Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

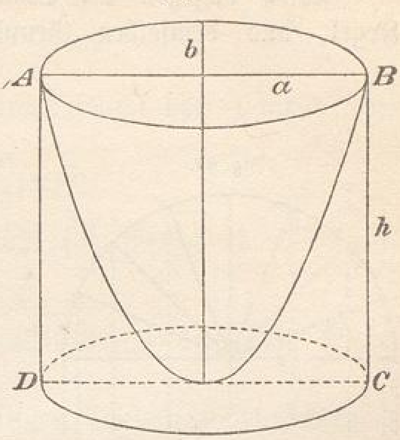
Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

e) Das Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid

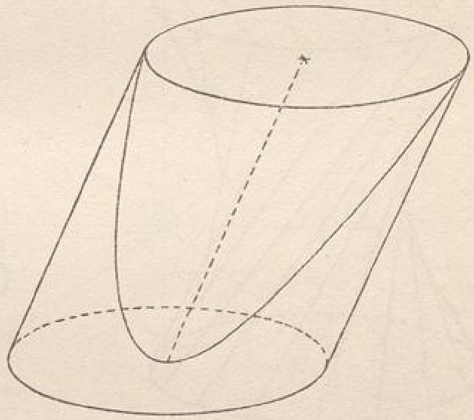
Fig. 81.



Verkürzt man sämtliche auf der Schnittebene $ABCD$ senkrechten Halbsehnen beider Körper in konstantem Verhältnis $\frac{b}{a}$, so entsteht ein elliptischer Cylinder und das zugehörige elliptische Paraboloid, welches nach dem Satze von Cavalieri wiederum halb so großen Inhalt hat, wie der Cylinder.

36) Das Drehungsparaboloid ist ein besonderer Fall vom Drehungsellipsoid, seine Parallelschnitte sind also ebenfalls untereinander ähnlich. Das elliptische Paraboloid ist ein besonderer Fall vom dreiachsigen Ellipsoid, es hat ebenfalls ähnliche Parallelschnitte und unter diesen zwei Scharen von Kreisschnitten.

Fig. 82.



Der Satz von der Halbierung des Cylinderinhalts durch das Paraboloid bleibt auch bestehen, wenn man durch Horizontalverschiebung der Horizontalschnitte Figur 81 in Figur 82 verwandelt.

Auf die Bedeutung des Drehungsparaboloids für die Hydromechanik, für die Lehre von den Trägheitsmomenten und für die mathematische Physik ist schon in Teil II aufmerksam gemacht worden.

e) Hyperboloid.

37) Durch Drehung einer Geraden um eine sie nicht schneidende, sondern schräg kreuzende Achse entsteht nach Teil II (V. 43 und IV. 2) ein Drehungshyperboloid mit einem Mantel. Ein solches hat demnach auf sich zwei Scharen gerader Linien. Daraus folgt, daß die Schrägschnitte des Körpers Ellipsen sind, sobald der Schnitt eine geschlossene einarmige Kurve giebt.

Man kann nämlich nach der Methode von Dandelin Berührungskugeln einsenken, die auch die Ebene berühren. Aus der Gleichheit der Kugel-Tangenten XF und XA bezw. XF_1 und XB folgt dann für jeden Punkt der Schnittkurve $FX + XF_1 = AB =$ const.

Wird dagegen der Schnitt zweiarmig, so wird er, wie beim Kegel, aus demselben Grunde ein Kegelschnitt, denn dann wird

Fig. 83.

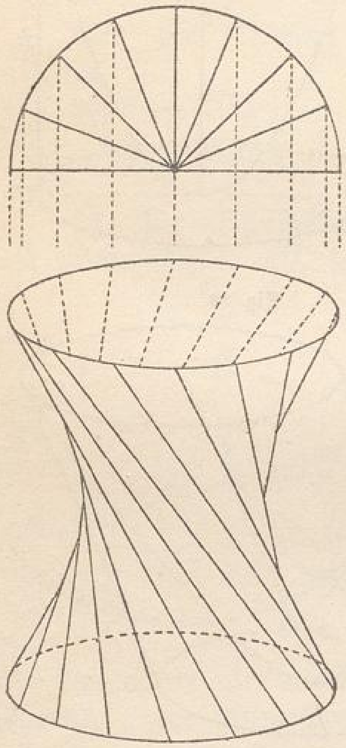
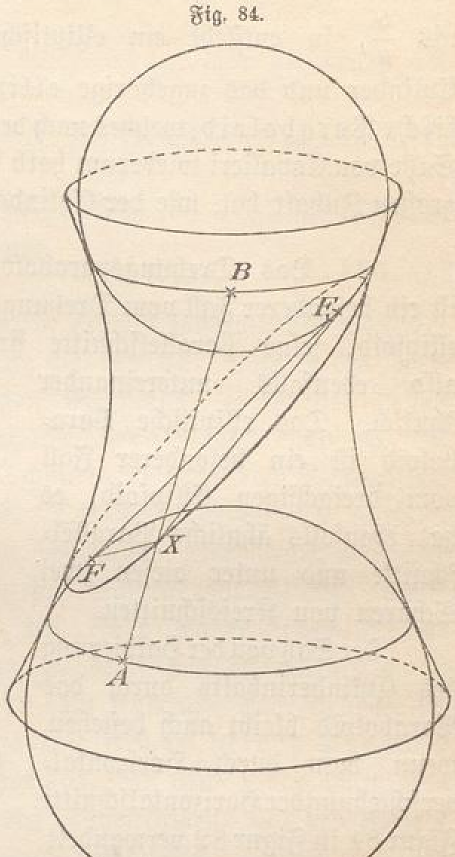


Fig. 84.



$XF - XF_1 = XA - XB = AB$. Wird der Schnitt parallel zu einer Seite des Asymptotenkegels, so entsteht eine Parabel. (Vgl. Teil II, Fig. 180 u. 183.)

38) Die Horizontalschichten des Körpers sind leicht zu berechnen. Auf diese Berechnung kann sich die Schule beschränken.

Ist die Gleichung des Hauptschnitts

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so ergiebt sich für die Höhe y der Abstand x aus der Gleichung

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2,$$

also ist der Querschnitt

$$q = x^2\pi = a^2\pi + \frac{a^2}{b^2}\pi y^2 .$$

Nach der Summenformel ist die Körperschicht von 0 bis y vom Inhalte

$$J = a^2\pi y + \frac{a^2}{3b^2}\pi y^3 .$$

Mit Hülfe der Segmentformel läßt sich hieraus der Schwerpunkt des Hyperbelsegments berechnen.

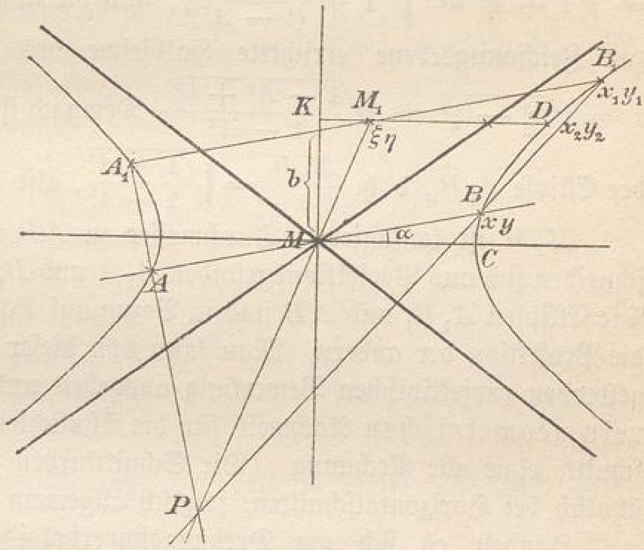
39) Es fragt sich, ob die Parallelschnitte **ähnliche** Kegelschnitte sind.

Es genügt, dies an dem gleichseitigen Drehungshyperboloid zu untersuchen. Die Gleichung der Hyperbel*) desselben sei

1) $x^2 - y^2 = 1$,

die Schnittlinien AB und A_1B_1 mögen die aus $A = \tan\alpha$ folgende Neigung α haben.

Fig. 85.



Die Gleichung von AB ist also

2) $y = Ax$.

Aus 1) und 2) folgen als Koordinaten von B

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - A^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}},$$

so daß $MB^2 = x^2 + y^2 = \dfrac{1 + A^2}{1 - A^2}$ ist. Der Horizontalschnitt des Hyperboloids durch M hat aber überall den Radius $MC = 1$, folglich hat die Ellipse AB das **Achsenverhältnis**

$$\sqrt{\frac{1 + A^2}{1 - A^2}} : 1 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1 + A^2} : \sqrt{1 - A^2}.$$

Die Gleichung von A_1B_1 sei

3) $$y = Ax + b.$$

*) Fig. 85 stellt die allgemeine Hyperbel dar. Für den Specialfall der Rechnung denke man sich die Asymptoten aufeinander senkrecht.

Aus 1) und 3) ergeben sich die Koordinaten von A_1 und B_1 als

$$x_{\substack{1\\2}} = \frac{Ab \pm \sqrt{1 + b^2 - A^2}}{1 - A^2}, \quad y_{\substack{1\\2}} = \frac{b \pm A\sqrt{1 + b^2 - A^2}}{1 - A^2}.$$

Der Halbierungspunkt M_1 von $A_1 B_1$ hat die Koordinaten $\frac{x_1 + x_2}{2}$ und $\frac{y_1 + y_2}{2}$, oder

$$\xi = \frac{Ab}{1 - A^2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{b}{1 - A^2}.$$

Folglich ist

$$M_1 B_1 = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2} = \frac{\sqrt{(1 + b^2 - A^2)(1 + A^2)}}{(1 - A^2)}.$$

Die Haupthyperbel hat aber in Höhe η die Abscisse $KD = x_2 = \sqrt{1 + \eta^2} = \sqrt{1 + \frac{b}{(1 - A^2)^2}}$, und die auf KD in M_1 senkrecht zur Zeichnungsebene errichtete Halbsehne des Horizontalschnitts ist $s = \sqrt{x_2^2 - \xi^2} = \sqrt{\frac{1 - A^2 + b^2}{1 - A^2}}$. Demnach ist das Achsenverhältnis der Ellipse $A_1 B_1$, d. h. $\frac{M_1 B_1}{s} = \sqrt{\frac{1 + A^2}{1 - A^2}}$, also dasselbe wie bei AB.

$M_1 M$ ist konjugierter Durchmesser zu AB und $A_1 B_1$. Auf ihm schneiden sich aus Projektionsgründen $A_1 A$ und $B_1 B$ in einem Punkte P. Die Ellipsen $A_1 B_1$ und AB sind in Bezug auf P perspektivisch, also eine die Projektion der andern. Man kann von dieser für jeden Hauptschnitt geltenden projektivischen Bemerkung ausgehen und erhält dadurch einen rein geometrischen Nachweis für die Ähnlichkeit der beiden Parallelschnitte ohne alle Rechnung. (Die Schnittkurven sind perspektivisch und ähnlich bei Horizontalschnitten, folglich allgemein bei Parallelschnitten.)

Handelt es sich um Drehungshyperboloide, die aus der allgemeinen Hyperbel entstehen, also aus $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, so ist die Betrachtung nur unwesentlich verschieden. Man kann jedoch auch durch konstante Verkürzung oder Verlängerung der senkrechten Halbsehnen zur allgemeinen Hyperbel übergehen.

Sind die Parallelschnitte nicht Ellipsen, sondern zweiteilige, also Hyperbeln, so ist die Koordinatenbetrachtung nur eine unbedeutende Umgestaltung der vorigen.

Also gilt ganz allgemein der Satz:

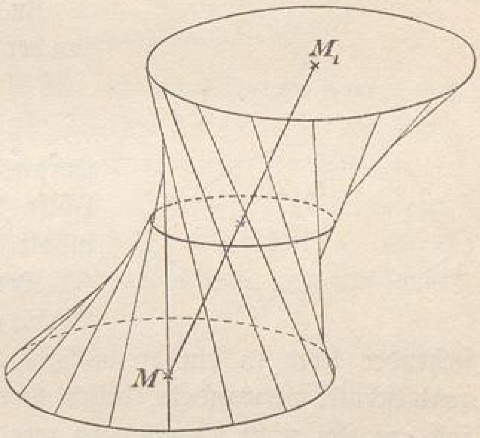
Die Parallelschnitte des einteiligen Drehungshyperboloids sind ähnliche Kegelschnitte.

Auf der Existenz der Linien auf dem Drehungshyperboloide beruht die Möglichkeit der Konstruktion der sogenannten Hyperbelräder, die ähnlich, wie die konischen Räder arbeiten, wobei jedoch die Achsen sich nicht schneiden, sondern in beliebiger Weise kreuzen. Die Zähne rollen sich nicht einfach aufeinander ab, sondern verschieben sich auch seitlich.

40) Das einteilige Drehungshyperboloid geht in ein dreiachsiges über, sobald man sämtliche auf einem senkrechten Hauptschnitte stehenden Lote in konstantem Verhältnis verkürzt. Dabei bleiben die beiden Gruppen gerader Linien auf der Oberfläche als solche bestehen, so daß die Figur 83 noch immer als Darstellung des Körpers gelten kann. Die Inhaltsberechnung ändert sich in derselben Weise, wie beim Übergange vom Drehungsellipsoid zum dreiachsigen. Der Körper hat zwei Scharen von Kreisschnitten. Die Ähnlichkeit der Parallelschnitte bleibt erhalten.

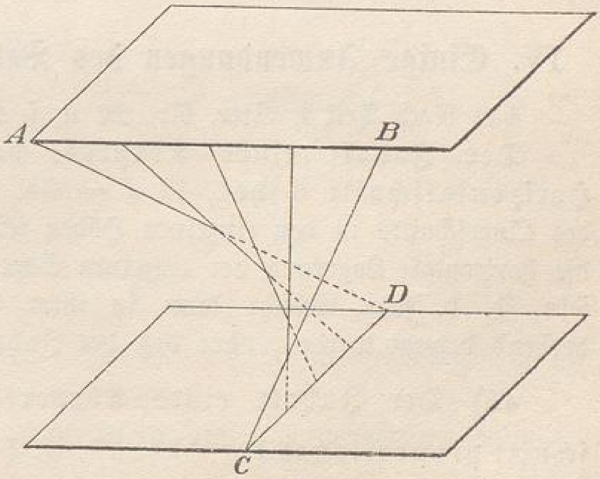
41) Auch durch Horizontalverschiebung der Kreisschnitte des Drehungshyperboloids gelangt man zum dreiachsigen Hyperboloide, nur müssen die Mittelpunkte der Kreise auf einer Geraden MM_1 bleiben. Auch jetzt bleiben die geraden Linien bestehen. Sind die Abschnitte auf dem einen der Kreise gleich groß, so sind sie es auch auf dem andern.

Fig. 86.



42) Denkt man sich jetzt die beiden Kreise unendlich groß, d. h. als horizontale gerade Linien (die sich kreuzen wie AB und CD in Figur 87) und in gleiche Stücke zerlegt sind, so geben die Verbindungslinien die bereits in Teil II (beim Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen) behandelten Flächen. Sie bilden das sogenannte hyperbolische Para-

Fig. 87.



boloid. (Vergl. Figur 131 in der Einführung in das stereometrische Zeichnen und Figur 146 in Teil II.)

Verbindet man A, B, C und D auf alle Arten, so hat man das durch die Fläche halbierte Halbtetraeder, so daß nach Teil II, Ster. Nr. 37 die betreffende Inhaltsberechnung bereits erledigt ist.

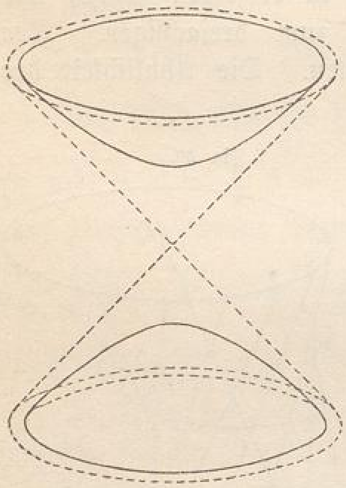
43) Drehung der Hyperbel um die andere Achse giebt das zweiteilige Drehungshyperboloid. In Figur 88 ist es so dargestellt, daß statt der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die folgende maßgebend ist,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Fig. 88.



Zu Zwecken der Berechnung kann man von der Scheitelgleichung ausgehen, also von

$$x^2 = 2py + \frac{p}{a}y^2,$$

woraus sich der Querschnitt und mit Hülfe der Summenformel der Segmentinhalt leicht ergiebt.

Der Körper läßt sich durch konstante Verkürzung der auf einem Hauptschnitt stehenden Lote in ein dreiachsiges Hyperboloid mit elliptischem Horizontalschnitt verwandeln, dessen Berechnung ebenso einfach ist. Näher soll auf ihn nicht eingegangen werden. Die Entwickelungen sind den beim einteiligen Hyperboloid gegebenen ganz analog.

IV. Einige Anwendungen des Satzes von Cavalieri.

44) Nach Teil I, Ster. Nr. 22 u. s. w. gelten folgende Sätze: Der Inhalt eines Körpers, der überall denselben Horizontalschnitt G hat, ist $J = Gh$. Dabei mag die Gestalt des Querschnitts in den einzelnen Höhen sein, welche sie will. Auch die horizontale Lagerung der einzelnen Schnitte kann eine willkürliche sein, d. h. jede Schicht kann in ihrer Ebene fortschreitend und drehend bewegt werden, ohne daß der Inhalt sich ändert.

45) Der Inhalt eines Körpers, dessen Horizontalschnitt proportional der Höhe ist, ist $J = G\frac{h}{2}$. In Figur 89