Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

II. Sätze über abgeschrägte Prismen und Cylinder und über Drehungskörper

In der Lehre vom Pendel, vom Stoße, in der Lehre von der Arbeitswucht drehender Massen, auch bei gewissen stereometrischen und hydrostatischen Untersuchungen spielt das Trägheitsmoment eine hervorragende Rolle. Von besonderer Wichtigkeit ist es für die Festigkeitslehre.]

Bemerkungen. Die Trägheitsmomente von Körpern sind Ausdrücke fünfter Dimension, die von Flächen sind vierter Dimension, die von Linien sind dritter Dimension, die von Raumpunkten würden zweiter Dimension sein.

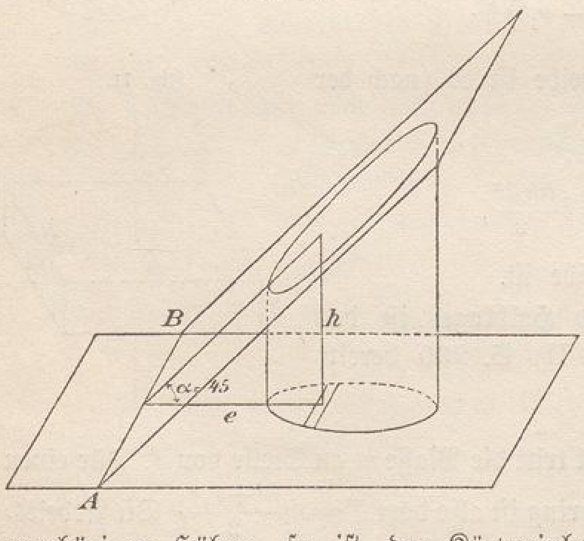
Ein interessante Übungsaufgabe bilden die stereometrischen Darstellungen des axialen Trägheitsmomentes für den Kreis und des polaren für das Quadrat. (Vergl. Einführung in das ster. Zeichnen. Figur 122 und 125.) Das letztere Moment stellt dann die Einstellung des Wassers in einem rotierenden Gefäße quadratischen Querschnitts in dem Momente dar, wo der sich bildende Trichter den Boden berührt. —

Die Trägheitsmomente regelmäßiger Vielecke, der Ellipse, Parabel u. s. w. bieten lehrreiche Übungsaufgaben.

II. Sätze über abgeschrägte Prismen und Cylinder und über Drehungskörper.

13) Ein senkrechtes Prisma oder ein senkrechter Cylinder von beliebig gestalteter Grundfläche werde durch eine unter 45^0 geneigte Ebene schräg abgeschnitten. Die letztere schneide die erweiterte Grundfläche in einer Geraden AB. Man teile die Grundfläche durch Parallele zu AB in zahlreiche schmale Streifen ein, dann ist die Höhe h über jedem Streifen gleich der Entfernung e von AB.

Fig. 72.



Sind $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ die Streifenflächen und $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$ die zugehörigen Höhen, so ist der Körperinhalt, wenn man von den verschwindend kleinen Treppenräumen absieht,

$$J = f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3 + \cdots + f_n h_n$$
$$= f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 + \cdots + f_n e_n.$$

Letzteres ist aber die Summe der statischen Momente der einzelnen Streifen in Bezug auf die Schnittlinie AB, oder, was dasselbe ist, das statische Moment M der Grundfläche in Bezug auf die Achse AB, so daß man hat

$$J = M.$$

14) Wird nun durch AB eine anders geneigte Ebene gelegt, die den Körper schräg begrenzt, so wird sein Inhalt

$$J = M \cdot \tan\alpha.$$

Tritt nämlich jetzt nh an Stelle von h, so wird

$$J = Mn = M\frac{nh}{h} = M \tan\alpha.$$

Die Formel stimmt mit der früher abgeleiteten $J = G \cdot h_s$ überein, wo h_s die Höhe über dem Schwerpunkte der Grundfläche bedeutet.

15) **Aufgabe.** Das statische Moment des behandelten Körpers in Bezug auf die Achse AB zu berechnen.

Auflösung. Ist der Schnittwinkel der Ebene gleich 45^0, so ist das statische Moment jedes Körperstreifens in Bezug auf die Achse AB

$$(f \cdot h)e = fe^2,$$

das gesammte statische Moment ist also

$$f_1 e_1^2 + f_2 e_2^2 + f_3 e_3^2 + \cdots + f_n e_n^2.$$

Für die Streifenzahl $n = \infty$ ist dies aber das Trägheitsmoment T der Grundfläche in Bezug auf die Achse AB, also ist das statische Moment des Körpers in Bezug auf AB

$$\text{Moment} = T.$$

Ist dagegen der Schnittwinkel der Ebene gleich α, so wird die Summe der statischen Momente

$$(f_1 e_1 \tan\alpha)\, e_1 + (f_2 e_2 \tan\alpha)\, e_2 + \cdots + (f_n e_n \tan\alpha)\, e_n$$
$$= (f_1 e_1^2 + f_2 e_2^2 + f_3 e_3^2 + \cdots + f_n e_n^2) \tan\alpha = T \tan\alpha.$$

16) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt des abgeschrägten Körpers zu finden.

Auflösung. Das Produkt aus dem Inhalte J und dem horizontal gemessenen Schwerpunktsabstande x des Körpers ist gleich seinem statischen Momente in Bezug auf AB, also

$$x \cdot J = \text{Moment},$$

folglich

$$x = \frac{\text{Moment}}{\text{Inhalt}} = \frac{T \tan \alpha}{M \tan \alpha}$$

oder

$$x = \frac{T}{M},$$

d. h. die Projektion des Körperschwerpunktes auf die Grundfläche hat von der Schnittlinie AB eine Entfernung, die gleich ist dem Quotienten aus dem Trägheitsmomente der Grundfläche in Bezug auf die Schnittlinie und dem statischen Momente in Bezug auf dieselbe.

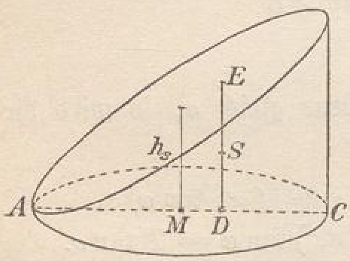
Errichtet man in dieser Entfernung über der Parallelen zu AB eine senkrechte Ebene, so liegt der Körperschwerpunkt in dieser in halber Höhe, denn jeder senkrechte Streifen des Körpers hat den seinigen in halber Höhe, die Schwerpunkte liegen also in der sämtliche Höhen halbierenden Ebene.

Dadurch ist die Lage des Körperschwerpunktes auf eine horizontale Linie beschränkt. Die Lage in dieser wird durch die Gestalt der Grundfläche näher bestimmt. Ist die Grundfläche z. B. symmetrisch gegen eine zu AB senkrecht liegende Gerade, so ist der Schwerpunkt vollständig bestimmt.

17) **Beispiel.** Wo liegt der Schwerpunkt des Cylinderhufes?

Auflösung. Das axiale Trägheitsmoment der Kreisfläche in Bezug auf jeden Durchmesser ist gleich $\frac{r^4\pi}{4}$, in Bezug auf die Tangente in A also

Fig. 73.



$$T = \frac{r^4\pi}{4} + e^2F = \frac{r^4\pi}{4} + r^2 \cdot (r^2\pi)$$
$$= \frac{5}{4} r^4 \pi.$$

Das statische Moment der Kreisfläche in Bezug auf dieselbe Tangente ist

$$M = (r^2\pi) r = r^3 \pi.$$

Die Entfernung der Schwerpunktslinie DE von A ist also

$$x = \frac{T}{M} = \frac{\frac{5}{4} r^4 \pi}{r^3 \pi} = \frac{5}{4} r.$$

18) Ganz dieselben Betrachtungen lassen sich für den Mantel jedes abgeschrägten Cylinders oder Prismas machen. Man teilt den Umfang der Grundfläche in sehr viele kleine Teilchen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ ein, zu denen die Höhen $h_1, h_2, h_3 \ldots$ gehören, so daß die Summe der senkrechten Flächenstreifen des Mantels wird

$$O = g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 + \cdots + g_n h_n.$$

Hat der Schnitt wieder 45^0 Neigung, so ist ebenso

$$O = g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3 + \cdots + g_n e_n.$$

Rechts aber steht die Summe der statischen Momente aller Bogenteilchen in Bezug auf die Schnittlinie AB, für die man das gesamte statische Moment M_1 der Grundperipherie setzen darf. Demnach ist die Mantelfläche

$$O = M_1$$

und bei der allgemeinen Neigung α

$$O = M_1 \tan \alpha.$$

19) Das statische Moment des Mantels in Bezug auf AB wird bei Neigung 45^0

$$(g_1 e_1) e_1 + (g_2 e_2) e_2 + \cdots + (g_n e_n) e_n = \sum g e^2 = T_1,$$

d. h. gleich dem Trägheitsmomente der Grundperipherie in Bezug auf AB; bei allgemeiner Neigung α entsteht $T_1 \tan \alpha$. Demnach ist die Entfernung der Schwerpunktslinie von AB zu berechnen aus

$$x \cdot O = T_1 \tan \alpha$$

oder aus

$$x = \frac{T_1 \tan \alpha}{O} = \frac{T_1 \tan \alpha}{M_1 \tan \alpha} = \frac{T_1}{M_1}.$$

20) **Beispiel.** Wo liegt der Schwerpunkt der Mantelfläche des Cylinderhufes?

Auflösung. Das Trägheitsmoment des Kreisumfangs in Bezug auf den Durchmesser als Achse ist $r^3 \pi$, in Bezug auf die Tangente in A also $r^3 \pi + (2 r \pi) r^2 = 3 r^3 \pi$. Das statische Moment in Bezug auf dieselbe Achse ist $(2 r \pi) r = 2 r^2 \pi$. Demnach ist jetzt die Entfernung der Schwerpunktslinie $D_1 E_1$

$$x_1 = \frac{T_1}{M_1} = \frac{3 r^3 \pi}{2 r^2 \pi} = \frac{3}{2} r.$$

21) **Bemerkung.** Diese Formeln finden Anwendung in der Hydrostatik. Dreht man nämlich die Figuren um 90^0, so erhält man das Diagramm des Wasserdrucks gegen senkrechte Seitenwände für den Fall, daß AB die Wasserstandslinie ist. Der nach unten zunehmende Druck giebt als Resultante das statische Moment der betreffenden Wandfläche in Bezug auf AB. Der Angriffspunkt aber liegt in der Tiefe

$$x = \frac{T}{M}.$$

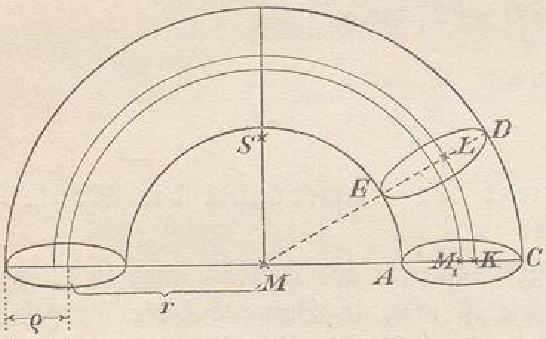
Die letztere Formel giebt zugleich den Schwingungspunkt entsprechender physischer Pendel an, außerdem den freiwilligen Drehungspunkt einer freien gestoßenen Scheibe für den Anfang der Bewegung, woraus sich die fortschreitende Bewegung ihres Schwerpunktes und die Geschwindigkeit der Drehung um den letzteren ermitteln läßt. (Anwendung auf die Berechnung der Drehung und der fortschreitenden Bewegung, in die ein Weltkörper durch den Stoß eines anderen versetzt wird.)

Von besonderer Wichtigkeit ist die Formel aber für die Untersuchung des Schwerpunktes halbierter Drehungskörper und die entsprechenden Centrifugal-Aufgaben.

22) **Aufgabe.** Wo liegt der Schwerpunkt des in Figur 74 dargestellten halben Drehungskörpers mit kreisförmigem Querschnitt?

Auflösung. Jeder kleine Sektor $ACDE$ läßt sich als abgeschrägter Cylinder betrachten. Sind r und ϱ die Radien, so hat die Schwerlinie KL eine Entfernung e von M, die sich aus

Fig. 74.



$$e = \frac{T}{M} = \frac{\frac{\varrho^4 \pi}{4} + \varrho^2 \pi \cdot r^2}{\varrho^2 \pi \cdot r} = \frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r}$$

berechnet. Auf dem mit diesem Radius e um M geschlagenen Kreise liegen die Schwerpunkte der sämtlichen kleinen Sektoren. Der Schwerpunkt des Körpers fällt also mit dem dieses Halbkreisbogens zusammen. Demnach ist

$$MS = \frac{2e}{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{T}{M} = \frac{2}{\pi}\frac{\varrho^2 + 4r^2}{4r} = \frac{\varrho^2 + 4r^2}{2r\pi}.$$

23) Wichtiger ist das allgemeine Resultat, daß für halbe Rotationskörper von beliebigem Hauptschnitt

$$MS = \frac{2}{\pi} \frac{T}{M}$$

die Entfernung des Schwerpunktes vom Centrum ist.

[In diesem Punkte ist die Masse des halben Rotationskörpers vereinigt zu denken, wenn man berechnen will, durch welche Centrifugalkraft die eine Hälfte des ganzen Körpers von der andern abgerissen werden soll, sobald er schnell um seine Hauptachse dreht.

Ist ϑ die am Einheitskreise gemessene Winkelgeschwindigkeit, so ist die Centrifugalkraft

$$K = m \cdot \overline{MS} \cdot \vartheta^2 = m \frac{2}{\pi} \frac{T}{M} \vartheta^2.$$

Hier ist $m = \frac{p}{g} = \frac{J \cdot p'}{g}$, wenn J der Inhalt, p' das specifische Gewicht des halben Körpers ist. Nun ist aber nach Guldin $J = \frac{2r\pi \cdot F}{2}$ und das Moment $M = F \cdot r$, also ist

$$K = \frac{r\pi F p'}{g} \frac{2}{\pi} \frac{T}{Fr} \vartheta^2 = 2 \frac{p'}{g} T \vartheta^2.$$

Zur Kenntnis der Beanspruchung eines beliebig gestalteten Schwungrings durch die Centrifugalkraft reicht also die Kenntnis des Trägheitsmoments der Fläche, der Winkelgeschwindigkeit und des specifischen Gewichts p' aus.

Der vorher behandelte Körper mit kreisförmigem Querschnitt wird also beansprucht durch

$$K = \frac{2p'}{g} \left[\frac{\varrho^4 \pi}{4} + \varrho^2 \pi r^2 \right] \vartheta^2 = \frac{\varrho^2 \pi p'}{2g} (\varrho^2 + 4r^2) \vartheta^2.$$

Für die Kugel bestätigt sich das bekannte Resultat $\frac{p'}{g} \frac{r^4 \pi \vartheta^2}{4}$. Aufgaben solcher Art sind von Wichtigkeit nicht nur für die Theorie der Schwungräder, sondern auch für die der sogenannten Centrifugen, bei denen nicht nur die Centrifugalkraft des halben Gefäßes, sondern auch der gegen die Wände gepreßten Flüssigkeit zu berechnen ist. Die Gestalt der letzteren kann bei großen Geschwindigkeiten als Rotationskörper eines Kreissegmentes betrachtet werden, wenn das Gefäß kugelförmig begrenzt ist.]

24) **Aufgabe.** In entsprechender Weise den Schwerpunkt für den Mantel des durch Figur 74 dargestellten halben Drehungskörpers zu bestimmen.

Es ist

$$e_1 = \frac{T_1}{M_1} = \frac{\frac{\varrho^3 \pi}{2} + \varrho \pi r^2}{\varrho \pi r} = \frac{\varrho^2 + 2r^2}{2r},$$

also

$$MS_1 = \frac{2e_1}{\pi} = \frac{\varrho^2 + 2r^2}{r\pi}.$$

Statt des Halbringes kann man auch beliebige Ringsektoren in solcher Weise behandeln.

Aufgaben. Wie groß ist der Inhalt des über einem Halbkreise stehenden und in bestimmter Weise abgeschrägten Cylinders, wie groß ist die Mantelfläche, und wo liegt der Schwerpunkt des Körpers und des Mantels?

Ein Drehungskörper entstehe durch Drehung eines Halbkreises um eine Achse in seiner Ebene, die parallel zum Durchmesser ist. Wie groß sind Mantel und Inhalt des Körpers? Wo liegt der Schwerpunkt der Körperhälfte und wo der des Mantels? Zwei Fälle sind zu unterscheiden: in dem einen liegt die Achse auf der Durchmesserseite, im andern entgegengesetzt.

III. Die Kegelschnittsflächen und die zugehörigen Körper.

a) Cylinder.

25) Über den geraden und schrägen Kreiscylinder ist in Teil I und II das Nötige gesagt. Die Inhaltsformeln lassen sich auch für den Fall aufstellen, daß die Grundfläche ein Kreissegment ist.

Dasselbe gilt vom elliptischen Cylinder. Die Inhaltsformel ist $J = ab\pi h$. Auch hier kann die Grundfläche ein Ellipsensegment sein.

Bei dem parabolischen Cylinder kann von einer Inhaltsberechnung nur die Rede sein, wenn die Grundfläche als Segment durch eine Sehne begrenzt ist. Die Berechnung des Segmentes ist in Teil II, S. 250 gelehrt worden.

Auch für den hyperbolischen Cylinder ist das in Geometrie Nr. 60 und 61 behandelte Segment der Berechnung zu Grunde zu legen.

b) Kegel.

26) Über den geraden und schiefen Kreiskegel und den elliptischen Kegel ist neues nicht zu bringen. Für den parabolischen und hyperbolischen Kegel ist die Inhaltsbestimmung möglich, wenn die Grundfläche ein begrenztes Segment ist.