Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

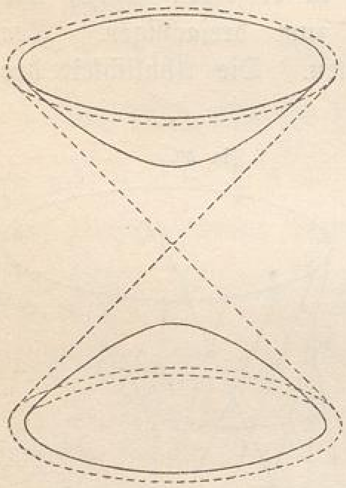
Leipzig, 1895

IV. Einige Anwendungen des Satzes von Cavalieri boloid. (Vergl. Figur 131 in der Einführung in das stereometrische Zeichnen und Figur 146 in Teil II.)

Verbindet man A, B, C und D auf alle Arten, so hat man das durch die Fläche halbierte Halbtetraeder, so daß nach Teil II, Ster. Nr. 37 die betreffende Inhaltsberechnung bereits erledigt ist.

43) Drehung der Hyperbel um die andere Achse giebt das zweiteilige Drehungshyperboloid. In Figur 88 ist es so dargestellt, daß statt der Gleichung

Fig. 88.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die folgende maßgebend ist,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Zu Zwecken der Berechnung kann man von der Scheitelgleichung ausgehen, also von

$$x^2 = 2py + \frac{p}{a}y^2,$$

woraus sich der Querschnitt und mit Hülfe der Summenformel der Segmentinhalt leicht ergiebt.

Der Körper läßt sich durch konstante Verkürzung der auf einem Hauptschnitt stehenden Lote in ein dreiachsiges Hyperboloid mit elliptischem Horizontalschnitt verwandeln, dessen Berechnung ebenso einfach ist. Näher soll auf ihn nicht eingegangen werden. Die Entwickelungen sind den beim einteiligen Hyperboloid gegebenen ganz analog.

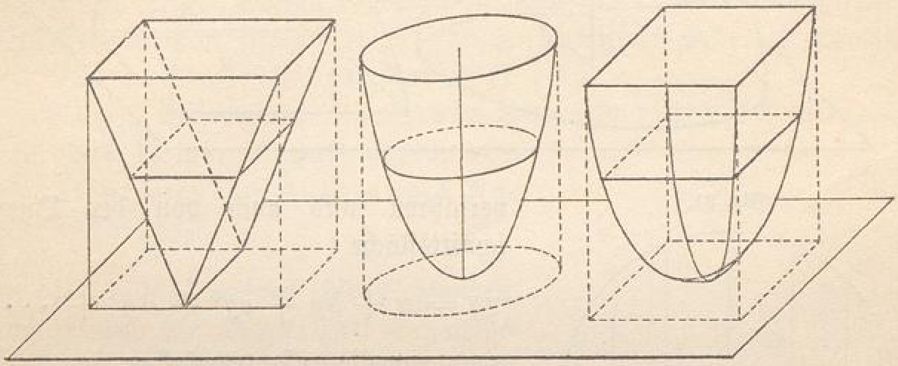
IV. Einige Anwendungen des Satzes von Cavalieri.

44) Nach Teil I, Ster. Nr. 22 u. s. w. gelten folgende Sätze: Der Inhalt eines Körpers, der überall denselben Horizontalschnitt G hat, ist $J = Gh$. Dabei mag die Gestalt des Querschnitts in den einzelnen Höhen sein, welche sie will. Auch die horizontale Lagerung der einzelnen Schnitte kann eine willkürliche sein, d. h. jede Schicht kann in ihrer Ebene fortschreitend und drehend bewegt werden, ohne daß der Inhalt sich ändert.

45) Der Inhalt eines Körpers, dessen Horizontalschnitt proportional der Höhe ist, ist $J = G\frac{h}{2}$. In Figur 89

sind einige solche Körper dargestellt. Der erste ist der auf die Kante gestellte Dachkörper, der zweite ist ein Drehungsparaboloid, welches dadurch entstanden ist, daß man jeden Querschnitt des ersten in einen gleich großen Kreis verwandelt. Der dritte entsteht dadurch, daß man

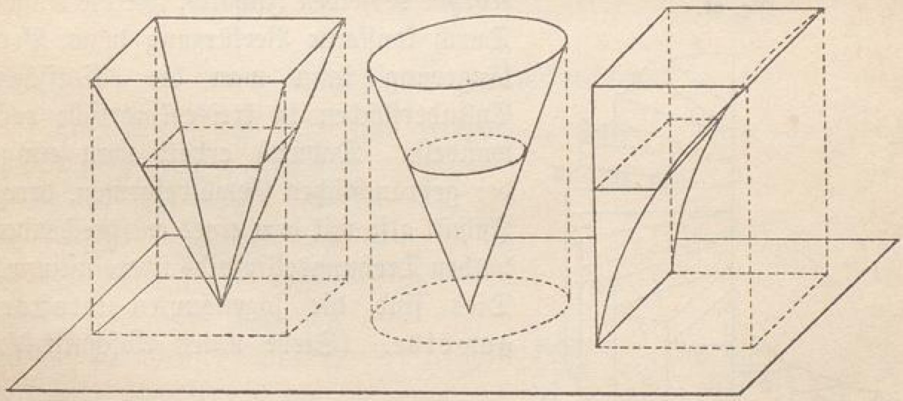
Fig. 89.



jeden rechteckigen Querschnitt des ersten in ein Quadrat verwandelt. Ebenso kann man ihm ähnliche Dreiecke, ähnliche Fünfecke und dergleichen als Querschnitte geben. Bei geeigneter Anordnung der horizontalen Lagerung werden die Grenzlinien Parabeln. **Jeder dieser Körper ist die Hälfte des zugehörigen Prismas bezw. Cylinders.** Auf die obere Fläche gestellt würden die letzteren parabolische Gewölbe geben.

46) **Der Inhalt eines Körpers, dessen Horizontalschnitt proportional dem Quadrate der Höhe ist, ist** $J = G\frac{h}{3}$.

Fig. 89b.



Hierher gehören Pyramide, Kegel und parabolischer Cylinder in der gezeichneten Stellung.

Jeder dieser Körper ist der dritte Teil des zugehörigen Cylinders bezw. Prismas.

47) In ähnlicher Weise kann man auch mit höheren Graden

Fig. 90.

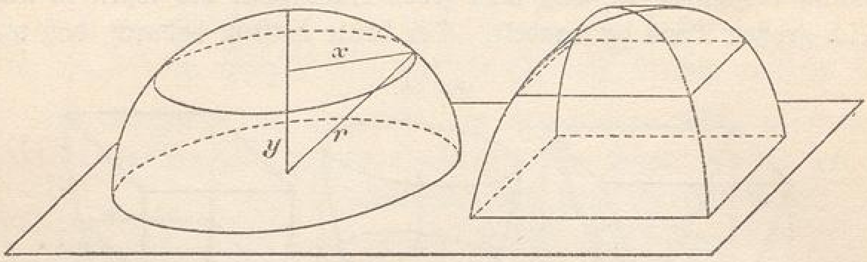
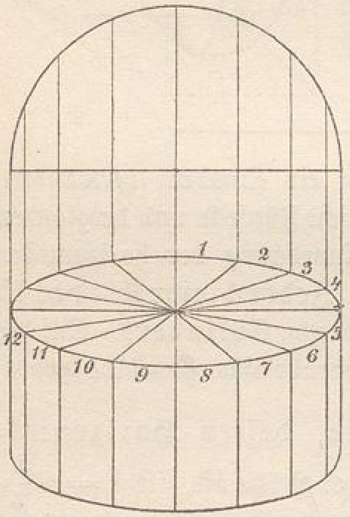


Fig. 91.



verfahren und auch von der Querschnittsfläche

$$q = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots$$

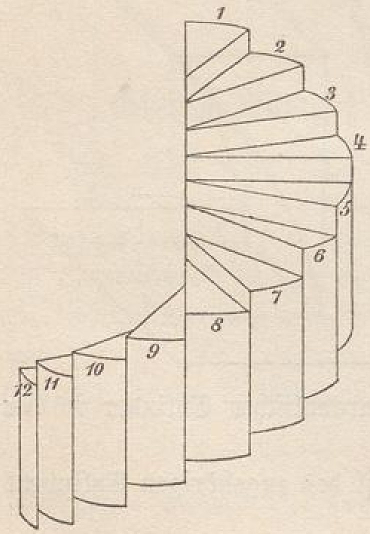
gruppenweise zusammenfassen.

So ist z. B. die Halbkugel ein Körper, dessen Querschnitt ist:

$$q = x^2\pi = r^2\pi - y^2\pi.$$

Man kann die Konstruktion eines Körpers verlangen, der in gleichen Höhen dieselben Querschnitte hat, wobei jedoch die letzteren z. B. regelmäßige Vielecke, etwa Quadrate, sein sollen. Dann entstehen elliptische Begrenzungen und Körper desselben Inhalts, wie die Kugel. Durch konstante Verkürzung bezw. Verlängerung kann man die elliptischen Cylinderflächen in kreiscylindrische verwandeln. Dadurch erhält man einige der gebräuchlichen Gewölbeformen, deren Inhalt also mit dem eines entsprechenden halben Drehungsellipsoids übereinstimmt. Dies sind die sogenannten Klostergewölbe. (Siehe unten Abschnitt V.)

Fig. 92.



48) Eine besondere Art der Anwendung des Princips von Cavalieri hat man noch bei den Schraubengewinden.