Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

d) Kreis-Paraboloid und elliptisches Paraboloid

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Nach der Summenformel ist also die Schicht von Höhe 0 bis Höhe z vom Inhalte

$$J = ab\pi z - \frac{ab\pi z^3}{c^2 \cdot 3}.$$

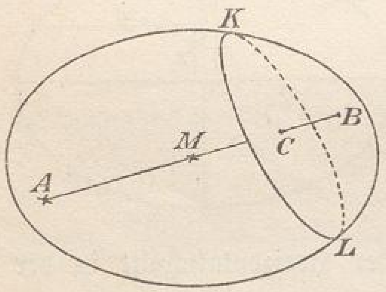
Für $z = c$ bestätigt sich die obige Inhaltsformel (für die Hälfte des Körpers).

Aus den Schichten kann man die Segmentformel leicht ableiten.

Auch die Simpson-Formel läßt sich benutzen, da der 3. Grad beim Querschnitt nicht überstiegen wird.

34) Für allgemeine Segmente ergiebt sich folgende Methode als zweckmäßigste: KL sei ein ganz beliebiger Schnitt des dreiachsigen Ellipsoids; B sei auf dessen Oberfläche der Berührungspunkt der zur Schnittebene parallelen Tangentialebene. Der Durchmesser AB wird in einem bestimmten Verhältnis $BC:CA$ durch die Schnittebene geteilt. Teilt man bei einer Kugel einen Durchmesser in demselben Verhältnis durch eine zu ihm senkrechte Schnittebene, so verhalten sich in beiden Körpern die Segmente wie die ganzen Körper. Ist also S das Ellipsoidsegment, J der Ellipsoidinhalt, S_1 das Kugelsegment, J_1 der Kugelinhalt, so ist $S : S_1 = J : J_1$ und $S = S_1 \frac{J}{J_1}$. Dies ergiebt sich aus der obigen Entstehungsweise des Ellipsoids aus der Kugel, bei der es sich um eine Art von Parallelprojektion handelt, die auf die Verhältnisse der Körperteile keinen Einfluß ausübt.

Fig. 80.



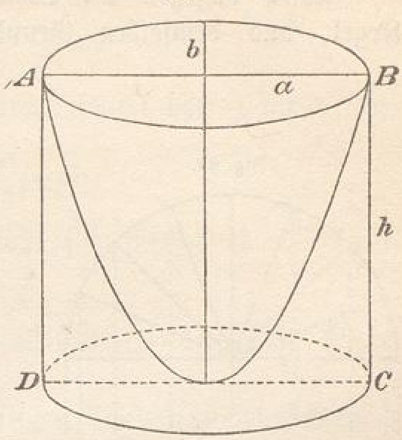
Das Ellipsoid ist von Wichtigkeit für die Untersuchung der Erdgestalt, für die Geometrie überhaupt und für die mathematische Physik, namentlich für die Optik, Potentialtheorie und Hydromechanik.

d) Kreis-Paraboloid und elliptisches Paraboloid.

35) Das durch Drehung einer Parabel um ihre Achse entstehende Drehungs- oder Kreisparaboloid ist schon in Teil II (Kegelschnitte Nr. 43) als die Hälfte des zugehörigen Cylinders nachgewiesen. Der Inhalt ist also

$$J = \frac{1}{2} a^2 \pi h.$$

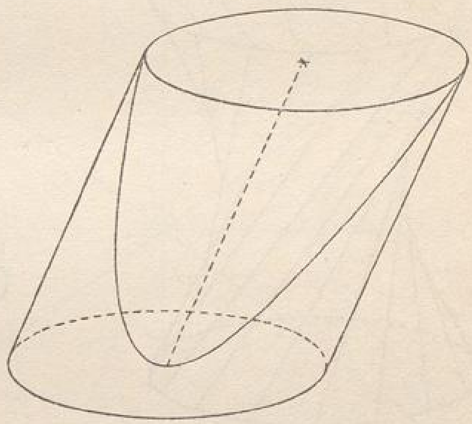
Fig. 81.



Verkürzt man sämtliche auf der Schnittebene $ABCD$ senkrechten Halbsehnen beider Körper in konstantem Verhältnis $\frac{b}{a}$, so entsteht ein elliptischer Cylinder und das zugehörige elliptische Paraboloid, welches nach dem Satze von Cavalieri wiederum halb so großen Inhalt hat, wie der Cylinder.

36) Das Drehungsparaboloid ist ein besonderer Fall vom Drehungsellipsoid, seine Parallelschnitte sind also ebenfalls untereinander ähnlich. Das elliptische Paraboloid ist ein besonderer Fall vom dreiachsigen Ellipsoid, es hat ebenfalls ähnliche Parallelschnitte und unter diesen zwei Scharen von Kreisschnitten.

Fig. 82.



Der Satz von der Halbierung des Cylinderinhalts durch das Paraboloid bleibt auch bestehen, wenn man durch Horizontalverschiebung der Horizontalschnitte Figur 81 in Figur 82 verwandelt.

Auf die Bedeutung des Drehungsparaboloids für die Hydromechanik, für die Lehre von den Trägheitsmomenten und für die mathematische Physik ist schon in Teil II aufmerksam gemacht worden.

e) Hyperboloid.

37) Durch Drehung einer Geraden um eine sie nicht schneidende, sondern schräg kreuzende Achse entsteht nach Teil II (V. 43 und IV. 2) ein Drehungshyperboloid mit einem Mantel. Ein solches hat demnach auf sich zwei Scharen gerader Linien. Daraus folgt, daß die Schrägschnitte des Körpers Ellipsen sind, sobald der Schnitt eine geschlossene einarmige Kurve giebt.

Man kann nämlich nach der Methode von Dandelin Berührungskugeln einsenken, die auch die Ebene berühren. Aus der Gleichheit der Kugel-Tangenten XF und XA bezw. XF_1 und XB folgt dann für jeden Punkt der Schnittkurve $FX + XF_1 = AB =$ const.