Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

V. Konstruktion, Kongruenz und Möglichkeit sphärischer Dreiecke bei drei gegebenen Stücken

V. Konstruktion, Kongruenz und Möglichkeit sphärischer Dreiecke bei drei gegebenen Stücken.*)

16) Der geometrische Ort aller Punkte der Kugeloberfläche, die von einem gegebenen Punkte derselben gleiche sphärische Entfernung haben, ist ein Kreis. Die Projektion des gegebenen Punktes auf die Ebene dieses Kreises fällt in dessen Mittelpunkt.

Da zu gleichen Bogen größter Kreise auf der Kugel auch gleiche Sehnen gehören, so kann man mit dem Zirkel auf der Kugeloberfläche genau ebenso Kreiskonstruktionen ausführen, wie auf der Ebene.

Wendet man die senkrechte Projektion an, so erscheinen sämtliche ebenen Schnitte, die senkrecht auf der Ebene der Zeichnung stehen, als gerade Linien. Davon soll bisweilen Gebrauch gemacht werden, um die Zeichnungen zu vereinfachen. Ebene Schnitte durch das Centrum geben größte Kreise. Diese vertreten bei den Konstruktionen gewissermaßen die Stelle der geraden Linie.

Ist die Konstruktion eines sphärischen Dreiecks eindeutig, so ist zugleich ein Kongruenzsatz für solche Dreiecke gefunden, damit aber zugleich ein Kongruenzsatz für Dreikant-Ecken, deren Theorie erst hier endgültig zum Austrage kommt.

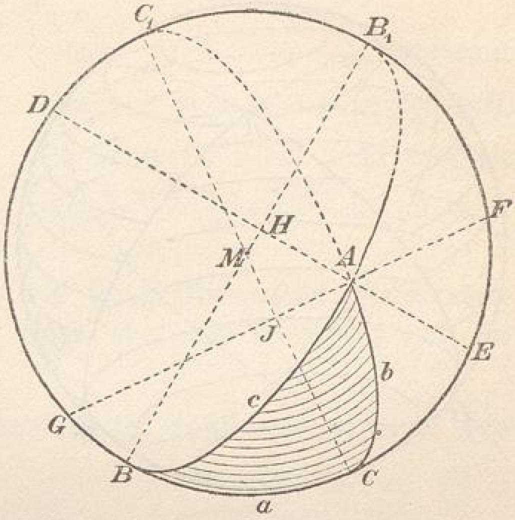
Zu den Fällen der Eindeutigkeit sollen auch diejenigen gerechnet werden, bei denen noch ein zweites, zum vorigen symmetrisches Dreieck möglich ist. Es findet nämlich dann (sowohl im konstruktiven, als auch im rechnerischen Sinne) Übereinstimmung in allen homologen Stücken statt, obwohl die Dreiecke nicht zur Deckung gebracht werden können. Man erkennt dies am besten, indem man ein auf eine Kugel gezeichnetes Dreieck mit einem Punkte seiner Fläche an einen Spiegel hält. Das Spiegelbild hat dann mit dem Dreieck die der Deckung entsprechende Lage, beide treffen sich aber nur in einem Punkte. Im Übrigen sind sie „von einander weggekrümmt". Auch kann jede Zeichnung in zweifachem Sinne aufgefaßt werden, da man sie als konkav oder konvex betrachten darf.

17) **Aufgabe.** Auf der Kugelfläche mit Radius 1 soll ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruiert werden.

Auflösung. In Figur 114 stelle der um M geschlagene Kreis die Kugel dar. $\widehat{BC} = a$, $\widehat{BD} = c$ und $\widehat{CF} = c$ seien die gegebenen Bogen. Man ziehe die Durchmesser BB_1 und CC_1 und fälle auf sie von D bezw.

*) Dieses Kapitel kann im Unterrichte überschlagen oder auch an den Schluß gestellt werden.

Fig. 114.

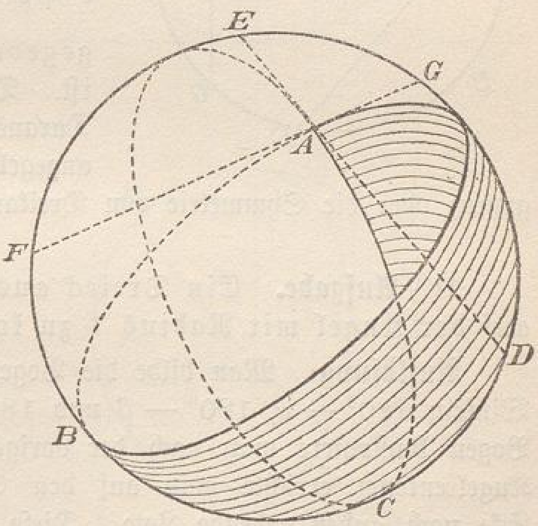


F aus die Lote DE und FG. Diese stellen die Kreisschnitte dar, deren sämtliche Umrißpunkte von B bezw. C die sphärische Entfernung c bezw. b haben. Ist A der Schnittpunkt beider Lote, so ist der dritte Eckpunkt A des Dreiecks ABC gefunden.

Seine Seiten $AB = c$ und $CA = b$ erscheinen als Ellipsenbogen. Der eine wird mit Hülfe des konstanten Verhältnisses $HA : HE$, der andere mit Hülfe des Verhältnisses $JA : JF$ konstruiert. Auf der Rückseite der Kugel befindet sich das zugehörige symmetrische Dreieck. Beide Zeichnungen decken sich. Damit ist die Aufgabe erledigt.

Bemerkung. Figur 115 stellt den Fall dar, wo $b > \pi$ und $c < \pi$ ist, so daß die Konstruktion auf die Rückseite der Kugel übergreift. Dabei wird der Winkel $BCA = \gamma$ ein überstumpfer.

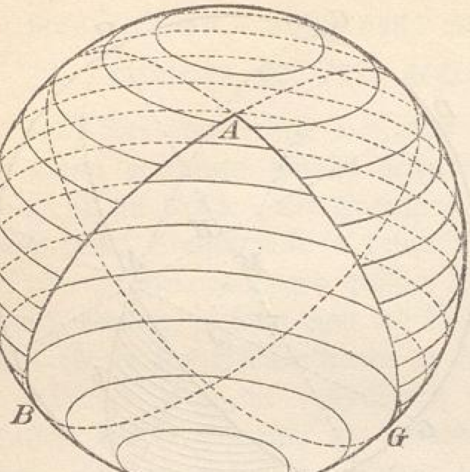
Fig. 115.



Figur 116 auf folgender Seite stellt den Fall dar, wo sowohl b als auch c größer als π ist. Dabei sind β und γ überstumpfe Winkel. Die Konstruktion, auf die Rückseite der Kugel verlegt, umfaßt die ganze Rückseite und greift auf die Vorderseite über, was durch Schraffierung der konkaven und konvexen Flächen angedeutet wird. Solche Fälle mit überstumpfen Bogen und Winkeln sollen jedoch ausgeschlossen werden. Das Übergreifen über die Halbkugelfläche soll also nicht gestattet sein.

Die erste Bedingung für die Möglichkeit des Dreiecks ist dann $a + b + c \leq 2\pi$. Im Grenzfalle nimmt das Dreieck die Halb-

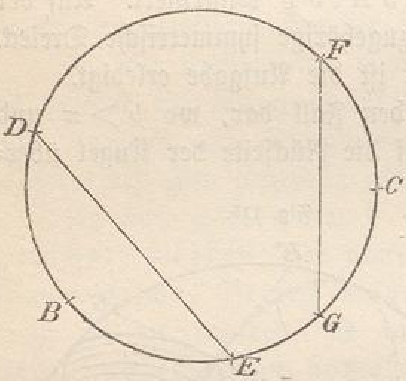
Fig. 116.



kugelfläche vollständig ein und hat die Winkel $\alpha = 180^0$, $\beta = 180^0$, $\gamma = 180^0$, also die Winkelsumme 540^0. Die drei Seiten bilden einen größten Kreis.

Eine zweite Bedingung ist aber $b + c > a$, wo a die größte Seite ist. Denn $\widehat{BC}$ ist die kürzeste sphärische Entfernung zwischen B und C, so daß im Falle $b + c < a$ die Hülfskreise FG und DE keinen Schnitt A geben können. Vergleiche Figur 117. Also:

Fig. 117.



Sieht man von den Grenzfällen ab, so sind bei konvexen Ecken die Bedingungen für die Möglichkeit eines Dreiecks aus a, b, c durch

$$a + b + c < 2\pi \quad \text{und} \quad b + c > a$$

gegeben, wo a die größte Seite ist. Die Konstruktion ist eindeutig. Daraus folgt einer der in Teil II angegebenen Sätze über die Kongruenz oder die Symmetrie von Dreikant-Ecken.

18) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den Winkeln α, β und γ auf der Kugel mit Radius 1 zu konstruieren.

Auflösung. Man bilde die Bogen a_1, b_1 und c_1, die zu den Winkeln $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$ und $180^0 - \gamma$ gehören. Aus diesen Bogen konstruiere man nach der vorigen Methode ein Dreieck. Im Kugelcentrum errichte man auf den Seitenflächen der zugehörigen Ecke nach außen gehende Lote. Diese geben die Eckpunkte des gesuchten Kugeldreiecks. Mit Hülfe der durch je zwei Eckpunkte gelegten Hauptschnitte wird die Konstruktion vollendet.

Nach voriger Untersuchung ist sie für konvexe Dreiecke nur möglich unter den Bedingungen $(180^0 - \alpha) + (180^0 - \beta) + (180^0 - \gamma) < 2 \cdot 180^0$ oder $\alpha + \beta + \gamma > 180^0$ und $(180^0 - \beta)$

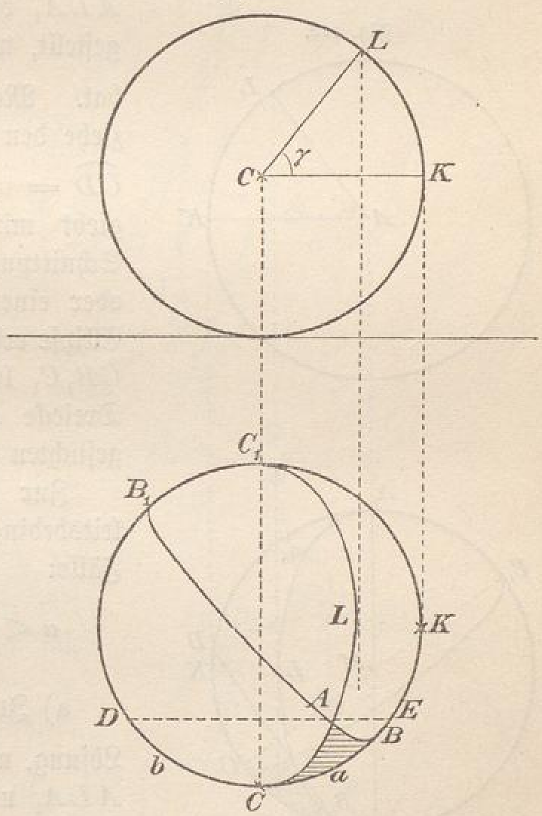
$+ (180^0 - \gamma) > 180^0 - \alpha$, wo $(\pi - \alpha)$ der größte der drei Bogen, also α der kleinste Winkel ist, also $\alpha + \beta + \gamma < 540^0$.

Dieselben Bedingungen folgen aus der Flächenformel $F = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0}\pi$. Da nämlich F nicht negativ werden darf, muß $\alpha + \beta + \gamma > 180^0$ sein. Da ferner die Fläche nicht über die Halbkugelfläche übergreifen soll, muß $\frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{180^0}\pi < 2 \cdot 1^2 \pi$ sein, d. h. $\alpha + \beta + \gamma < 540^0$.

Aus der Eindeutigkeit der Konstruktion folgt wieder einer der in Teil II angegebenen Sätze über die Kongruenz und die Symmetrie von Dreikant-Ecken.

19) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ.

Fig. 118.



Auflösung. In der Aufrißfigur werde CK horizontal gezogen und $\measuredangle KCL = \gamma$ gemacht. Die zugehörige Grundrißfigur giebt das zum Winkel γ gehörige Kugelzweieck mit den Bogen CKC_1 und CLC_1. Macht man nun $\widehat{CD} = b$, so giebt das Lot DE zu CC_1 den Kreis, dessen Punkte sämtlich von C die sphärische Entfernung b haben. Der Schnittpunkt A giebt auf dem Bogen CLC_1 die sphärische Seite $\widehat{AC} = b$. Macht man nun $\widehat{CB} = a$, so ist leicht die Grenzellipse BAB_1 zu konstruieren, die einen größten Kreis darstellt.

Die Aufgabe ist für konvexe Ecken stets möglich, sobald $\beta < 180^0$, $a < \pi$, $b < \pi$ ist.

Die Konstruktion ist im obigen Sinne eindeutig, giebt also wieder einen der genannten Kongruenzsätze.

20) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus a, β und γ zu konstruieren.

Auflösung. Man bilde die Bogen b_1 und c_1 zu $180^0 - \beta$ und $180^0 - \gamma$ und den Winkel α_1 zum Bogen $\pi - a_1$, dann läßt sich ein Dreieck aus b_1, c_1 und α_1 nach voriger Methode konstruieren. Das zugehörige Polardreieck ist das gesuchte.

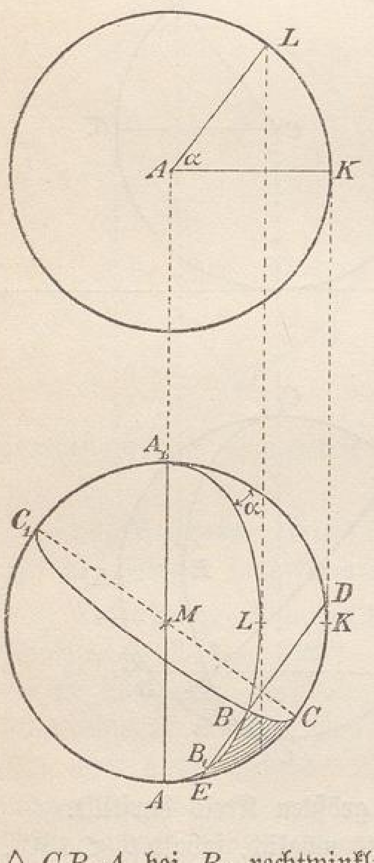
Die Bedingungen sind nach der vorigen Untersuchung $a < \pi$, $\beta < 180^0$, $\gamma < 180^0$.

Die Konstruktion ist eindeutig und giebt ebenfalls einen Satz über Kongruenz und Symmetrie für Dreikant-Ecken.

21) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus a, b und dem (nicht eingeschlossenen) Winkel α.

In Figur 119 ist wieder in der Aufrißfigur $\sphericalangle KAL = \alpha$ gemacht. Daraus ist die Grundrißfigur mit dem von AKA_1 und ALA_1 begrenzten Kugelzweieck hergestellt, welches den richtigen Winkel α hat. Man mache ferner $\widehat{AC} = b$, ziehe den Durchmesser CC_1 und mache $\widehat{CD} = a$. Das Lot DE zu CC_1 giebt mit dem Bogen ALA_1 zwei Schnittpunkte B und B_1 (oder keinen, oder einen). Zu jedem kann der als Ellipse erscheinende Bogen CBC_1 bezw. CB_1C_1 leicht konstruiert werden. Die Dreiecke ABC und AB_1C sind die gesuchten beiden Dreiecke.

Fig. 119.



Zur Untersuchung der Möglichkeitsbedingungen unterscheide man drei Fälle:

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha > \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

a) Im Falle $\alpha < \frac{\pi}{2}$ giebt es keine Lösung, wenn das Lot DE den Bogen ALA_1 nicht trifft.

Im Grenzfalle ist DE Tangente. Ist B_2 ihr Berührungspunkt, so ist $\triangle CB_2A$ bei B_2 rechtwinklig. Nach dem Sinussatze ist dann

$$\sin a = \sin b \sin \alpha.$$

Bei $\sin a < \sin b \sin \alpha$ giebt es also keine Lösung.

[Die Bedingung läßt sich auch schreiben

$$1 < \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a},$$

oder nach dem Sinussatze $1 < \sin \beta$; darin liegt die Unmöglichkeit.]

Trifft DE nach A, d. h. ist $a = b$, so ist das eine Dreieck gleichschenklig, das andere hat die Fläche Null.

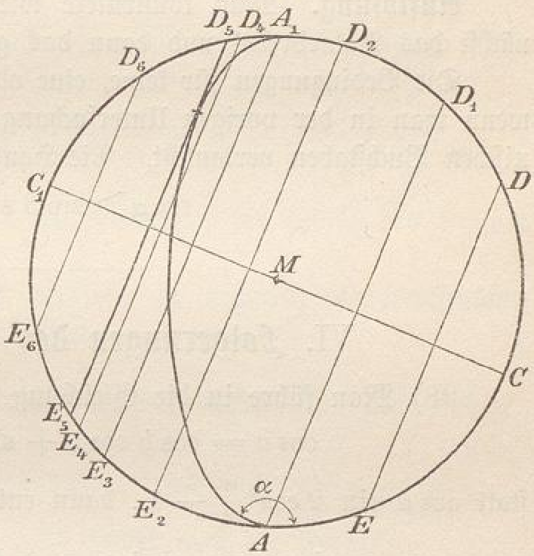
Ist aber

$$\sin b > \sin a > \sin b \sin \alpha,$$

so sind zwei Dreiecke möglich.

Ist $a > b$ und $< [CA_1 = \pi - b]$, so ist eine Lösung möglich. Ist $a = \pi - b$, so ist das Kugelzweieck zwischen AKA_1 und ALA_1 identisch mit dem Dreiecke.

Fig. 120.

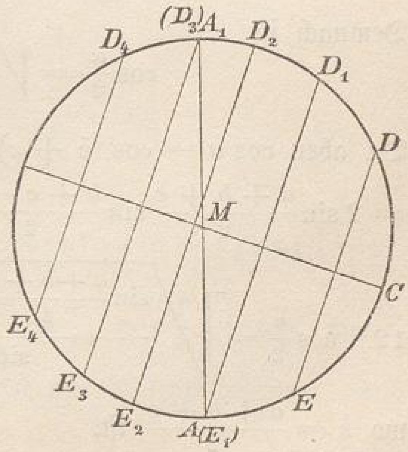


Bei $a > \pi - b$ würde das Dreieck auf die Rückseite der Kugelfläche übergreifen und Seite $c > \pi$ werden, was ausgeschlossen bleiben sollte.

b) Im Falle $\alpha > \frac{\pi}{2}$ findet, wie leicht zu zeigen, Folgendes statt: DE giebt keine Lösung, Grenzfall $D_1 A$ giebt eine Lösung mit Fläche Null. Hier handelt es sich um $a < b$ bezw. $a = b$.

$D_2 E_2$ giebt eine Lösung, $A_1 E_3$ zwei Lösungen, jedoch die eine mit Fläche Null. Hier handelt es sich um $a < \pi - b$ bezw. $a = \pi - b$.

Fig. 121.



$D_4 E_4$ giebt zwei Lösungen, Tangente $D_5 E_5$ nur eine, der letzte Fall giebt ein rechtwinkliges Dreieck. Es handelt sich also wieder um die Bedingungsgleichung

$$\sin a = \sin b \sin \alpha,$$

vorher um

$$\sin b > \sin a > \sin b \sin \alpha.$$

Keine Lösung hat man bei $\sin a < \sin b \sin \alpha$.

c) Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ giebt es, wie die Figur zeigt, keine Lösung bei $a < b$ und $a > \pi - b$, dagegen eine Lösung bei

$$b < a < \pi - b.$$

Im Grenzfalle ist jedesmal die Fläche des Dreiecks gleich Null.

Man kann sich sämtliche Resultate in Tabellenform zusammenstellen und den entsprechenden Kongruenz- bezw. Symmetriesatz für Dreikant-Ecken unter Hinweis auf die Tabelle aussprechen. Des komplizierten Charakters halber wurde der Satz in Teil II übergangen.

22) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus α, β und a.

Auflösung. Man konstruiere wie in den früheren Fällen zunächst das Polardreieck und dann das gesuchte.

Die Bedingungen für keine, eine oder zwei Lösungen erhält man, wenn man in der vorigen Untersuchung die griechischen mit den lateinischen Buchstaben vertauscht. Die Hauptgrenzbedingung wird wieder

$$\sin \alpha \geqq \sin \beta \sin a.$$

VI. Folgerungen des Cosinussatzes.

28) Man führe in die Gleichung 9)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

statt $\cos \alpha$ ein $2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$, dann entsteht rechts

$$\cos b \cos c - \sin b \sin c + 2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$
$$= \cos (b + c) + 2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Demnach ist

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos a - \cos (b + c)}{2 \sin b \sin c}}.$$

Da aber $\cos a - \cos (b + c) = -2 \sin \frac{a + b + c}{2} \sin \frac{a - b - c}{2}$ $= 2 \sin \frac{a + b + c}{2} \sin \frac{b + c - a}{2}$ ist, so folgt

$$12)\quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{-a+b+c}{2}}{\sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin (s - a)}{\sin b \sin c}},$$

wo $s = \frac{a + b + c}{2}$ ist.