



Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima
realistischer Völksschulen und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung
auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

III. Die Kegelschnittsflächen und die zugehörigen Körper

[urn:nbn:de:hbz:466:1-93638](#)

Es ist

$$c_1 = \frac{T_1}{M_1} = \frac{\frac{q^3 \pi}{2} + q \pi r^2}{q \pi r} = \frac{q^2 + 2r^2}{2r},$$

also

$$MS_1 = \frac{2c_1}{\pi} = \frac{q^2 + 2r^2}{r\pi}.$$

Statt des Halbringes kann man auch beliebige Ringsektoren in solcher Weise behandeln.

Aufgaben. Wie groß ist der Inhalt des über einem Halbkreise stehenden und in bestimmter Weise abgeschrägten Cylinders, wie groß ist die Mantelfläche, und wo liegt der Schwerpunkt des Körpers und des Mantels?

Ein Drehungskörper entstehe durch Drehung eines Halbkreises um eine Achse in seiner Ebene, die parallel zum Durchmesser ist. Wie groß sind Mantel und Inhalt des Körpers? Wo liegt der Schwerpunkt der Körperhälfte und wo der des Mantels? Zwei Fälle sind zu unterscheiden: in dem einen liegt die Achse auf der Durchmesserseite, im andern entgegengesetzt.

III. Die Regelschnittsflächen und die zugehörigen Körper.

a) Cylinder.

25) Über den geraden und schrägen Kreiszylinde ist in Teil I und II das Nötige gesagt. Die Inhaltsformeln lassen sich auch für den Fall aufstellen, daß die Grundfläche ein Kreissegment ist.

Dasselbe gilt vom elliptischen Cylinder. Die Inhaltsformel ist $J = ab\pi h$. Auch hier kann die Grundfläche ein Ellipsensegment sein.

Bei dem parabolischen Cylinder kann von einer Inhaltsberechnung nur die Rede sein, wenn die Grundfläche als Segment durch eine Sehne begrenzt ist. Die Berechnung des Segmentes ist in Teil II, S. 250 gelehrt worden.

Auch für den hyperbolischen Cylinder ist das in Geometrie Nr. 60 und 61 behandelte Segment der Berechnung zu Grunde zu legen.

b) Kegel.

26) Über den geraden und schiefen Kreiskegel und den elliptischen Kegel ist neues nicht zu bringen. Für den parabolischen und hyperbolischen Kegel ist die Inhaltsbestimmung möglich, wenn die Grundfläche ein begrenztes Segment ist.

c) Das Ellipsoid.

27) Dreht sich eine Ellipse um eine der beiden Achsen, so entsteht ein Drehungsellipsoïd. Man kann sich dasselbe auch dadurch entstanden denken, daß man in einer Kugel auf einem Hauptsnitte AB Lote errichtet und sämtliche Lote in konstantem Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkürzt oder verlängert.

Die Endpunkte liegen dann statt auf der Kugelfläche auf der des Drehungsellipsoïds. Der Kugelinhalt $\frac{4}{3} a^3 \pi$ geht über in $\left(\frac{4}{3} a^3 \pi\right) \frac{b}{a} = \frac{4}{3} a^2 b \pi$, wenn b die Drehachsachse ist, und in $\frac{4}{3} a b^2 \pi$, wenn a die Drehachsachse ist.

(Die Berechnung der Oberfläche überschreitet das Ziel der Schule.)

Bemerkung. Nach Guldin ist $J = 2 \varrho \pi F$ und $\varrho = \frac{J}{2 \pi F}$. Der Schwerpunktsabstand der halben Ellipsenfläche CDB in Figur 75 ist also $\varrho = \frac{\frac{4}{3} a^2 b \pi}{2 \pi \frac{ab \pi}{2}} = \frac{4 a}{3 \pi}$, er wird also ebenso berechnet, wie beim Kreise. Dies läßt sich auch auf dem Wege einfacher Anschauung nachweisen.

28) Figur 76 stellt wieder den Aufriss eines Drehungsellipsoïds dar. Errichtet man in demselben auf dem Hauptsnitte $ADBC$ Lote bis zur Oberfläche und unterwirft man diese der Verkürzung oder Verlängerung nach dem konstanten Verhältnis $\frac{c}{a}$, so entsteht an Stelle des Drehungsellipsoïds das dreiachsigie Ellipsoid mit den Achsen a , b und c . Der Inhalt $\frac{4}{3} a^2 b \pi$ geht über in $\left(\frac{4}{3} a^2 b \pi\right) \frac{c}{a}$ oder in $J = \frac{4}{3} abc \pi$.

Fig. 75.

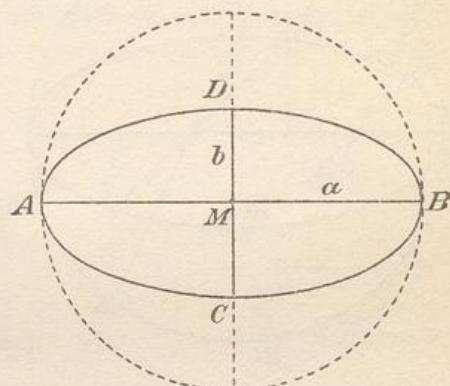
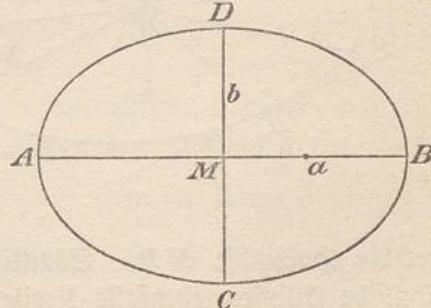


Fig. 76.



29) Die Parallelschnitte einer Kugel sind unter einander ähnlich. Verwandelt man die Kugel in Figur 77 durch Lotverkürzung in ein

Drehungsellipsoid, so geht jeder Kugelschnitt KL in einen Ellipsoidschnitt $K_1 L_1$ über; jeder zu KL parallele Kugelschnitt NO geht in einen Ellipsoidschnitt $N_1 O_1$ über, der zum vorigen, $K_1 L_1$, parallel ist. Dies folgt sofort aus der Ähnlichkeit der entsprechenden Dreiecke. Die Ellipsoidschnitte sind Parallelprojektionen der Kugelschnitte, und da die Winkel γ und γ_1 für die beiden gezeichneten Paare übereinstimmen, so sind die Parallelschnitte des Ellipsoids einander ähnlich. Ähnliche schiefen

Kreiszylinder werden nämlich hier auf ähnliche Weise geschnitten.

Geht man vom Drehungsellipsoid zum dreiachigen über, so erkennt man auf dieselbe Art, daß auch die Parallelschnitte des dreiachigen Ellipsoids unter einander ähnlich sind.

30) Jedes dreiachige Ellipsoid hat zwei Scharen von Kreisschritten. Sind nämlich die Achsen der Größe nach a , b und c , so daß c die kleinste ist, so läßt sich in der durch a und c bestimmten Ebene mit b ein Kreis schlagen, der den entsprechenden Hauptschmitt in P , Q , P_1 und Q_1 schneidet. Der Aufriß PQ stellt einen Kreisschmitt dar, denn die durch den Punkt M dargestellte Halbachse b ist gleich der darauf senkrechten Halbachse MP .

Sämtliche Parallelschritte zu PQ sind als ähnliche Ellipsen ebenfalls Kreise. Die Tangentialebenen in R und S geben die Grenzpunkte der einen Kreisschar. Auf RS liegen die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise. Dasselbe findet mit der

Fig. 77.

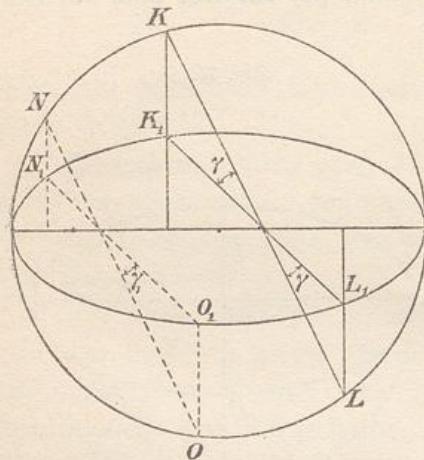
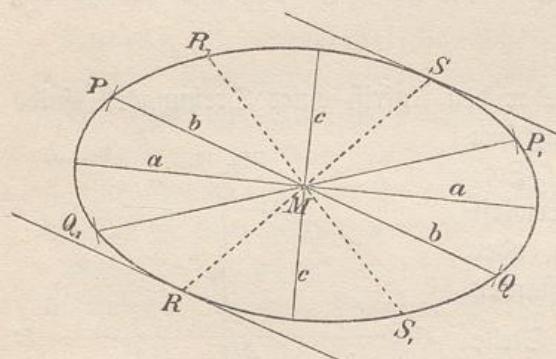


Fig. 78.



symmetrisch liegenden Kreisschar statt. Die Punkte R und S , R_1 und S_1 heißen Nabelpunkte des Ellipsoids. Sie sind von Bedeutung für die mathematische Physik.

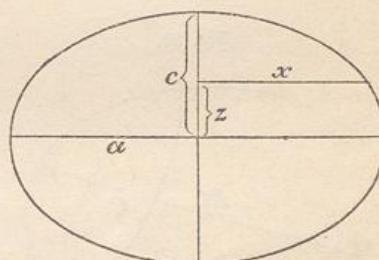
31) Verschiebt man die Kreisschnitte der einen Schar in geeigneter Weise auf einander, so nämlich, daß die Verbindungsline RS senkrecht zu PQ wird, so ist das Ellipsoid in ein Drehungsellipsoid verwandelt. In besonderen Fällen kann es auch zur Kugel werden.

32) Aus der Berechnung der Kugelsegmente läßt sich leicht die der Ellipsoidsegmente ableiten, und zwar nach der Methode der konstanten Verkürzung bezw. Verlängerung. Man kann aber auch folgendermaßen verfahren.

In Figur 79 ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
die Gleichung der Ellipse, also ist

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2.$$

Fig. 79.



Stellt die Zeichnung ein Drehungsellipsoid mit der Achse c dar, so hat der Horizontalschnitt in der Höhe z die Fläche $x^2\pi$ oder

$$q = a^2\pi - \frac{a^2\pi}{c^2} z^2.$$

Nach der Summenformel (Teil II, Ster. Nr. 64) ist also die Schicht von der Höhe Null bis zur Höhe z vom Inhalte

$$J = a^2\pi \frac{z}{1} - \frac{a^2\pi z^3}{c^2 3} = a^2\pi z \left(1 - \frac{z^2}{3c^2}\right).$$

Für $z = c$ bestätigt sich die obige Inhaltsformel für die Hälfte des Drehungsellipsoids.

33) Stellt dagegen die Figur ein dreiachsiges Ellipsoid mit den Halbachsen a , b und c dar, so ist wegen der Ähnlichkeit der Horizontalschnitte das zur Höhe z gehörige y von der Länge $y = x \frac{b}{a}$, und der Horizontalschnitt hat jetzt die Fläche $xy\pi = xx \frac{b}{a} \pi = x^2 \frac{b}{a} \pi$ oder

$$q = (a^2 - \frac{a^2}{c^2} z^2) \frac{b}{a} \pi.$$

Nach der Summenformel ist also die Schicht von Höhe 0 bis Höhe z vom Inhalte

$$J = ab\pi z - \frac{ab\pi z^3}{c^2} \cdot \frac{3}{8}.$$

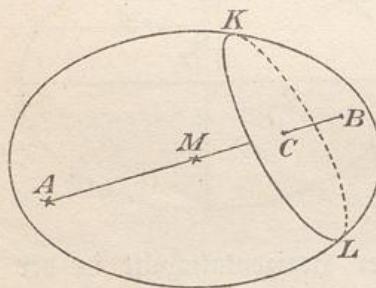
Für $z = c$ bestätigt sich die obige Inhaltsformel (für die Hälfte des Körpers).

Aus den Schichten kann man die Segmentformel leicht ableiten.

Auch die Simpson-Formel lässt sich benutzen, da der 3. Grad beim Querschnitt nicht überstiegen wird.

34) Für allgemeine Segmente ergibt sich folgende Methode als zweckmäßigste: KL sei ein ganz beliebiger Schnitt des dreiachigen Ellipsoids; B sei auf dessen Oberfläche der Berührungs punkt der zur Schnittebene parallelen Tangentialebene. Der Durchmesser AB wird in einem bestimmten Verhältnis $BC:CA$ durch die Schnittebene geteilt. Teilt man bei einer Kugel einen Durchmesser in demselben Verhältnis durch eine zu ihm senkrechte Schnittebene, so verhalten sich in beiden Körpern

Fig. 80.



die Segmente wie die ganzen Körper. Ist also S das Ellipsoidsegment, J der Ellipsoidinhalt, S_1 das Kugelsegment, J_1 der Kugelinhalt, so ist $S:S_1 = J:J_1$ und $S = S_1 \frac{J}{J_1}$. Dies ergibt sich aus der obigen Entstehungsweise des Ellipsoide aus der Kugel, bei der es sich um eine Art von Parallelprojektion handelt, die auf die Verhältnisse der Körperteile keinen Einfluss ausübt.

Das Ellipsoid ist von Wichtigkeit für die Untersuchung der Erdgestalt, für die Geometrie überhaupt und für die mathematische Physik, namentlich für die Optik, Potentialtheorie und Hydromechanik.

d) Kreis-Paraboloid und elliptisches Paraboloid.

35) Das durch Drehung einer Parabel um ihre Achse entstehende Drehs- oder Kreisparaboloid ist schon in Teil II (Kegelschnitte Nr. 43) als die Hälfte des zugehörigen Zylinders nachgewiesen. Der Inhalt ist also

$$J = \frac{1}{2} a^2 \pi h.$$

Verkürzt man sämtliche auf der Schnittebene $ABCD$ senkrechten Halbsehnen beider Körper in konstantem Verhältnis $\frac{b}{a}$, so entsteht ein elliptischer Cylinder und das zugehörige elliptische Paraboloid, welches nach dem Satze von Cavalieri wiederum halb so großen Inhalt hat, wie der Cylinder.

36) Das Drehungsparaboloid ist ein besonderer Fall vom Drehungsellipsoid, seine Parallelschnitte sind also ebenfalls untereinander ähnlich. Das elliptische Paraboloid ist ein besonderer Fall vom dreiachigen Ellipsoid, es hat ebenfalls ähnliche Parallelschnitte und unter diesen zwei Scharen von Kreisschnitten.

Der Satz von der Halbierung des Cylinderinhalts durch das Paraboloid bleibt auch bestehen, wenn man durch Horizontalverschiebung der Horizontalschnitte Figur 81 in Figur 82 verwandelt.

Auf die Bedeutung des Drehungsparaboloids für die Hydromechanik, für die Lehre von den Trägheitsmomenten und für die mathematische Physik ist schon in Teil II aufmerksam gemacht worden.

e) Hyperboloid.

37) Durch Drehung einer Geraden um eine sie nicht schneidende, sondern schräg kreuzende Achse entsteht nach Teil II (V. 43 und IV. 2) ein Drehungshyperboloid mit einem Mantel. Ein solches hat demnach auf sich zwei Scharen gerader Linien. Daraus folgt, daß die Schrägschnitte des Körpers Ellipsen sind, sobald der Schnitt eine geschlossene einarmige Kurve gibt.

Man kann nämlich nach der Methode von Dandelin Berührungsfigeln einsenken, die auch die Ebene berühren. Aus der Gleichheit der Kugel-Tangenten XF und XA bzw. XF_1 und XB folgt dann für jeden Punkt der Schnittkurve $FX + XF_1 = AB = \text{const.}$

5*

Fig. 81.

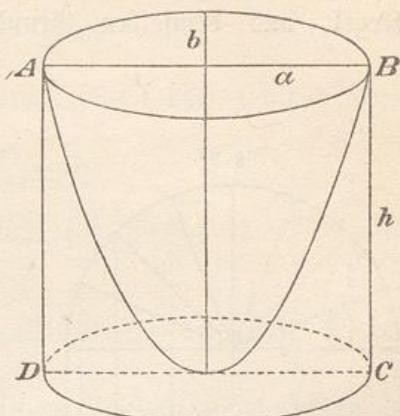
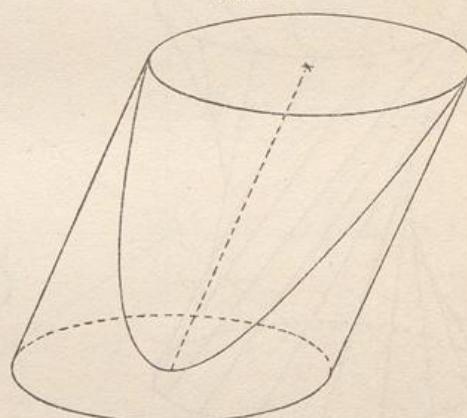


Fig. 82.



Wird dagegen der Schnitt zweiarmig, so wird er, wie beim Regel, aus demselben Grunde ein Regelschnitt, denn dann wird

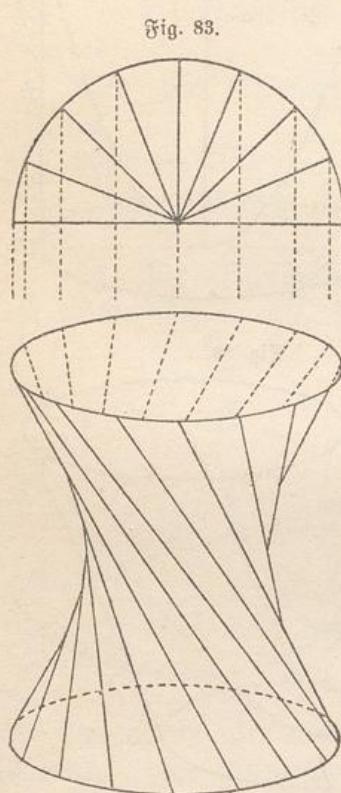


Fig. 83.

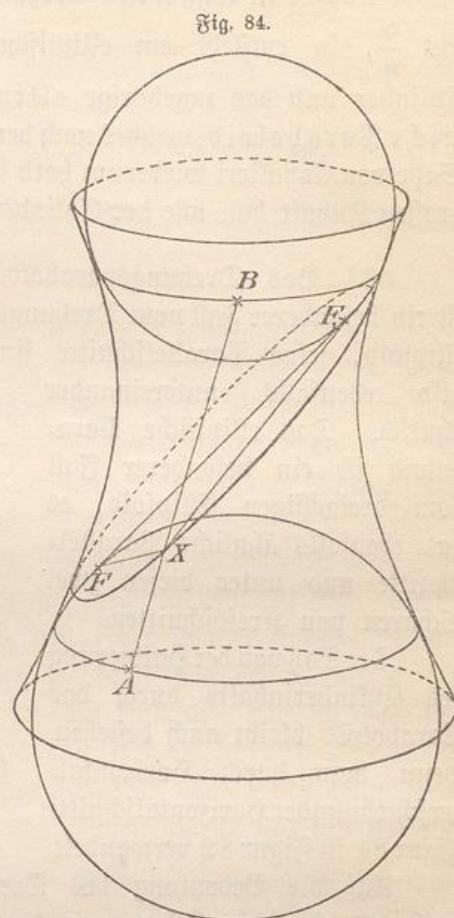


Fig. 84.

$XF - XF_1 = XA - XB = AB$. Wird der Schnitt parallel zu einer Seite des Asymptotenkegels, so entsteht eine Parabel. (Vgl. Teil II, Fig. 180 u. 183.)

38) Die Horizontalsschichten des Körpers sind leicht zu berechnen. Auf diese Berechnung kann sich die Schule beschränken.

Ist die Gleichung des Haupt schnitts

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ergibt sich für die Höhe y der Abstand x aus der Gleichung

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2,$$

also ist der Querschnitt

$$q = x^2\pi = a^2\pi + \frac{a^2}{b^2}\pi y^2.$$

Nach der Summenformel ist die Körperschicht von 0 bis y vom Inhalte

$$J = a^2\pi y + \frac{a^2}{3b^2}\pi y^3.$$

Mit Hülfe der Segmentformel lässt sich hieraus der Schwerpunkt des Hyperbelsegments berechnen.

39) Es fragt sich, ob die Parallelschnitte ähnliche Kegelschnitte sind.

Es genügt, dies an dem gleichseitigen Drehungshyperboloid zu untersuchen. Die

Gleichung der Hyperbel*) desselben sei

$$1) \quad x^2 - y^2 = 1,$$

die Schnittlinien AB und A_1B_1 mögen die aus $A = \tan \alpha$ folgende Neigung α haben.

Die Gleichung von AB ist also

$$2) \quad y = Ax.$$

Aus 1) und 2) folgen als Koordinaten von B

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - A^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}},$$

so daß $MB^2 = x^2 + y^2 = \frac{1 + A^2}{1 - A^2}$ ist. Der Horizontalschnitt des Hyperboloids durch M hat aber überall den Radius $MC = 1$, folglich hat die Ellipse AB das Achsenverhältnis

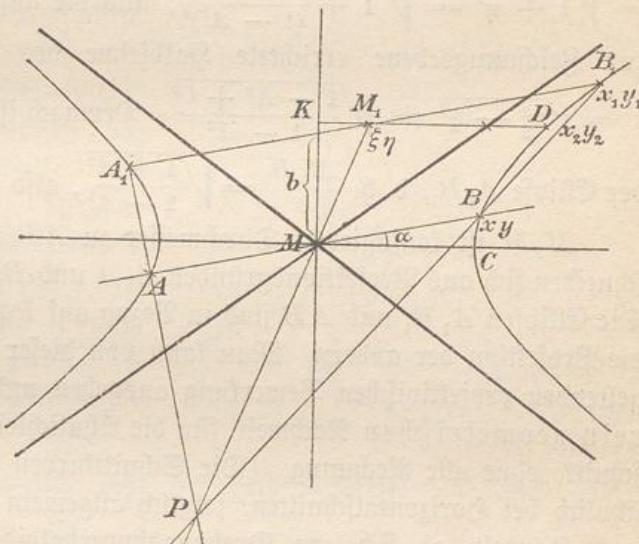
$$\sqrt{\frac{1 + A^2}{1 - A^2}} : 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1 + A^2} : \sqrt{1 - A^2}.$$

Die Gleichung von A_1B_1 sei

$$3) \quad y = Ax + b.$$

*) Fig. 85 stellt die allgemeine Hyperbel dar. Für den Specialfall der Rechnung denke man sich die Asymptoten aufeinander senkrecht.

Fig. 85.



Aus 1) und 3) ergeben sich die Koordinaten von A_1 und B_1 als

$$\frac{x_1}{2} = \frac{Ab \pm \sqrt{1+b^2-A^2}}{1-A^2}, \quad \frac{y_1}{2} = \frac{b \pm A\sqrt{1+b^2-A^2}}{1-A^2}.$$

Der Halbierungspunkt M_1 von A_1B_1 hat die Koordinaten $\frac{x_1+x_2}{2}$ und $\frac{y_1+y_2}{2}$, oder

$$\xi = \frac{Ab}{1-A^2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{b}{1-A^2}.$$

Folglich ist

$$M_1B_1 = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2} = \frac{\sqrt{(1+b^2-A^2)(1+A^2)}}{(1-A^2)}.$$

Die Haupthyperbel hat aber in Höhe η die Abscisse $KD = x_2 = \sqrt{1+\eta^2} = \sqrt{1+\frac{b}{(1-A^2)^2}}$, und die auf KD in M_1 senkrecht zur Zeichnungsebene errichtete Halbsehne des Horizontalschnitts ist $s = \sqrt{x_2^2 - \xi^2} = \sqrt{\frac{1-A^2+b^2}{1-A^2}}$. Demnach ist das Achsenverhältnis der Ellipse A_1B_1 , d. h. $\frac{M_1B_1}{s} = \sqrt{\frac{1+A^2}{1-A^2}}$, also dasselbe wie bei AB .

M_1M ist konjugierter Durchmesser zu AB und A_1B_1 . Auf ihm schneiden sich aus Projektionsgründen A_1A und B_1B in einem Punkte P . Die Ellipsen A_1B_1 und AB sind in Bezug auf P perspektivisch, also eine die Projektion der andern. Man kann von dieser für jeden Schnitt geltenden projektivischen Bemerkung ausgehen und erhält dadurch einen rein geometrischen Nachweis für die Ähnlichkeit der beiden Parallelschnitte ohne alle Rechnung. (Die Schnittkurven sind perspektivisch und ähnlich bei Horizontalschnitten, folglich allgemein bei Parallelschnitten.)

Handelt es sich um Drehungshyperboloiden, die aus der allgemeinen Hyperbel entstehen, also aus $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, so ist die Betrachtung nur unwesentlich verschieden. Man kann jedoch auch durch konstante Verkürzung oder Verlängerung der senkrechten Halbsehnen zur allgemeinen Hyperbel übergehen.

Sind die Parallelschnitte nicht Ellipsen, sondern zweiteilige, also Hyperbeln, so ist die Koordinatenbetrachtung nur eine unbedeutende Umgestaltung der vorigen.

Also gilt ganz allgemein der Satz:

Die Parallelschnitte des einheitlichen Drehungshyperboloids sind ähnliche Regelschnitte.

Auf der Existenz der Linien auf dem Drehungshyperboloid beruht die Möglichkeit der Konstruktion der sogenannten Hyperbelräder, die

ähnlich, wie die konischen Räder arbeiten, wobei jedoch die Achsen sich nicht schneiden, sondern in beliebiger Weise kreuzen. Die Zähne rollen sich nicht einfach aufeinander ab, sondern verschieben sich auch seitlich.

40) Das einteilige Drehungshyperboloid geht in ein dreiachsiges über, sobald man sämtliche auf einem senkrechten Hauptsnitte stehenden Lote in konstantem Verhältnis verkürzt. Dabei bleiben die beiden Gruppen gerader Linien auf der Oberfläche als solche bestehen, so daß die Figur 83 noch immer als Darstellung des Körpers gelten kann. Die Inhaltsberechnung ändert sich in derselben Weise, wie beim Übergange vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigem. Der Körper hat zwei Scharen von Kreisschnitten. Die Ähnlichkeit der Parallelschnitte bleibt erhalten.

41) Auch durch Horizontalverschiebung der Kreisschnitte des Drehungshyperboloids gelangt man zum dreiachsigem Hyperboloid, nur müssen die Mittelpunkte der Kreise auf einer Geraden MM_1 bleiben. Auch jetzt bleiben die geraden Linien bestehen. Sind die Abschnitte auf dem einen der Kreise gleich groß, so sind sie es auch auf dem andern.

42) Denkt man sich jetzt die beiden Kreise unendlich groß, d. h. als horizontale gerade Linien (die sich kreuzen wie AB und CD in Figur 87) und in gleiche Stücke zerlegt sind, so geben die Verbindungslienien die bereits in Teil II (beim Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen) behandelten Flächen. Sie bilden das sogenannte hyperbolische Par-

Fig. 86.

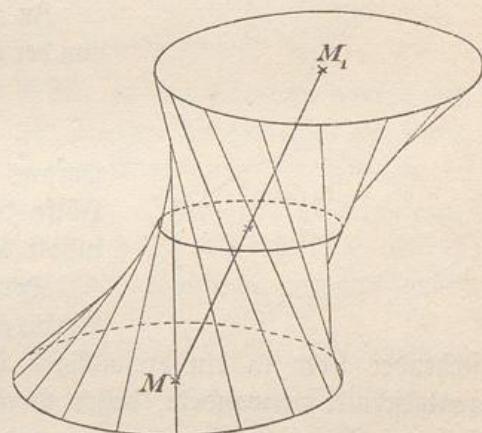
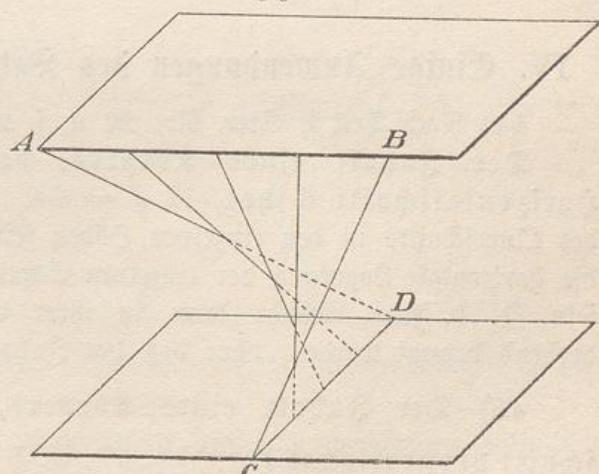


Fig. 87.

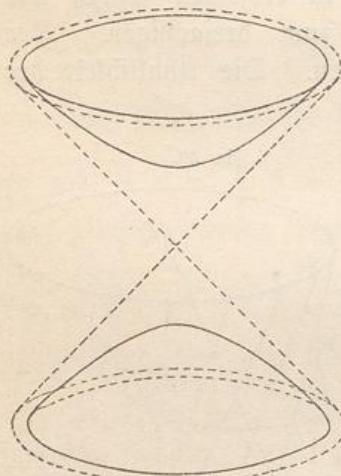


boloid. (Vergl. Figur 131 in der Einführung in das stereometrische Zeichnen und Figur 146 in Teil II.)

Verbindet man A , B , C und D auf alle Arten, so hat man das durch die Fläche halbierte Halbtetraeder, so daß nach Teil II, Ster. Nr. 37 die betreffende Inhaltsberechnung bereits erledigt ist.

43) Drehung der Hyperbel um die andere Achse giebt das zweiteilige Drehungshyperboloid. In Figur 88 ist es so dargestellt, daß statt der Gleichung

Fig. 88.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die folgende maßgebend ist,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Zu Zwecken der Berechnung kann man von der Scheitelgleichung ausgehen, also von

$$x^2 = 2py + \frac{p}{a}y^2,$$

woraus sich der Querschnitt und mit Hülfe der Summenformel der Segmentinhalt leicht ergiebt.

Der Körper läßt sich durch konstante Verkürzung der auf einem Hauptquerschnitt stehenden Lote in ein dreiachsiges Hyperboloid mit elliptischem Horizontalschnitt verwandeln, dessen Berechnung ebenso einfach ist. Näher soll auf ihn nicht eingegangen werden. Die Entwickelungen sind den beim einteiligen Hyperboloid gegebenen ganz analog.

IV. Einige Anwendungen des Satzes von Cavalieri.

44) Nach Teil I, Ster. Nr. 22 u. s. w. gelten folgende Sätze:

Der Inhalt eines Körpers, der überall denselben Horizontalschnitt G hat, ist $J = Gh$. Dabei mag die Gestalt des Querschnitts in den einzelnen Höhen sein, welche sie will. Auch die horizontale Lagerung der einzelnen Schnitte kann eine willkürliche sein, d. h. jede Schicht kann in ihrer Ebene fortschreitend und drehend bewegt werden, ohne daß der Inhalt sich ändert.

45) Der Inhalt eines Körpers, dessen Horizontalschnitt proportional der Höhe ist, ist $J = G\frac{h}{2}$. In Figur 89