Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

I. Vorbemerkungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Dritte Abteilung.
Sphärische Trigonometrie.

I. Vorbemerkungen.

1) Die sphärische Trigonometrie beschäftigt sich mit den von größten Kreisen auf der Kugelfläche gebildeten Dreiecken. Es handelt sich darum, in ähnlicher Weise wie in der ebenen Trigonometrie, zwischen den Seiten und den Winkeln und der Fläche Beziehungen aufzustellen, die es ermöglichen, alle Elemente des Dreiecks aus gegebenen Stücken zu berechnen. Einiges davon ist schon in Teil II (Stereometrie Nr. 50 und Anhang 1) zur Sprache gekommen. Auch die Lehre von den dreikantigen Ecken gehört hierher, denn die nach den Ecken eines Kugeldreiecks gezogenen Radien bilden solche Ecken. Die Lehre von der Kongruenz und Symmetrie der Dreikant-Ecken findet hier ihren Abschluß.

Die ebene Trigonometrie muß als besonderer Fall in der sphärischen enthalten sein. Denkt man sich nämlich bei endlichem Radius die sphärischen Dreiecke unendlich klein, so ist ihre Krümmung eine verschwindend kleine. Dasselbe ist der Fall, wenn man sich bei sphärischen Dreiecken von endlicher Größe den Kugelradius unendlich groß denkt. Auf das Ineinanderübergehen der Formeln für Kugel und Ebene soll stets aufmerksam gemacht werden.

Die Ecken der sphärischen Dreiecke mögen stets mit A, B, C, die zugehörigen Winkel mit α, β, γ, die gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c bezeichnet werden.

Dreiecke mit überstumpfen Winkeln ($> 180^0$) und mit Bogen, die größer als $r\pi$ sind, sollen ausgeschlossen werden, denn an ihrer Stelle können konvexe Nebendreiecke behandelt werden, die also den Bedingungen ($< 180^0$ bezw. $< r\pi$) genügen. Im allgemeinen geben nämlich drei größte Kugelkreise acht Dreiecke (vergl. Figur 154 in Teil II), unter denen geeignete aufzufinden sind.

Die Entwickelungen werden besonders einfach, wenn man den Kugelradius $r = 1$ setzt. Aus Gründen der Anschaulichkeit soll dies im Anfange unterlassen werden. Ist es nötig, den zum Radius r gehörigen Bogen von dem zum Radius 1 gehörigen zu unterscheiden, so soll im letzteren Falle statt a, b, c geschrieben werden $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$.

Unter Dreieck soll hier stets ein sphärisches Dreieck verstanden werden.

2) Die Figuren machen nur dann einen wirklich körperlichen Eindruck, wenn man die ganze Kugel mitzeichnet.

Da die Kugel bei der senkrechten Projektion stets als Kreis erscheint, bei der Schrägprojektion dagegen als Ellipse, so ist es hier zweckmäßig, von der letzteren Darstellungsweise abzugehen und die erstere zu wählen.

Die größten Kreise der Kugel erscheinen als Ellipsen, die sich dem Grenzkreise der Figur berührend anschmiegen, also nicht derartig auf ihn treffen, daß die Verlängerung den Grenzkreis schneiden würde. Mit Ausnahme der als gerade Linien erscheinenden Kreise, die senkrecht auf den Grenzkreis treffen, bilden sämtliche im Bilde mit dem Grenzkreise den Winkel Null, möge der wirkliche Schnittwinkel so groß sein, wie er wolle. Sollen die Schnittwinkel der Seiten sphärischer Dreiecke sichtbar werden, so hat man den Grenzkreis als Dreiecksseite zu vermeiden.

II. Rechtwinklige sphärische Dreiecke.

3) Figur 110 stellt eine Kugel mit drei größten Kreisen dar. Man denke sich Kreis I als Meridian, der durch den obersten Punkt O und den untersten Punkt U geht, den Kreis II als den horizontalen Äquator, so daß der Schnitt bei C einen rechten Winkel giebt. Dagegen habe Kreis III eine beliebige schräge Lage. Dann ist ABC ein sphärisches Dreieck, und zwar ein rechtwinkliges, bei dem man die

Fig. 110.