Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

III. Allgemeine sphärische Dreiecke

z. B. in der zweiten Aufgabe die Lösung $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$ eindeutig, weil der Quadrant von α durch den Quadranten von a bestimmt wird.

Nur bei Aufgabe 4, wo Kathete und Gegenwinkel gegeben sind, bleibt die Zweideutigkeit bei allen Stücken bestehen, giebt aber nicht acht Möglichkeiten, sondern nur zwei, weil eben gewisse Quadranten zusammengehören.

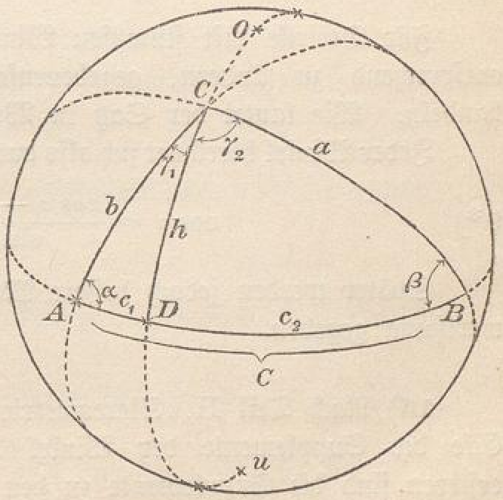
Bei derselben Aufgabe kann auch eine Unmöglichkeit eintreten. Ist nämlich $\sin a > \sin \alpha$ gegeben, so wird $\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha} > 1$, was unmöglich ist. Der Grenzfall $\sin a = \sin \alpha$ führt auf $\sin c = 1$, d. h. auf $\widehat{c} = \frac{\pi}{2}$. Ist $\widehat{a} = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = 90^0$ gegeben, so ist das Dreieck unbestimmt, nämlich gleich der oberen oder unteren Hälfte eines beliebigen Kugelzweiecks, welches zwischen zwei Meridianen liegt. Soll es bestimmt werden, so muß noch ein drittes Stück gegeben sein.

Mit dem rechtwinkligen Dreiecke sind zugleich die gleichschenkligen erledigt, denn jedes läßt sich durch einen größten Kreis in symmetrische rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

III. Allgemeine sphärische Dreiecke.

11) **Aufgabe.** Das Analogon des Sinus-Satzes der ebenen Geometrie zu finden.

Fig. 113.



Auflösung. In Figur 113 sei ABC das sphärische Dreieck. Man lege durch C einen ebenen Hauptschnitt senkrecht zur Äquatorialebene AB, der den Bogen $\widehat{CD} = h$ senkrecht zu AB giebt. Dann ist nach Formel 2

$$\sin \alpha = \frac{\sin h}{\sin b}, \quad \sin \beta = \frac{\sin h}{\sin a},$$

folglich durch Division

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b},$$

und allgemeiner

8*) $$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin b : \sin c,$$

d. h. die Sinus der Winkel verhalten sich wie die der gegenüberliegenden Seiten.

Bemerkungen. Die Figur ist nur wenig zu verändern, wenn einer der Winkel α und β stumpf ist. Sind beide stumpf, so untersucht man das Nebendreieck mit spitzen Winkeln. (Für kleine Bogen entsteht die Formel für ebene Dreiecke $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$.)

Aufgabe. Die Seite a aus b, c und α zu berechnen und so das Analogon des Cosinus-Satzes zu finden.

Auflösung 1. Sie befindet sich in Teil II, Anhang 1). Man kann die dortige Figur dadurch darstellen, daß man Tangenten im Gegenpunkte der gesuchten Seite anbringt.

Auflösung 2. In Figur 113 ist nach Formel 1)

$$\cos a = \cos h \cos c_2 = \cos h \cos(c - c_1)$$
$$= \cos h[\cos c \cos c_1 + \sin c \sin c_1] = \cos h \cos c \cos c_1 + \cos h \sin c \sin c_1.$$

Nach Formel 1) ist $\cos h \cos c_1 = \cos b$, und nach Formel 2) $\sin\gamma_1 = \frac{\sin c_1}{\sin b}$, also $\sin c_1 = \sin b \sin\gamma_1$. Beides eingesetzt giebt

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos h \sin c \sin b \sin\gamma_1.$$

Nun ist aber nach Formel 5) $\cos h = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma_1}$, also $\cos h \sin\gamma_1 = \cos\alpha$. Einsetzung giebt

9) $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Für Dreiecke mit stumpfen Winkeln bezw. Seiten ist die Figur entsprechend zu ändern, gegebenenfalls sind Nebendreiecke zu behandeln. Wie lautet der Satz in Worten?

Jeder Winkel berechnet sich also aus den Seiten mit Hülfe der Formel

9*) $$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Später werden jedoch bessere Methoden für logarithmische Auswerthung gegeben.

13) Nach Teil II, Stereometrie Nr. 15 sind die Seiten jeder Ecke die Supplemente der Winkel der Polarecke, die Winkel der ersteren sind die Supplemente zu den Seiten der letzteren. Aus den

Formeln für die Winkel lassen sich demnach sofort Formeln für die Seiten ableiten. So kann z. B., wenn die Seiten des Polardreiecks a_1, b_1, c_1, die Winkel α_1, β_1, γ_1 genannt werden, Formel 9 in folgender Form geschrieben werden:

$$\cos(2\pi - \alpha_1) = \cos(2\pi - \beta_1)\cos(2\pi - \gamma_1) + \sin(2\pi - \beta_1)\sin(2\pi - \gamma_1)\cos(2\pi - a_1),$$

oder

$$-\cos\alpha_1 = (-\cos\beta_1)(-\cos\gamma_1) + \sin\beta_1\sin\gamma_1(-\cos a_1).$$

Folglich gilt ganz allgemein die Formel

10) $$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

10*) $$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

So hat man in 9*) den Cosinussatz zur Berechnung des Winkels, und in 10*) den Cosinussatz zur Berechnung der Seite.

14) Mit Hülfe dieser Formeln könnte man jedes sphärische Dreieck aus drei Stücken berechnen, wenn sie nicht unbequem zur logarithmischen Auswertung wären. Außerdem würde, wenn man z. B. aus a, b und α den Winkel β berechnet hat, für c die Formel $\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$ anzuwenden sein, die c in zwei verschiedenen Funktionen enthält, so daß z. B. statt $\cos c$ geschrieben werden müßte $\sqrt{1 - \sin^2 c}$. Dies ist zu unbequem.

Eine bessere Formel zur Berechnung von c ergiebt sich folgendermaßen. Aus dem Cosinussatze folgen die Gleichungen

$$\cos a - \cos b\cos c = \sin b\sin c\cos\alpha,$$

$$\cos b - \cos c\cos a = \sin c\sin a\cos\beta,$$

folglich durch Addition

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c(\sin b\cos\alpha + \sin a\cos\beta)$$

oder nach bekannten Formeln

$$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\cdot 2\sin^2\frac{c}{2} = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}(\sin b\cos\alpha + \sin a\cos\beta),$$

oder nach beiderseitiger Division durch $2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$:

$$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\tan\frac{c}{2} = \sin b\cos\alpha + \sin a\cos\beta.$$

Schon diese Formel würde ausreichen. Sie wird aber logarithmisch bequemer, wenn man nach dem Sinussatze $\sin b$ durch $\frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}$ ersetzt. Dies giebt

$$2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \tan \frac{c}{2} = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha + \sin a \cos \beta$$
$$= \frac{\sin a}{\sin \alpha} [\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha]$$
$$= \frac{\sin a}{\sin \alpha} \sin(\alpha + \beta).$$

Daraus folgt die brauchbarere Formel

11) $$\tan \frac{c}{2} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}.$$

Ganz ebenso folgt aus dem Cosinussatze zur Berechnung der Seiten

11*) $$\cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sin a} \cdot \frac{\sin(a+b)}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}},$$

was sich auch nach obiger Methode mit Hülfe des Polardreiecks sofort aus 11) ableiten läßt. Aus diesen Formeln läßt sich auch das Analogon des Tangentensatzes der ebenen Trigonometrie ableiten, was jedoch später auf andere Art geschehen soll.

Vorläufig handelt es sich nur darum, zu zeigen, daß *schon jetzt für sämtliche Hauptfälle die Berechnung von sphärischen Dreiecken ermöglicht ist*, wenn auch nicht auf geschicktem Wege. Außerdem kann jetzt die wichtige Frage zur Erledigung kommen, unter welchen Bedingungen die zu lösenden Aufgaben keine, eine oder zwei Lösungen zulassen. Damit wird für Schulen, die der sphärischen Trigonometrie nur wenig Zeit widmen können, ein vorläufiger Abschluß erreicht.*)

IV. Übungsaufgaben für die vorläufige Berechnungsmethode.

15) a) Gegeben a, b, c, gesucht die Winkel α, β, γ.

Auflösung. $\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ und die daraus durch cyklische Vertauschung entstehenden Formeln.

Beispiel. Aus $a = 50^0$, $b = 110^0\,9'$, $c = 78^0\,12'$ folgt $\alpha = 39^0\,1'\,50''$, $\beta = 50^0\,30'\,24''$, $\gamma = 53^0\,34'\,26''$.

*) Das Realgymnasium z. B. kann hier abbrechen.