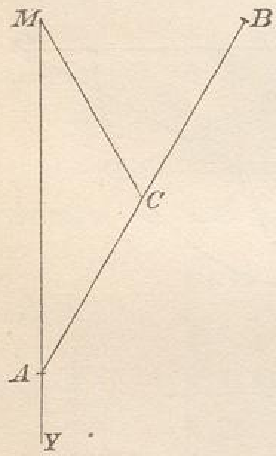
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

f) Flächenberechnung an Kegelschnitten

mit dem Centrum B verbunden. Schneidet AB den zweiten Kreis in A, so ist Bogen $\widehat{AC} = \widehat{A_1C}$, denn zum Peripheriewinkel $\frac{\alpha}{2}$ im großen Kreise gehört derselbe Bogen, wie zum Peripheriewinkel α im kleinen Kreise. Rollt also der kleine Kreis im großen, ohne zu gleiten (so daß also der Weg $\widehat{AC}$ stets gleich dem abgewickelten Bogen $\widehat{A_1C}$ ist), so bewegt sich der Punkt A auf dem Durchmesser AD und ebenso B auf dem Durchmesser EF. Für A und B ist also der Bewegungszwang derselbe, wie in der vorigen Aufgabe. Jeder Punkt des Durchmessers AB bewegt sich also auf einer Ellipse, nur der Mittelpunkt auf einem Kreise und die Endpunkte auf Geraden. Demnach ist noch ein dritter Mechanismus möglich, der Ellipsen hervorbringt.

Fig. 55.

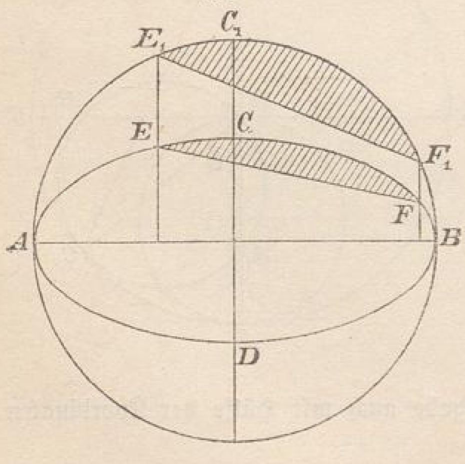


Es sei $MC = AC = BC$; MC sei drehbar um M, C sei ein Gelenk, A werde gezwungen, sich in der Geraden MY zu bewegen, dann bewegt sich B geradlinig, denn stets ist $\sphericalangle AMB = 90^0$. Jeder Punkt der Geraden AB bewegt sich in einer Ellipse.

Der erste Mechanismus heißt Ellipsenzirkel, der zweite Planetenrad, der dritte Ellipsenlenker. Bekannt sind sie auch unter dem Namen Ovalwerk.

f) Flächenberechnungen an den Kegelschnitten.

Fig. 56.



58) Berechnung von Ellipsensegmenten.

Soll das Ellipsensegment EFC berechnet werden, so bilde man das zugehörige Kreissegment und berechne dieses. Ist F seine Fläche, so ist die des Ellipsensegments nach dem Satze über die gesetzmäßige Verkürzung der Lote und senkrechten Flächenstreifen

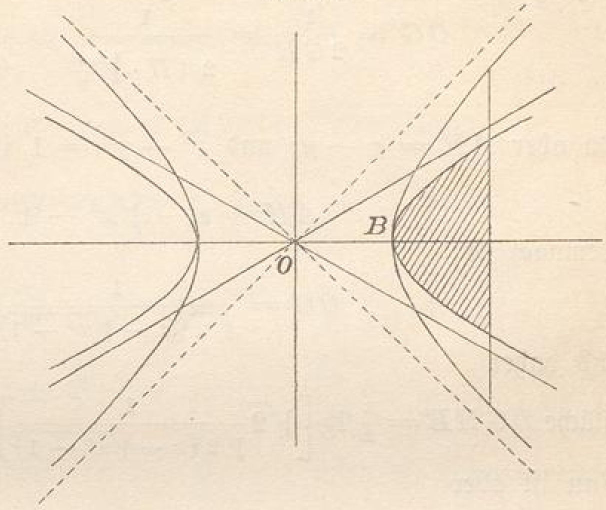
$$F_1 = F \cdot \frac{b}{a}.$$

59) Berechnung von Hyperbelsegmenten.

Die Hyperbel ist leicht auf eine gleichseitige zu reducieren. Dann findet Entsprechendes, wie vorher bei Ellipse und Kreis statt. Es wird

$$F_1 = F\frac{b}{a}.$$

Fig. 57.



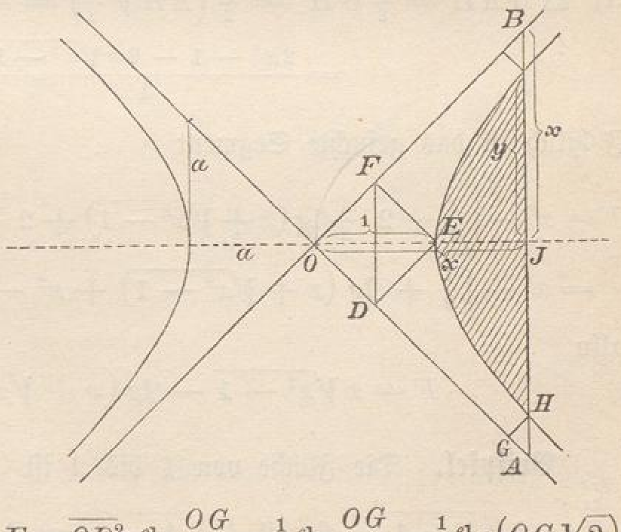
Demnach ist es nur nötig, die Segmentberechnung an der gleichseitigen Hyperbel zu üben.

Unten, in der algebraischen Analysis, wird gezeigt, daß dabei der natürliche Logarithmus gebraucht wird. Nach Durchnahme des betreffenden Abschnitts kann folgendes Beispiel gelöst werden:

60) **Aufgabe.** Das symmetrische Segment der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ zu berechnen, welches zum Abstande $OJ = x$ gehört.

Auflösung. 1) Segment $= \triangle OAB - [\square\, ODEF + 2 \cdot DGHE + 2\, \triangle\, GAH]$.

Fig. 58.



$OJ = JB = x,$

also

2) $\triangle\, OAB$

$$= 2x \cdot \frac{x}{2} = x^2.$$

$OE = 1,$

folglich

3) $\square\, ODEF$

$$= \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Dies ist der Inhalt des konstanten Rechtecks.

Diagrammfläche $DGHE = \overline{OD}^2 \cdot {}^e\lg\frac{OG}{OD} = \frac{1}{2}\, {}^e\lg\frac{OG}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\, {}^e\lg\left(OG\sqrt{2}\right).$

Es ist aber

$$OG \cdot GH = \square\, ODEF = \tfrac{1}{2},$$

folglich

$$OG = \frac{1}{2\,GH} = \frac{1}{2AH \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{AH \cdot \sqrt{2}}.$$

Da aber $AH = x - y$, und $x^2 - y^2 = 1$ ist, so folgt

$$AH = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Demnach ist

$$OG = \frac{1}{\sqrt{2}\,(x - \sqrt{x^2 - 1})},$$

und daher

$$\text{Fläche } DGHE = \tfrac{1}{2}\,{}^{e}\lg\left[\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}\,(x - \sqrt{x^2 - 1})}\right] = \tfrac{1}{2}\,{}^{e}\lg \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - (x^2 - 1)}$$
$$= x + \sqrt{x^2 - 1},$$

also folgt:

4) $$\text{Fläche } DGHE = \tfrac{1}{2}\,{}^{e}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Endlich ist

5) $$\triangle\, GAH = \tfrac{1}{2}\,GH^2 = \tfrac{1}{2}\left(AH\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2 = \frac{AH^2}{4} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{4}$$
$$= \frac{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2 - 1}}{4}.$$

Folglich ist das gesuchte Segment

$$F = x^2 - \left[\tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,{}^{e}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + 2\,\frac{2x^2 - 1 - 2x\sqrt{x^2 - 1}}{4}\right]$$
$$= x^2 - \left[\tfrac{1}{2} + {}^{e}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + x^2 - \tfrac{1}{2} - x\sqrt{x^2 - 1}\right],$$

also

$$F = x\sqrt{x^2 - 1} - {}^{e}\lg\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Beispiel. Die Fläche von 1 bis 2 ist

$$\overset{2}{\underset{1}{F}} = 2\sqrt{4 - 1} - {}^{e}\lg\left(2 + \sqrt{4 - 1}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{{}^{10}\lg\,(2 + \sqrt{3})}{0{,}43429}$$
$$= 2{,}1472.$$

61) **Bemerkung.** Zeichnet man die Figur in a-fachem Maßstabe, so lautet die Gleichung der Kurve $x^2 - y^2 = a^2$ oder $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Dabei wird $O_1E_1 = a$, $O_1J_1 = ax$. Die Fläche von a bis ax erhält den a^2-fachen Inhalt, wie vorher, also ist

$$\overset{ax}{\underset{a}{F}} = a^2\left[x\sqrt{x^2-1} - {}^e\lg\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right].$$

Setzt man $ax = x_1$, also $x = \frac{x_1}{a}$, so folgt

$$\overset{x_1}{\underset{a}{F}} = a^2\left[\frac{x_1}{a}\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1} - {}^e\lg\left(\frac{x_1}{a} + \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}\right)\right]$$

$$= x_1\sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2\,{}^e\lg\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}.$$

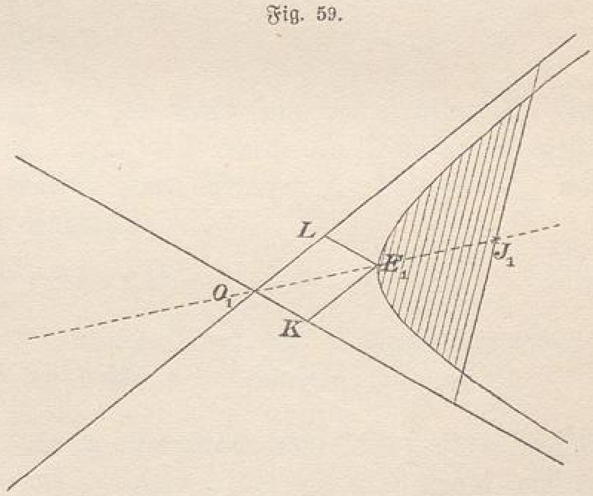
Bei der allgemeinen Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ wird die Segmentfläche das $\frac{b}{a}$-fache der vorigen, also:

$$\overset{x}{\underset{a}{F}} = \frac{b}{a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\,{}^e\lg\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right].$$

Dieselben Resultate liefert die selbständige Berechnung.

Bei schräg begrenzten Segmenten ist folgendes zu beachten.

Fig. 59.



Ist für die neue und die alte Figur J bezw. J_1 Halbierungspunkt der Sehne, und ist ferner $O_1E_1 : O_1J_1 = OE : OE$, so verhalten sich aus Gründen der Parallelprojektion die Segmente wie die konstanten Asymptotenparallelogramme. Denkt man sich also über $OJ_1 = z_1$ und $OE_1 = e_1$ eine gleichseitige Hyperbel, so ist für diese

$$\overset{z_1}{\underset{e_1}{F}} = z_1\sqrt{z_1^2 - e_1^2} - e_1^2\,{}^e\lg\frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - e_1^2}}{e_1}.$$

Für die letztere ist das konstante Rechteck gleich $\frac{z_1^{\,2}}{2}$, für die vorliegende aber das konstante Parallelogramm gleich $O_1 K E_1 L_1$ oder, wenn die Gleichung war: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, konstantes Parallelogramm gleich $\frac{ab}{2}$. Das Verkleinerungsverhältnis entsprechender Flächen ist also $\frac{z_1^{\,2}}{2} : \frac{ab}{2}$ oder $z_1^{\,2} : ab$, folglich ist die schräge Segmentfläche

$$\overset{J_1}{\underset{E_1}{F}} = \frac{ab}{z_1^{\,2}}\left[z_1\sqrt{z_1^{\,2} - e^2} - e_1^{\,2}\,{}^e\!\lg\frac{z_1 + \sqrt{z_1^{\,2} - e_1^{\,2}}}{e_1}\right].$$

Die Parabelsegmente waren schon in Teil II berechnet worden.

Jetzt ist man imstande, zahlreiche von Geraden und Kegelschnitten begrenzte Flächen, z. B. auch Sektoren und Flächenstücke, die zwischen zwei Sehnen liegen, zu berechnen.