Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

VI. Folgerungen des Cosinus-Satzes

Keine Lösung hat man bei $\sin a < \sin b \sin \alpha$.

c) Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ giebt es, wie die Figur zeigt, keine Lösung bei $a < b$ und $a > \pi - b$, dagegen eine Lösung bei

$$b < a < \pi - b.$$

Im Grenzfalle ist jedesmal die Fläche des Dreiecks gleich Null.

Man kann sich sämtliche Resultate in Tabellenform zusammenstellen und den entsprechenden Kongruenz- bezw. Symmetriesatz für Dreikant-Ecken unter Hinweis auf die Tabelle aussprechen. Des komplizierten Charakters halber wurde der Satz in Teil II übergangen.

22) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus α, β und a.

Auflösung. Man konstruiere wie in den früheren Fällen zunächst das Polardreieck und dann das gesuchte.

Die Bedingungen für keine, eine oder zwei Lösungen erhält man, wenn man in der vorigen Untersuchung die griechischen mit den lateinischen Buchstaben vertauscht. Die Hauptgrenzbedingung wird wieder

$$\sin \alpha \geqq \sin \beta \sin a.$$

VI. Folgerungen des Cosinussatzes.

28) Man führe in die Gleichung 9)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

statt $\cos \alpha$ ein $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$, dann entsteht rechts

$$\cos b \cos c - \sin b \sin c + 2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$
$$= \cos(b + c) + 2 \sin b \sin c \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Demnach ist

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos a - \cos(b + c)}{2 \sin b \sin c}}.$$

Da aber $\cos a - \cos(b + c) = -2 \sin \frac{a + b + c}{2} \sin \frac{a - b - c}{2}$ $= 2 \sin \frac{a + b + c}{2} \sin \frac{b + c - a}{2}$ ist, so folgt

$$12) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{-a+b+c}{2}}{\sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s - a)}{\sin b \sin c}},$$

wo $s = \frac{a + b + c}{2}$ ist.

24) Führt man ebenso in 9) statt $\cos\frac{\alpha}{2}$ ein $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, so folgt in derselben Weise

13) $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a-b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b\,\sin c}} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\,\sin c}}.$$

Durch Division folgt aus 13) und 14) noch

14) $$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-a)}}.$$

Durch Multiplikation dagegen erhält man unter beiderseitiger Verdoppelung

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin b\,\sin c}\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)},$$

folglich

15) $$\sin\alpha = \frac{2}{\sin b\,\sin c}\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}.$$

Mit Hülfe von 14) findet man am bequemsten die Winkel des Dreiecks aus den Seiten.

Sämtliche Wurzeln sind *positiv* zu nehmen, da überstumpfe Winkel ausgeschlossen werden sollten.

25) Macht man dieselben Betrachtungen für den anderen Cosinus-Satz

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

und setzt man $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \sigma$, so findet man die Formeln

16) $$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\,\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\,\sin\gamma}},$$

17) $$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\,\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\,\sin\gamma}},$$

18) $$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\,\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\,\cos(\sigma-\gamma)}},$$

19) $$\sin a = \frac{2}{\sin\beta\sin\gamma}\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}.$$

26) Aus den Gleichungen für $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$ erhält man durch entsprechende Multiplikationen neue. So ist z. B.

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}$$
$$= \frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Die letzte Wurzel ist aber gleich $\sin\frac{\gamma}{2}$, also bestehen folgende von der Irrationalität befreiten Gleichungen:

$$20)\quad \begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}, \quad \text{und ebenso} \\ \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Je zwei derselben lassen sich nun so vereinigen, daß links die Funktion einer Winkelsumme oder Differenz entsteht. Man erhält z. B.

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cos\frac{s+s-c}{2}\sin\frac{s-s+c}{2}}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$
$$= \frac{2\cos\frac{(2s-c)}{2}\sin\frac{c}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2},$$

oder endlich, da $2s-c=a+b$ ist:

$$21)\quad \begin{cases} \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}, \quad \text{und ebenso} \\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

27) Diese von Mollweide aufgestellten, aber wegen der Gleichzeitigkeit der Veröffentlichung auch nach Gauß und Delambre genannten Formeln werden übersichtlicher, wenn man auf die eine Seite nur die Seiten, auf die andere nur die Winkel bringt, also:

$$21^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}, & \dfrac{\sin\dfrac{a+b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}, \\[2ex] \dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}}, & \dfrac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\gamma}{2}}. \end{cases}$$

Man braucht nur die erste zu merken. Jede folgende nämlich entsteht dadurch, daß man in der letzten auf der einen Seite + in — verwandelt, auf der andern aber Cosinus und Sinus mit einander vertauscht.

Versucht man in die erste der Formeln die Polarsupplemente in ähnlicher Weise einzusetzen, wie vorher, also

$$\frac{\cos\dfrac{\pi-\alpha_1+\pi-\beta_1}{2}}{\cos\dfrac{\pi-\gamma_1}{2}} = \frac{\cos\dfrac{\pi-a_1+\pi-b_1}{2}}{\sin\dfrac{\pi-c_1}{2}},$$

so ergiebt sich die Umformung, daß man auf die Anfangsformel zurückkommt. Daraus läßt sich schließen, daß in allen zur Ableitung benutzten und in den aus 20) abzuleitenden Formeln Seiten und Winkel vertauscht werden können, wobei nur auf die Vorzeichen geachtet werden muß.

28) Durch Division erhält man aus je zwei dieser Formeln die sogenannteu Neperschen Analogien, nämlich:

$$22)\quad \begin{cases} \dfrac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cot\dfrac{\gamma}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}, & \dfrac{\tan\dfrac{a+b}{2}}{\tan\dfrac{c}{2}} = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}, \\[2ex] \dfrac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\dfrac{\gamma}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}, & \dfrac{\tan\dfrac{a-b}{2}}{\tan\dfrac{c}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}. \end{cases}$$

Diese haben erstens den Vorzug nur 5 statt 6 Stücke zu enthalten; ferner erhält man durch Division aus je zwei zusammenstehenden das Analogon des Tangentensatzes, nämlich:

$$23)\qquad \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{a-b}{2}},$$

so daß für unendlich kleine Bogen die Übereinstimmung mit der Formel der ebenen Trigonometrie wieder hergestellt ist.

29) Aus den beiden ersten Gaußschen Formeln 21*) folgt durch Addition

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Schafft man den Faktor 2 nach rechts, so folgt

$$24)\qquad \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\sin\gamma}.$$

Ebenso folgt durch Subtraktion

$$25)\qquad \frac{-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}{\sin\gamma}.$$

Nun ist der sphärische Exceß des Dreiecks

$$E = \alpha + \beta + \gamma - 180^0,$$

also

$$\frac{E}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - 90^0,$$

folglich nach 25)

$$\sin\frac{E}{2} = -\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\gamma.$$

Bei Radius 1 ist die Dreiecksfläche $F = (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi) = E$, also ist dann

26) $$\sin\frac{F}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Dies ist bei Radius r noch mit r^2 zu multiplizieren.

Ebenso giebt Gleichung 24)

$$\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = \cos\left[\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\gamma\right] = \cos\left[\frac{F}{2}-\gamma-90^0\right]$$

$$= \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\gamma,$$

oder

26*) $$-\sin\left[\frac{F}{2}-\gamma\right] = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}},$$

Radius 1 vorausgesetzt, also

$$-\sin\frac{F}{2}\cos\gamma + \cos\frac{F}{2}\sin\gamma = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Durch Division und Umformung folgt aus 26) und der letzten Gleichung eine neue, die sich umwandeln läßt in

27) $$\cot\frac{F}{2} = \frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

30) Von L'Huilier rührt folgende Entwickelung für die Flächenberechnung her:

Aus der Gaußschen Gleichung

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}-90^0\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = -\frac{\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

folgt, wenn beiderseits 1 abgezogen wird,

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} - 1 = -\frac{\sin\left(\frac{F}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} - 1$$

oder

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = -\frac{\sin\left(\frac{F}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$-\frac{2\sin\frac{a+b+c}{4}\sin\frac{a+b-c}{4}}{\cos\frac{c}{2}} = -\frac{2\sin\frac{F}{4}\cos\left(\frac{F}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$28)\qquad \frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{F}{4}\cos\left(\frac{F}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Ebenso folgt aus der zweiten Gaußschen Gleichung

$$\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{F}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

auf demselben Wege

$$28^*)\qquad \frac{\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = -\frac{\sin\frac{F}{4}\sin\left(\frac{F}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Durch Multiplikation und Umformung folgt aus den beiden Gleichungen 28) unter Berücksichtigung von 26*)

$$29)\qquad \sin\frac{F}{4} = \sqrt{\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\sin\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}.$$

Hätte man oben beiderseits 1 addiert, statt es zu subtrahieren, so hätte sich ergeben

$$29^*)\qquad \cos\frac{F}{4} = \sqrt{\frac{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}.$$

Durch Division erhält man schließlich

$$30)\qquad \tan\frac{F}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}.$$

Für sehr kleine Bogen und entsprechend kleines F gehen 29) und 30) in die Heronische Dreiecksformel über.