Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

IV. Übungsaufgaben für die vorläufige Berechnungsmethode

Schon diese Formel würde ausreichen. Sie wird aber logarithmisch bequemer, wenn man nach dem Sinussatze $\sin b$ durch $\frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}$ ersetzt. Dies giebt

$$\begin{aligned} 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\tan\frac{c}{2} &= \frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha + \sin a \cos\beta \\ &= \frac{\sin a}{\sin\alpha}[\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha] \\ &= \frac{\sin a}{\sin\alpha}\sin(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Daraus folgt die brauchbarere Formel

11) $$\tan\frac{c}{2} = \frac{\sin a}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}.$$

Ganz ebenso folgt aus dem Cosinussatze zur Berechnung der Seiten

11*) $$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sin a}\cdot\frac{\sin(a+b)}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

was sich auch nach obiger Methode mit Hülfe des Polardreiecks sofort aus 11) ableiten läßt. Aus diesen Formeln läßt sich auch das Analogon des Tangentensatzes der ebenen Trigonometrie ableiten, was jedoch später auf andere Art geschehen soll.

Vorläufig handelt es sich nur darum, zu zeigen, daß schon jetzt für sämtliche Hauptfälle die Berechnung von sphärischen Dreiecken ermöglicht ist, wenn auch nicht auf geschicktem Wege. Außerdem kann jetzt die wichtige Frage zur Erledigung kommen, unter welchen Bedingungen die zu lösenden Aufgaben keine, eine oder zwei Lösungen zulassen. Damit wird für Schulen, die der sphärischen Trigonometrie nur wenig Zeit widmen können, ein vorläufiger Abschluß erreicht.*)

IV. Übungsaufgaben für die vorläufige Berechnungsmethode.

15) a) Gegeben a, b, c, gesucht die Winkel α, β, γ.

Auflösung. $\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ und die daraus durch cyklische Vertauschung entstehenden Formeln.

Beispiel. Aus $a = 50^0$, $b = 110^0\,9'$, $c = 78^0\,12'$ folgt $\alpha = 39^0\,1'\,50''$, $\beta = 50^0\,30'\,24''$, $\gamma = 53^0\,34'\,26''$.

*) Das Realgymnasium z. B. kann hier abbrechen.

Aus dem sphärischen Überschuß ist die Fläche als

$$F = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0}\right)\pi$$

für den Radius 1 zu berechnen, für r ist dies mit r^2 zu multiplizieren.

b) Gegeben α, β, γ, gesucht a, b, c.

Auflösung. $\cos a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$ und die cyklisch dazu gehörigen Formeln.

Beispiel. Aus $\alpha = 75^0\,58'$, $\beta = 82^0\,10'$, $\gamma = 50^0\,36'$ folgt $a = 64^0\,7'\,52''$ u. s. w.

c) Gegeben a, b und der Gegenwinkel β.

Auflösung. $\sin\alpha = \dfrac{\sin a \cdot \sin\beta}{\sin b}$ was zweideutig ist, $\tan\dfrac{c}{2} = \dfrac{\sin a}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}}$, γ mit Sinus- oder Cosinus-Satz zu finden.

Beispiel. $a = 39^0\,29'$, $b = 66^0\,45'$, $\beta = 43^0\,20'$ giebt

$\alpha = 28^0\,21'\,14''$ oder $\alpha_1 = 151^0\,38'\,46''$

$c = 94^0\,54'\,36''$ oder $c_1 = 33^0\,2'\,42''$

$\gamma = 48^0\,5'\,9''$ oder $\gamma_1 = 24^0\,2'\,3''$.

d) Gegeben a, b und der eingeschlossene Winkel γ.

Auflösung. $\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\sin\gamma$. Das Übrige mit Sinus- oder Cosinus-Satz.

Beispiel. $a = 73^0\,25'$, $b = 52^0\,42'$, $\gamma = 63^0\,15'$ giebt

$c = 58^0\,59'\,22''$, $\alpha = 93^0\,4'\,48''$, $\beta = 55^0\,12'\,2''$.

e) Gegeben b, der anliegende Winkel γ und der gegenüberliegende Winkel β.

Auflösung. $\sin c = \dfrac{\sin b\sin\gamma}{\sin\beta}$, $\tan\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta}\cdot\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{2\cos\dfrac{b+c}{2}\cos\dfrac{b-c}{2}}$.

Beispiel. $b = 80^0\,24'$, $\beta = 70^0\,29'$, $\gamma = 66^0\,45'$.

Auflösung. $c = 73^0\,58'\,35''$, $a = 63^0\,53'\,20''$, $\alpha = 59^0\,8'\,3''$.

f) Gegeben b und die anliegenden Winkel α und γ.

Auflösung. $\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b$ u. s. w.

Beispiel. $b = 66^0\,45'$, $\gamma = 43^0\,20'$, $\alpha = 79^0\,9'$ giebt

$\beta = 82^0\,34'\,44''$, $c = 39^0\,28'\,56''$, $a = 65^0\,30'\,14''$.
