Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

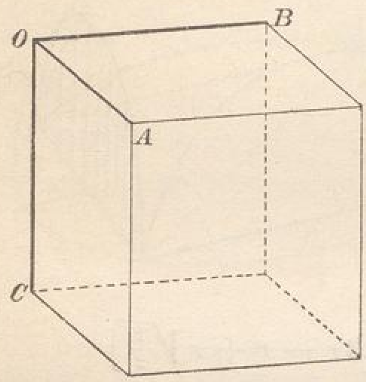
VI. Die grundlegenden Aufgaben der orthographischen Axonometrie

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

VI. Die grundlegenden Konstruktionen der orthographischen Axonometrie.

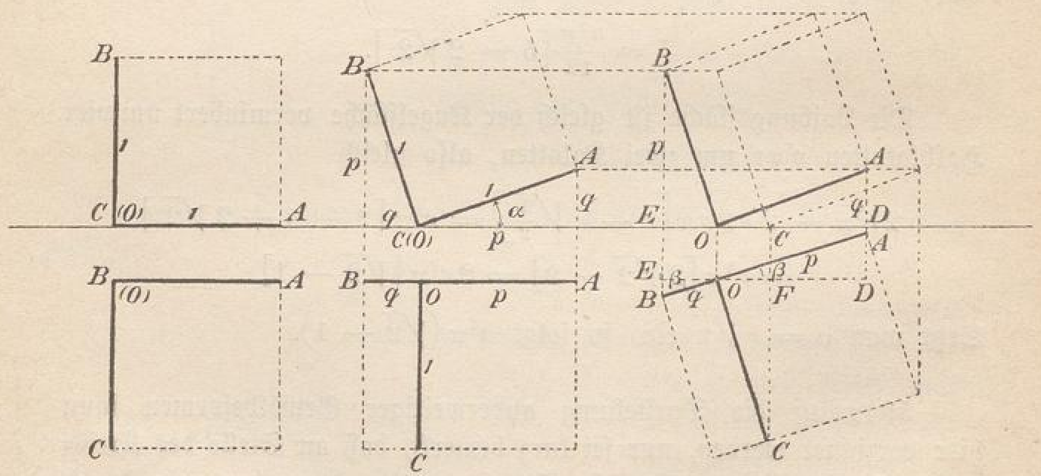
60) Durch senkrechte Projektion des Würfels erhält man eine Zeichnung nach Art von Figur 103. Von jeder Ecke gehen drei Kantenlinien aus, die, abgesehen vom Vorzeichen, mit OA, OB und OC nach Länge und Richtung übereinstimmen. Man bezeichnet drei solche Kanten, sobald sie einem Würfel angehören, als Dreibein oder Dreikant. Es wird sich nun zeigen, daß, wenn OA und OB nach Länge und Richtung gegeben sind, OC nach Länge und Richtung konstruiert werden kann, also nicht mehr willkürlich ist. Die Strecken OA, OB und OC müssen also in einer bestimmten Beziehung stehen.

Fig. 103.



61) Man findet diese Beziehung, wenn man den Würfel von der einfachsten Lage aus erst im Aufriß um einen Winkel α, dann im Grundriß um einen Winkel β dreht. (Vergl. Teil II Figur 138.)

Fig. 104.



Die in der zweiten und dritten Lage (Figur 104) mit p und q bezeichneten Stücke haben, wenn man die Würfelkante gleich 1 setzt, absolut genommen sämtlich die Länge $p = \cos \alpha$ bezw. $q = \sin \alpha$.

In der dritten Lage ist $OD = p \cos\beta = \cos\alpha \cos\beta$ (vergl. Grundriß), $OE = q \cos\beta = \sin\alpha \cos\beta$, und im Grundriß $OF = 1 \cdot \sin\beta$, also im Aufriß $OC = \sin\beta$.

62) Man betrachte nun im Aufriß der dritten Lage O als den Nullpunkt des Koordinatensystems und betrachte im Sinne der Komplexentheorie (Teil II, Abschnitt VII der Arithmetik) OA als die Summe von OD und DA, OB als die Summe von OE und EB. Dann hat man, wenn $\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird, nach Obigem:

$$OA = \cos\alpha\cos\beta + i\sin\alpha,\quad OB = -\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha,\quad OC = \sin\beta.$$

Die Quadrate der Strecken sind:

$$OA^2 = \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta,$$
$$OB^2 = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha - 2i\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta,$$
$$OC^2 = \sin^2\beta.$$

Die Summe der Quadrate der drei Strecken ist also gleich

$$\cos^2\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) + \sin^2\beta - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1 - 1 = 0.$$

Folglich:

Sind die von einem Punkte O ausgehenden Kanten OA, OB und OC Würfelkanten in senkrechter Projektion, so ist die Summe der Quadrate dieser Strecken gleich Null.

(Faßt man die Quadrate der Strecken im Sinne der Mechanik als Kräfte auf, so handelt es sich um drei im Gleichgewicht stehende Kräfte.)

Dies ist der Gaußsche Fundamentalsatz der orthographischen Axonometrie, von dem sich jedoch nur im Nachlasse, Bd. II, S. 309, seiner Werke eine kurze Notiz befindet.

63) **Bemerkungen.** Man hätte im Aufriß noch eine vierte Lage nehmen können, indem man z. B. um einen Winkel γ drehte. Dadurch wäre jede Strecke noch mit dem Drehungsfaktor $(\cos\gamma + i\sin\gamma)$ multipliziert worden, ihr Quadrat wäre also mit $(\cos\gamma + i\sin\gamma)^2 = (\cos 2\gamma + i\sin 2\gamma)$ versehen worden. Die Summe der Quadrate hätte also wiederum Null ergeben.

Die Umkehrung würde lauten: Ist bei einem Dreibein die Summe der Streckenquadrate gleich Null, so kann es als orthographische Projektion von drei Würfelkanten gedeutet werden.

64) Es fragt sich, ob man aus dem Aufriß der Lage 3 die wahre Länge der Kanten sofort erkennen kann. Dies ist der Fall, denn es ist für diese Lage $q = \sin\alpha$, $p = \cos\alpha$, also $p^2 + q^2 = 1^2$, folglich:

Fällt man bei dem orthographischen Dreibein von dem Endpunkte zweier Kanten aus Lote auf das Bild der dritten Kante, so geben diese Lote, pythagoreisch addiert, die wahre Länge der Würfelkante.

Fig. 105.

Die Hälfte dieser Hypotenuse würde den Radius der dem Würfel einbeschriebenen Kugel geben.

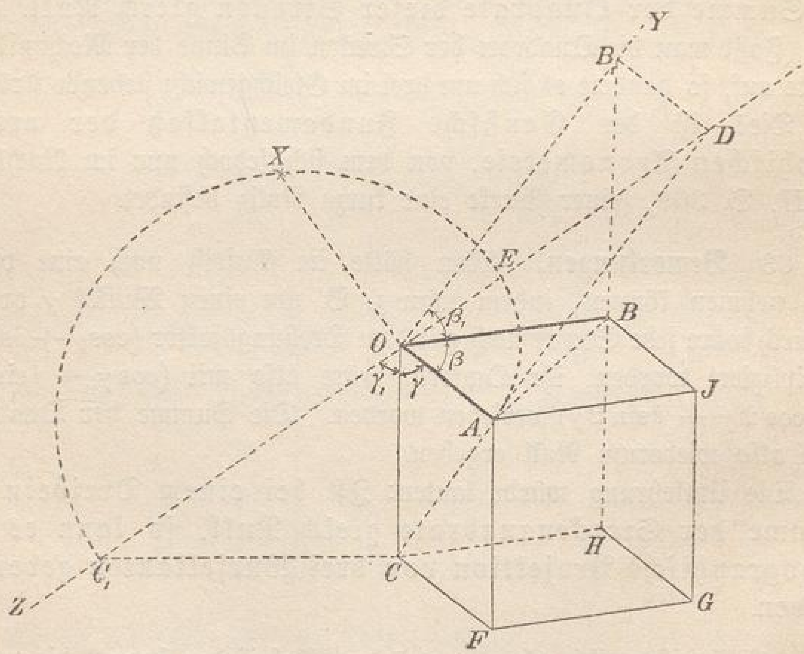
Der Durchmesser der umbeschriebenen Kugel ist $\sqrt{3}$, was nach Figur 105 z. B. pythagoreisch konstruiert werden kann. Die Hälfte ist der Radius dieser Kugel.

Schlägt man um den leicht zu konstruierenden Mittelpunkt des Würfels Kreise mit den entsprechenden Radien, so sind die beiden Kugeln korrekt dargestellt.

Jetzt ist die Lösung folgender vier Fundamentalaufgaben mit Benutzung einer einzigen Zeichnungsebene (z. B. Aufriß) möglich.

65) **Aufgabe 1.** Von einem orthographischen Dreibein seien die Kanten OA und OB nach Länge und Richtung gegeben. Die Würfelzeichnung soll fertig konstruiert werden.

Fig. 106.



Auflösung. Man lege den Winkel $AOB = \beta$ in O an OB an, den Winkel OAB in B an dieselbe Gerade, so daß $\triangle\, OBB_1$

$\sim \triangle OAB$ wird. Aus OA und OB_1 bilde man das Parallelogramm $OADB_1$, ziehe dessen Diagonale DB und verlängere sie über O hinaus um sich selbst, was C_1 giebt. Man halbiere den Winkel AOC_1, dann erhält man die Richtung der dritten Kante. Macht man ihre Länge gleich der mittleren Proportionale zwischen OA und OC_1, so ist OC vollständig bestimmt. Die Würfelzeichnung ist leicht zu vollenden.

Beweis. Faßt man OA als die reelle Strecke 1 oder auch 1^2 auf, so ist nach Obigem OB_1 das Quadrat der Strecke OB nach Länge und Richtung. Ist nämlich $OB = r(\cos\beta + i\sin\beta)$, so ist $OB_1 = r^2(\cos\beta + i\sin\beta)^2 = r^2(\cos 2\beta + i\sin 2\beta)$. In derselben Weise ist OC_1 das Quadrat von OC. Da aber $C_1O = OD$ die Diagonale des Parallelogramms ist, so ist die Summe der Strecken OA_1, OB_1 und OC_1 = Null. Folglich bilden ihre Quadratwurzeln OA, OB und OC ein orthographisches Dreibein.

Bemerkung. Statt den concaven Winkel AOC_1 zu halbieren, konnte man es auch mit dem convexen Winkel thun, dann wäre OC entgegengesetzt entstanden, was dem zweiten Wurzelwerte entspricht.

Die beiden Lösungen sind im übrigen nicht von einander verschieden. Jede läßt zwei Deutungen zu, je nachdem man A oder H als vornliegend auffaßt.

In der Konstruktion lassen sich einige Linien ersparen, die des Beweises wegen mit gezeichnet sind.

[Selbstverständlich kann man OC auch durch Berechnung finden. Es ist nämlich

$$OB_1 = \frac{OB^2}{OA}, \quad OD = \sqrt{OB_1^{\,2} + OA^2 + 2OB_1 \cdot OA \cdot \cos 2\beta},$$
$$OC = \sqrt{OA \cdot OD}, \quad \sin AOD = \frac{OB_1}{OD}\sin 2\beta,$$

endlich Winkel γ die Hälfte des zugehörigen Supplementwinkels AOC_1.]

66) **Aufgabe 2.** OA sei nach Länge und Richtung gegeben, die Kanten OB und OC nur der Länge nach. Die Würfelzeichnung soll vollendet werden.

Auflösung. Man konstruiere die Länge OB^2 und OC^2 mit Hülfe der Proportionen

$$OA : OB = OB : x \quad \text{und} \quad OA : OC = OC : x_1,$$

wo $OA = 1$ gesetzt ist. Aus $OA = 1^2$, $OB_1 = OB^2$ und $OC_1 = OC^2$ konstruiere man das Parallelogramm $OADB_1$ nebst Diagonale. Halbierung des Winkels AOB_1 giebt die Richtung von OB, Halbierung des Nebenwinkels AOC_1 von AOD giebt die Richtung von OC, u. s. w.

67) **Aufgabe 3.** OA sei nach Länge und Richtung gegeben, die Kanten OB und OC nur der Richtung nach. Die Würfelzeichnung ist zu vollenden.

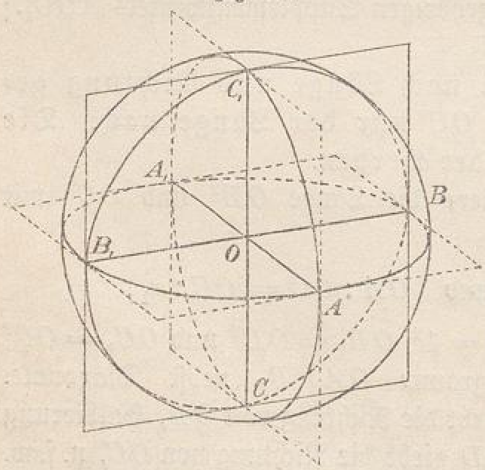
Auflösung. Man verdoppele die gegebenen Winkel β und γ. Dadurch erhält man die Richtung der Seite OB_1 und der Diagonale OD des Parallelogramms $OADB_1$, welches leicht zu vollenden ist. Die mittlere Proportionale zwischen OA und OB_1 giebt die Länge von OB, die mittlere Proportionale zwischen OA und OC_1 die Länge von OC.

68) **Aufgabe 4.** OA sei nach Länge und Richtung gegeben, von der Kante OB die Länge, von der Kante OC die Richtung. Die Würfelzeichnung ist zu vollenden.

Auflösung. Verdoppelung des gegebenen Winkels γ giebt wieder die Diagonalrichtung des zu konstruierenden Parallelogramms $OADB_1$, welches dadurch vollendet wird, daß man um A einen Bogen mit OB^2 schlägt. Letzteres ist, wie vorher, mit Hülfe der Proportion $OA : OB = OB : x$ zu konstruieren. Ist das Parallelogramm vollendet, so giebt die Halbierung des Winkels AOB_1 die Richtung von OB. Die Länge von OC ergiebt sich als mittlere Proportionale zwischen OA und der Diagonale OD.

69) **Übungs-Aufgaben.** Ist der Würfel in allgemeiner Lage konstruiert, so kann man nach Obigem die ein- und die umbeschriebene Kugel durch den entsprechenden Kreis darstellen. Man kann ihm ein Tetraeder oder Oktaeder einbeschreiben, ein Pentagondodekaeder um ihn legen, ein Ikosaeder aus dem letzteren ableiten und so auch diese Gestalten direkt in allgemeiner Lage darstellen, ohne zwei Ebenen zu benutzen. Auch das Trapezoeder und das Diamantoeder lassen sich aus dem zum Achsenkreuze vervollständigten Dreibein ableiten, überhaupt sämtliche Krystallformen mit senkrecht aufeinander stehenden Achsen.

Fig. 107.



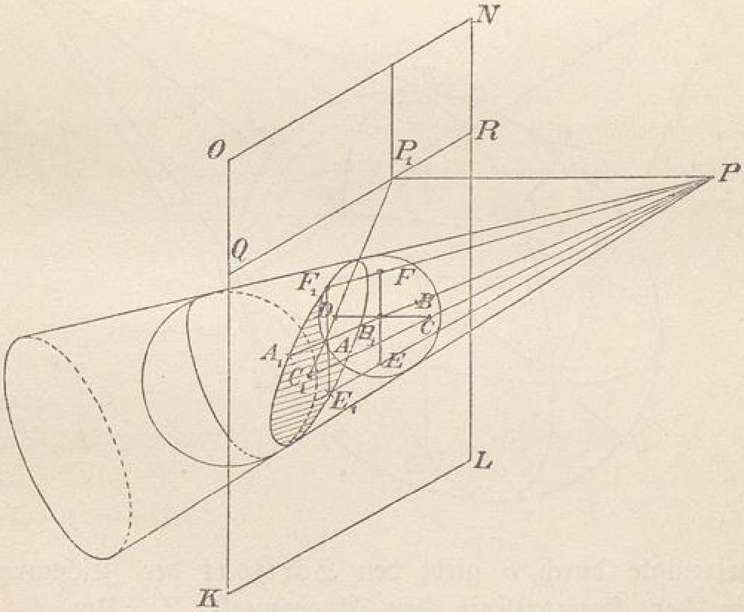
70) Schlägt man um die Ecke des Dreibeins einen Kreis mit der wirklichen Kantenlänge,

die nach dem Obigen zu konstruieren ist, so erkennt man die Möglichkeit der korrekten Konstruktion sphärischer Dreiecke mit Bogen von je 90^0, d. h. der Kugeloktanten in allgemeiner Lage. Man braucht AA_1, BB_1 und CC_1 nur als Mittellinien gewisser Parallelogramme zu betrachten, denen die entsprechenden Ellipsen einzubeschreiben sind. Die letzteren lassen sich nach Pascal oder Brianchon sogar ohne Hülfe des Zirkels konstruieren. Vergl. z. B. Figur 8.

VII. Die Kugel in centralperspektivischer Projektion.

71) $KLNO$ sei eine senkrechte Ebene, auf der eine Berührungskugel liegt. In P befinde sich das Auge, so daß die Projektion P_1 von P der Augenpunkt und die Horizontale QR der Horizont ist. Der von P aus an die Kugel gelegte Berührungskegel schneidet die Ebene in einem Kegelschnitte, z. B. in einer Ellipse, die als Projektion

Fig. 108.



der Kugel zu betrachten ist. Die Kugel ist die eine Daudelinsche Berührungskugel, berührt also die Ebene im Brennpunkte D der Ellipse. Ist DC ein Lot auf der Ebene und C der Schnittpunkt desselben mit der Kugel, so giebt, wie die zweite Berührungskugel zeigt, PC den anderen Brennpunkt C_1 der Ellipse. Die durch P und DC ge-