Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

II. Rechtwinklige sphärische Dreiecke

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Die Entwickelungen werden besonders einfach, wenn man den Kugelradius $r = 1$ setzt. Aus Gründen der Anschaulichkeit soll dies im Anfange unterlassen werden. Ist es nötig, den zum Radius r gehörigen Bogen von dem zum Radius 1 gehörigen zu unterscheiden, so soll im letzteren Falle statt a, b, c geschrieben werden $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$.

Unter Dreieck soll hier stets ein sphärisches Dreieck verstanden werden.

2) Die Figuren machen nur dann einen wirklich körperlichen Eindruck, wenn man die ganze Kugel mitzeichnet.

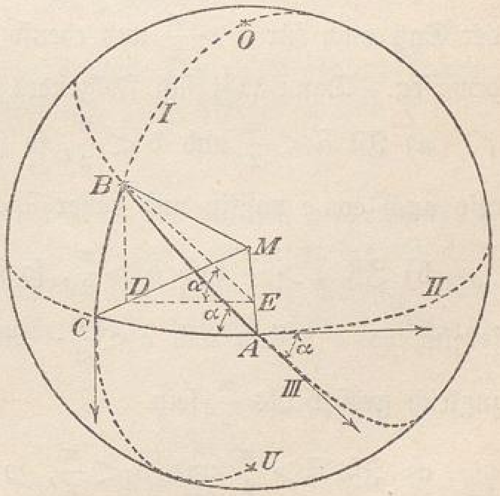
Da die Kugel bei der senkrechten Projektion stets als Kreis erscheint, bei der Schrägprojektion dagegen als Ellipse, so ist es hier zweckmäßig, von der letzteren Darstellungsweise abzugehen und die erstere zu wählen.

Die größten Kreise der Kugel erscheinen als Ellipsen, die sich dem Grenzkreise der Figur berührend anschmiegen, also nicht derartig auf ihn treffen, daß die Verlängerung den Grenzkreis schneiden würde. Mit Ausnahme der als gerade Linien erscheinenden Kreise, die senkrecht auf den Grenzkreis treffen, bilden sämtliche im Bilde mit dem Grenzkreise den Winkel Null, möge der wirkliche Schnittwinkel so groß sein, wie er wolle. Sollen die Schnittwinkel der Seiten sphärischer Dreiecke sichtbar werden, so hat man den Grenzkreis als Dreiecksseite zu vermeiden.

II. Rechtwinklige sphärische Dreiecke.

3) Figur 110 stellt eine Kugel mit drei größten Kreisen dar. Man denke sich Kreis I als Meridian, der durch den obersten Punkt O und den untersten Punkt U geht, den Kreis II als den horizontalen Äquator, so daß der Schnitt bei C einen rechten Winkel giebt. Dagegen habe Kreis III eine beliebige schräge Lage. Dann ist ABC ein sphärisches Dreieck, und zwar ein rechtwinkliges, bei dem man die

Fig. 110.



Bogen a und b als Katheten, c als Hypotenuse bezeichnen darf. An der Figur ist noch Folgendes zu beachten: B ist senkrecht nach unten auf die Äquatorebene projiziert, was den Punkt D auf dem Radius MC gegeben hat. Außerdem ist von B aus das Lot BE auf den Radius MA gefällt, so daß BED ein senkrecht stehendes rechtwinkliges Dreieck ist, welches den Neigungswinkel α' der Geraden BE gegen die Äquatorialebene enthält. Denselben Neigungswinkel geben aber auch die in A berührenden Tangenten der sich in A schneidenden Kreise an, denn ED und EB sind zu diesen Tangenten parallel, und so ist $\alpha' = \alpha$.

Nach diesen Vorbereitungen sollen die Hauptaufgaben über das rechtwinklige Kugeldreieck gelöst werden. Dabei mögen die Winkel BMC, CMA und AMB als a, b, c bezeichnet, also durch den Bogen gemessen werden.

4) **Aufgabe.** Aus den Katheten a und b die Hypotenuse c zu berechnen.

Auflösung. Es ist

$$\cos c = \cos BME = \frac{ME}{MB} = \frac{MD \cdot \cos DME}{MB} = \frac{MD \cdot \cos b}{MB}$$

$$= \frac{(MB \cdot \cos DMB) \cos b}{MB} = \cos a \cdot \cos b.$$

Also:

1) $$\mathbf{\cos c = \cos a \cdot \cos b}.$$

Bei der Schreibweise $\lg \cos^2 c = \lg \cos^2 a + \lg \cos^2 b$ fällt eine gewisse Analogie mit dem Satze des Pythagoras besser ins Auge. Der Satz ist leicht in Worten auszudrücken.

Bemerkungen. Durch eine geringe Änderung der Figur läßt sich der Satz auch für $\widehat{a} > \frac{\pi}{2}$ und ebenso für $\widehat{a} > \frac{\pi}{2}$ und zugleich $\widehat{b} > \frac{\pi}{2}$ beweisen. Dann läßt sich Folgendes aussprechen:

a) Ist $\widehat{a} < \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{b} < \frac{\pi}{2}$, so sind die beiden Faktoren positiv, also auch $\cos c$ positiv und daher $\widehat{c} < \frac{\pi}{2}$.

b) Ist $\widehat{a} > \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{b} > \frac{\pi}{2}$, so sind die beiden Faktoren negativ, folglich $\cos c$ positiv und $\widehat{c} < \frac{\pi}{2}$. Also können nicht alle drei Bogen zugleich größer als $\frac{\pi}{2}$ sein.

c) Ist $\widehat{a} > \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{b} < \frac{\pi}{2}$, so ist $\cos c$ negativ und $\widehat{c} > \frac{\pi}{2}$.

d) Ist einer der Bogen a und b gleich $\frac{\pi}{2}$, so ist einer der Faktoren Null, folglich auch $\cos c = 0$, d. h. auch $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Das Dreieck ist gleichschenklig und bildet ein halbes Meridianzweieck.

e) Ist $\widehat{a} = \frac{\pi}{2}$ und $\widehat{b} = \frac{\pi}{2}$, so sind beide Faktoren gleich Null, folglich auch $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Das Dreieck ist gleichseitig und bildet einen Oktanten der Kugel.

Anwendung. Wie groß ist auf der Erdoberfläche die sphärische Entfernung eines Punktes B von a^0 nördlicher Breite von einem Punkte A des Äquators, wenn der Unterschied der geographischen Länge b^0 beträgt?

Auflösung. Aus $\lg \cos a^0 + \lg \cos b^0$ bestimmt man $\lg \cos c^0$, sucht c^0 mit Hülfe der Tafeln auf und multipliziert die Anzahl der Grade mit 15, was die Zahl der Meilen für c giebt. — Handelt es sich um einen Weltkörper vom Radius r, so bestimmt man $\widehat{c}$ aus der Proportion $c^0 : 180^0 = \widehat{c} : \pi$ als $\widehat{c} = \pi \frac{c^0}{180^0}$, so daß der sphärische Abstand als $r\widehat{c} = r\pi \frac{c^0}{180^0}$ gefunden wird.

5) **Aufgabe.** Einen Dreieckswinkel aus der Gegenkathete und der Hypotenuse zu berechnen.

Auflösung. In Figur 110 ist

$$\sin \alpha = \sin \alpha' = \frac{DB}{EB} = \frac{MB \cdot \sin a}{MB \cdot \sin c} = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

Also:

$$2) \qquad \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Auch bei dem ebenen rechtwinkligen Dreiecke führen Gegenkathete und Hypotenuse auf den Sinus des Winkels. Für kleines a und c wird auch hier $\sin \alpha = \frac{a}{c}$.

Anwendung. Welche Winkel hat in der vorigen geographischen Aufgabe das sphärische Dreieck? Um wieviel übertrifft die Winkelsumme den Winkel 180^0? (Sphärischer Überschuß oder Exceß.) Wie groß ist demnach die Fläche des Dreiecks? [Vergl. Teil II, Stereometrie Nr. 50:

$$F = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0} O = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{180^0} r^2 \pi$$
$$= (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi) r^2.]$$

6) **Aufgabe.** Einen Dreieckswinkel aus der anliegenden Kathete und der Hypotenuse zu berechnen.

Auflösung. In Figur 110 ist

$$\cos\alpha = \cos\alpha' = \frac{ED}{EB} = \frac{ME \cdot \tan b}{ME \cdot \tan c} = \frac{\tan b}{\tan c}.$$

Also

3) $$\cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c}, \quad \cos\beta = \frac{\tan a}{\tan c}.$$

Der Satz entspricht der Cosinus-Formel für das ebene rechtwinklige Dreieck. Für kleinen Bogen b und c wird auch hier $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

7) **Aufgabe.** Einen Dreieckswinkel aus den beiden Katheten zu berechnen.

Auflösung. Nach 2) und 3) ergiebt sich durch Division

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\tan c}{\tan b} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \frac{1}{\tan b} = \frac{\sin a}{\cos c \tan b}$$
$$= \frac{\sin a}{(\cos a \ \cos b) \tan b} = \frac{\tan a}{\cos b \ \tan b} = \frac{\tan a}{\sin b}.$$

Also

4) $$\tan\alpha = \frac{\tan a}{\sin b}, \quad \tan\beta = \frac{\tan b}{\sin a}.$$

Auch in der ebenen Trigonometrie führen die beiden Katheten auf die Tangente des Winkels. Für kleinen Bogen a und b wird auch hier $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

Aufgabe. Die Dreiecksseiten aus den Winkeln zu berechnen.

Auflösung. Aus

$$\cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

(vgl. 3) und 2)) folgt durch Division

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{\tan b}{\tan c} \cdot \frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos a \cos b}{\cos b} = \cos a,$$

also ist zunächst

5) $$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

(Für unendlich kleines a geht die Formel über in $1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ oder $\cos\alpha = \sin\beta$, was der ebenen Trigonometrie entspricht.)

Durch Multiplikation folgt aus beiden Gleichungen

$$\cos c = \cos a \cos b = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \cot \alpha \cot \beta .$$

Also:

6) $$\cos c = \cot \alpha \cot \beta .$$

(Für unendlich kleines c wird daraus $1 = \cot \alpha \cot \beta$ oder $\tan \alpha = \cot \beta$, was wiederum der ebenen Trigonometrie entspricht.)

8) Um das Gedächtnis zu unterstützen, hat Neper die sechs Grundformeln zu folgenden, aus ihnen leicht abzuleitenden, vereinigt:

7) $$\begin{cases} \cos c & = \cot \alpha \cot \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) & = \cot \beta \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin \alpha \sin c, \\ \cos \alpha & = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cot c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin \beta. \end{cases}$$

Es handelt sich dabei für jeden Cosinus um dieselben Funktionen, und zwar in folgendem Sinne: Man denke sich die Elemente a, b, c, α und β (aber $\gamma = 90^0$ ausgeschlossen) in der naturgemäßen Reihenfolge kreisförmig aufgeschrieben, statt der Katheten a und b aber ihre Supplemente $\frac{\pi}{2} - a$ und $\frac{\pi}{2} - b$ gesetzt. Jeder Cosinus ist dann gleich dem Produkte aus den Cotangenten der beiden anliegenden Stücke, aber auch gleich dem Produkte aus dem Sinus der abgetrennt liegenden Stücke.

Fig. 111.

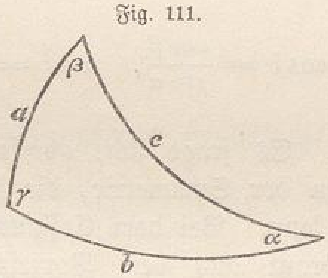
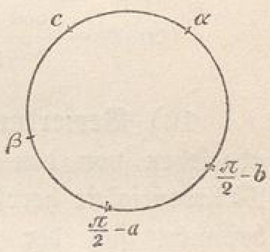


Fig. 112.



9) Mit diesen Grundformeln lassen sich die folgenden Aufgaben lösen.

a) Gegeben a und b; wie groß sind c, α, β und F?

Auflösung.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b; \quad \tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b}, \quad \tan \beta = \frac{\tan b}{\sin a},$$

$$F = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{180^0} r^2 \pi .$$

b) Gegeben a und c; wie groß sind b, α, β und F?

Auflösung.

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}, \quad \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c}, \quad F \text{ wie oben.}$$

c) Gegeben a und β, wie groß sind α, b, c und F?

Auflösung.

$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta, \quad \tan b = \sin a \cdot \tan \beta, \quad \tan c = \frac{\tan a}{\cos \beta},$$

F wie oben.

d) Gegeben a und α; wie groß sind β, b, c und F?

Auflösung.

$$\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}, \quad \sin b = \frac{\tan a}{\tan \alpha}, \quad \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}, \quad F \text{ wie oben.}$$

e) Gegeben c und α, wie groß β, b, a und F?

Auflösung.

$$\cot \beta = \cos c \cdot \tan \alpha, \quad \tan b = \tan c \cdot \cos \alpha, \quad \sin a = \sin c \cdot \sin \alpha.$$

f) Gegeben α und β, gesucht a, b, c und F.

Auflösung.

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}, \quad \cos c = \cot \alpha \cot \beta.$$

10) **Bemerkungen.** Es fragt sich, ob in den Auflösungen, abgesehen von den Fällen der Symmetrie, die keine Kongruenz ist, Mehrdeutigkeit herrschen kann. Bei dem Cosinus und der Tangente bestimmt sich der Quadrant aus dem Vorzeichen, also sind die Lösungen eindeutig, bei denen der Cosinus oder die Tangente der Unbekannten gefunden werden. Dagegen könnten die Sinus der gesuchten Größen sowohl auf den ersten, als auch auf den zweiten Quadranten führen. Nun ist aber nach Formel 4) $\sin a = \frac{\tan b}{\tan \beta}$ und $\sin b = \frac{\tan a}{\tan \alpha}$. Da nun der Sinus in den beiden ersten Quadranten stets positiv ist, so muß $\frac{\tan b}{\tan \beta}$ und ebenso $\frac{\tan a}{\tan \alpha}$ stets positiv sein, d. h. Zähler und Nenner sind beide zugleich positiv und beide zugleich negativ, folglich: Kathete und Gegenwinkel gehören stets demselben Quadranten an. Dies kann auch sofort aus der Figur entnommen werden, indem man bei gegebenem α den Maximalwert von a untersucht, der gleich $r\widehat{\alpha} = r\pi \frac{\alpha^0}{180^0}$ ist. So ist

z. B. in der zweiten Aufgabe die Lösung $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$ eindeutig, weil der Quadrant von α durch den Quadranten von a bestimmt wird.

Nur bei Aufgabe 4, wo Kathete und Gegenwinkel gegeben sind, bleibt die Zweideutigkeit bei allen Stücken bestehen, giebt aber nicht acht Möglichkeiten, sondern nur zwei, weil eben gewisse Quadranten zusammengehören.

Bei derselben Aufgabe kann auch eine Unmöglichkeit eintreten. Ist nämlich $\sin a > \sin\alpha$ gegeben, so wird $\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha} > 1$, was unmöglich ist. Der Grenzfall $\sin a = \sin\alpha$ führt auf $\sin c = 1$, d. h. auf $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Ist $\widehat{a} = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = 90^0$ gegeben, so ist das Dreieck unbestimmt, nämlich gleich der oberen oder unteren Hälfte eines beliebigen Kugelzweiecks, welches zwischen zwei Meridianen liegt. Soll es bestimmt werden, so muß noch ein drittes Stück gegeben sein.

Mit dem rechtwinkligen Dreiecke sind zugleich die gleichschenkligen erledigt, denn jedes läßt sich durch einen größten Kreis in symmetrische rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

III. Allgemeine sphärische Dreiecke.

11) **Aufgabe.** Das Analogon des Sinus-Satzes der ebenen Geometrie zu finden.

Auflösung. In Figur 113 sei ABC das sphärische Dreieck. Man lege durch C einen ebenen Hauptschnitt senkrecht zur Äquatorialebene AB, der den Bogen $\widehat{CD} = h$ senkrecht zu AB giebt. Dann ist nach Formel 2

$$\sin\alpha = \frac{\sin h}{\sin b}, \quad \sin\beta = \frac{\sin h}{\sin a},$$

folglich durch Division

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin a}{\sin b},$$

Fig. 113.