Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

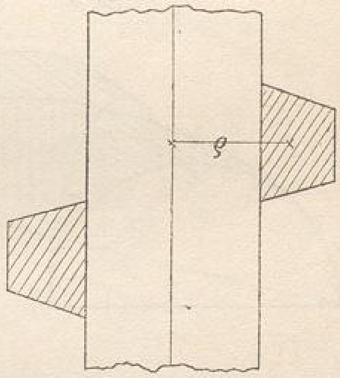
V. Einige Gewölbeformen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Man denke sich einen Cylinder in zahlreiche gleiche Sektoren geteilt. Jedem der Sektoren gebe man an der Achse eine solche Steigung, daß eine regelrechte Stufentreppe entsteht, von der in der Figur 92 ein Teil gezeichnet ist. Denkt man sich die Anzahl der Sektoren unendlich groß, so erhält man die parallelperspektivische Darstellung eines Schraubengewindes. Da aber jeder Sektor nur verschoben worden ist, so muß der Inhalt für jeden Umgang des Gewindes gleich dem Cylinder sein.

Folglich allgemeiner: Für jeden Umgang eines Schraubengewindes ist der Inhalt gleich dem des entsprechenden Guldinschen Rotationskörpers.

Fig. 93.



49) Man zeichnet die Schraubengewinde in der Regel nur im orthographischen Aufriß. Läßt man z. B. durch ein Trapez ein Gewinde bilden, so ist der Gewindekörper für jeden Umgang vom Inhalte $J = 2\varrho\pi F$, wo F die erzeugende Fläche, ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Dasselbe gilt vom Dreiecksgewinde, vom konvexen und koncaven Halbkreisgewinde, von beiden Arten elliptischer Gewinde u. s. w. Die Anfertigung der entsprechenden Zeichnungen giebt eine lehrreiche Übung. (Vergl. Einführung Figur 76 bis 80.)

V. Einige Gewölbeformen.

50) Figur 94 stellt das kreisbogenförmige Tonnengewölbe dar. Das Rechteck ABB_1A_1 ist die Grundfläche, der cylindrische Mantel die Laibungsfläche, ABC die Stirnfläche, $AB = d = 2r$ die Spannweite, $MC = r$ die Pfeilhöhe, $CC_1 = b$ die Scheitellinie, BB_1 und AA_1 sind die Widerlagslinien, A, B, B_1, A_1 sind Widerlagspunkte.

Fig. 94.

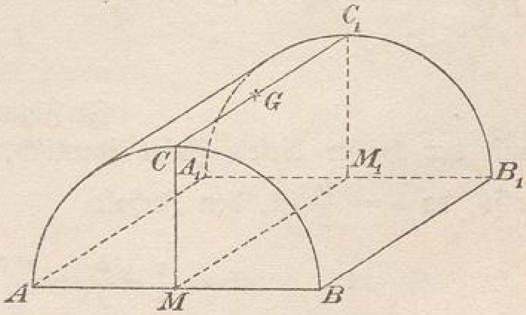
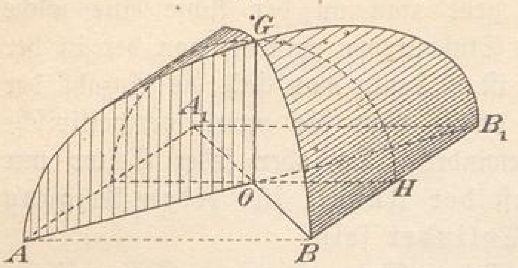


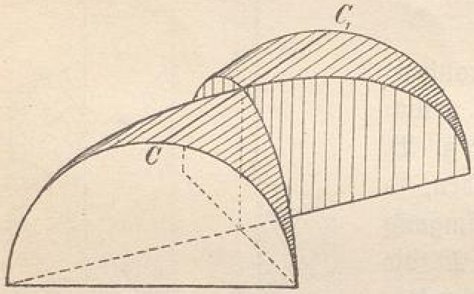
Fig. 95.



Der Gewölberaum, die verschiedenen Flächen und Kanten sind leicht zu berechnen.

51) Legt man durch die Diagonalen AB_1 und A_1B senkrechte Ebenen, so wird das Tonnengewölbe in vier Teile zerlegt, von denen je zwei kongruent sind. In Figur 95 und 96 sind je zwei kongruente Teile besonders dargestellt.

Fig. 96.

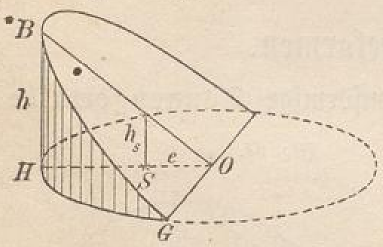


Die eine Gruppe hat nur einen Scheitelpunkt G. Diese beiden Teile heißen Gewölbewangen. Die andere hat eine Scheitellinie CC_1, diese Teile heißen Gewölbekappen.

52) **Aufgabe.** Den Gewölberaum und die Laibungsfläche einer Wange zu berechnen.

Figur 97 stellt den Cylinderhuf über einem Halbkreise dar. Ist S der Schwerpunkt der Grundfläche und h_s die zugehörige Höhe, so ist der Körperinhalt $J = \frac{r^2\pi}{2} h_s$. Nun ist aber $h_s : h = e : r$, also $h_s = h\frac{e}{r}$, und zwar ist $OS = e = \frac{4r}{3\pi}$ (nach Guldin), folglich

Fig. 97.



$$J = \frac{r^2\pi}{2} \cdot \frac{h}{r}\frac{4r}{3\pi} = \frac{2}{3}r^2 h.$$ $\frac{1}{3} r^3$

In Figur 95 ist der Gewölbeteil $OHGB$ mit der Hälfte dieses Hufes identisch, der ganze Gewölberaum hat also, da $h = \frac{b}{2}$ ist, den Inhalt

$$J = \frac{2}{3} r^2 \frac{b}{2} = \frac{r^2 b}{3} = \frac{d^2 b}{12}.$$

Der Mantel des Hufes ist $r\pi h'_s$, wenn h'_s die zum Schwer=

punkte S' des Halbkreisbogens gehörige Höhe ist. Hier ist $h'_s : h = e' : r$, also $h'_s = h\frac{e'}{r}$. Da aber nach Guldin $e = \frac{2r}{\pi}$ ist, so ist Mantel $M = r\pi\frac{h}{r}\,\frac{2r}{\pi} = 2rh$. Die Hälfte davon entspricht der Hälfte der gesuchten Laibungsfläche, die ganze Laibungsfläche ist also

$$F = 2r\frac{b}{2} = rb = \frac{db}{2}.$$

53) **Aufgabe.** Gewölberaum und Laibungsfläche einer Kappe zu berechnen.

Auflösung. Der Raum der Doppelkappe ist gleich dem Tonnenraum vermindert um die Doppelwange, also gleich

$$\frac{r^2\pi}{2}b - \frac{2}{3}r^2b = \frac{r^2b}{6}[3\pi - 4].$$

Der Raum der einfachen Kappe mit Scheitellinie $\frac{b}{2}$ ist also

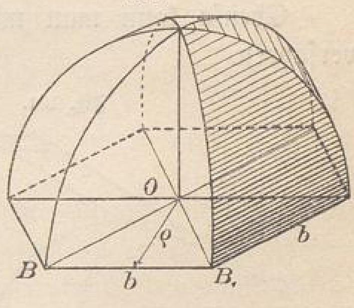
$$J = \frac{r^2b}{12}[3\pi - 4] = \frac{d^2b}{48}[3\pi - 4].$$

Ebenso ist es mit der doppelten Laibungsfläche. Sie ist $r\pi b - 2rb = rb(\pi - 2)$, also ist die einfache Laibungsfläche mit Scheitellinie $\frac{b}{2}$

$$F = \frac{rb}{2}(\pi - 2) = \frac{db}{4}(\pi - 2).$$

54) Das schon früher besprochene regelmäßige Klostergewölbe hat cylindrische Wölbung, so daß die Mittellinien der Wölbungen Halbkreisbogen sind.

Fig. 98.



Es besteht also aus n Wangen über dem regelmäßigen n-Eck. Jede Wange hat den Raum $\frac{\varrho^2 b}{3}$, wenn ϱ der an Stelle von r tretende Radius des einbeschriebenen Kreises ist. Der Gesamtraum ist also

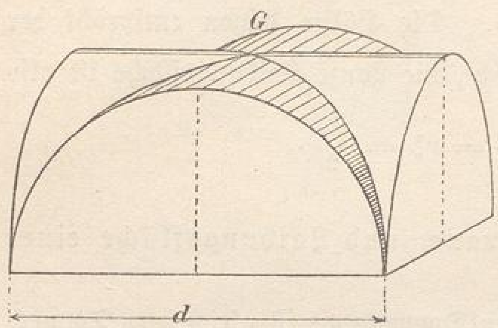
$$J = \frac{n\varrho^2 b}{3}.$$

Ebenso ist es mit der gesamten Laibungsfläche. Sie ist

$$F = n\varrho b.$$

55) Figur 99 stellt das quadratische Kreuzgewölbe dar, bei dem vier kongruente Kappen mit Scheitellinie $\frac{b}{2}$ regelrecht zusammenstoßen.

Fig. 99.



Der Gewölberaum ist $\frac{4d^2b}{48}[3\pi - 4]$, oder, da $b = d$ ist,

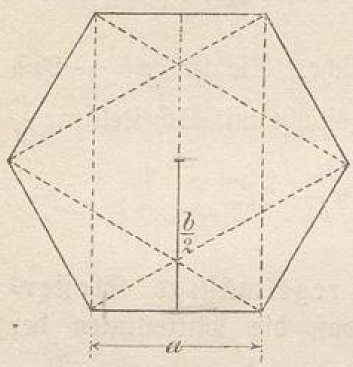
$$J = \frac{d^3}{12}[3\pi - 4].$$

Die gesamte Laibungsfläche ist

$$F = \frac{4db}{4}(\pi - 2) = d^2(\pi - 2).$$

56) Ist die Grundfläche des regelmäßigen Kreuzgewölbes ein Sechseck, so handelt es sich um 6 Kappen, jede vom Inhalte $\frac{a^2b}{48}[3\pi - 4]$, oder, da $\frac{b}{2} = a$ ist, vom Inhalte $\frac{a^3}{24}[3\pi - 4]$. Der Gesamtinhalt ist

Fig. 100.



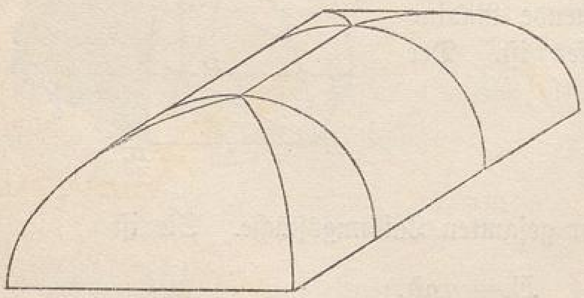
$$J = \frac{a^3}{4}[3\pi - 4].$$

Die Laibungsfläche jeder Kappe ist $\frac{ab}{4}(\pi - 2) = \frac{a^2}{2}(\pi - 2)$, die gesamte Fläche der Wölbung also

$$F = 3a^2(\pi - 2).$$

Ebenso kann man mit dem achtseitigen u. s. w. Kreuzgewölbe verfahren.

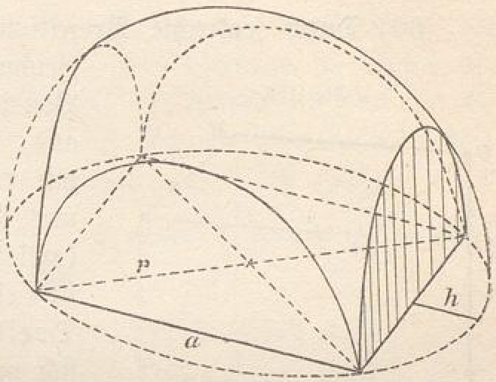
Fig. 101.



57) Setzt man an ein Tonnengewölbe die beiden Hälften eines quadratischen Klostergewölbes an, so erhält man das Muldengewölbe (Figur 101), dessen Berechnung ein einfaches Übungsbeispiel darbietet.

58) Die quadratische Hängekuppel entsteht, wenn man der Basis einer Halbkugel ein Quadrat einbeschreibt und durch die Seiten desselben senkrechte Schnittebenen legt.

Fig. 102.



Der Inhalt wird gefunden, indem man von dem Halbkugelinhalte $\frac{2}{3} r^3 \pi$ vier Halbsegmente oder zwei ganze Segmente von der Pfeilhöhe

$$h = r - r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = r\left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$

abzieht. Der ganze Segmentinhalt ist

$$\frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{\pi r^2 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{3}\left[3r - r + r\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{r^3\pi}{3}\left(\tfrac{3}{2} - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\left(2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \frac{r^3\pi}{6}\left[4 - 5\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right].$$

Abzuziehen ist also $\frac{r^3\pi}{6}[8 - 5\sqrt{2}]$. Der Gewölberaum ist demnach

$$\tfrac{4}{6} r^3\pi - \frac{r^3\pi}{6}[8 - 5\sqrt{2}] = \frac{r^3\pi}{6}[5\sqrt{2} - 4].$$

Setzt man $a = r\sqrt{2}$ ein, so erhält man

$$J = \frac{a^3\pi}{12}[5 - 2\sqrt{2}].$$

Die Laibungsfläche ist gleich der Kugelfläche vermindert um vier Halbkalotten oder um zwei Kalotten, also gleich

$$2r^2\pi - 2 \cdot 2r\pi\left[r - r\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right] = r^2\pi[2 - 4 + 2\sqrt{2}]$$
$$= r^2\pi[2\sqrt{2} - 2] = 2r^2\pi[\sqrt{2} - 1].$$

Setzt man $a = r\sqrt{2}$ ein, so folgt $a^2\pi(\sqrt{2} - 1)$.

59) Auf die Darstellung anderweitiger Gewölbeformen kann hier verzichtet werden, nur sei kurz bemerkt, daß an Stelle des Kreiscylinders überall der elliptische Cylinder treten kann, den man durch konstante Verkürzung der Senkrechten erhält. Auf gewisse parabolische Wölbungen war schon früher hingewiesen. Die Berechnungen machen keine Schwierigkeit.