Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

VII. Vereinfachte Berechnungsmethoden

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

VII. Vereinfachte Berechnungsmethoden.

31) a. Gegeben die drei Seiten.

Auflösung. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$,

dazu die Formeln für $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ mit Hülfe cyklischer Vertauschung.

b. Gegeben die drei Winkel.

Auflösung. $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}$

und die durch cyklische Vertauschung entstehenden Formeln.

c. Gegeben a, b, γ.

Auflösung. $\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}$,

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2},$$

daraus α und β zu berechnen, sodann Sinussatz anzuwenden.

d. Gegeben α, β und c.

Auflösung. $\tan\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2}$,

$$\tan\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\tan\frac{c}{2}.$$

e. Gegeben a, b, α.

Auflösung. $\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha$,

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a+b}{2},$$

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

f. Gegeben a, α, β.

Auflösung. $\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a,$

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\tan\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\tan\frac{a+b}{2}.$$

VIII. Bemerkungen und Andeutungen über die sphärische Reciprocität.

[32) Betrachtet man einen größten Kugelkreis als Äquator, so gehört zu ihm nach jeder Seite ein Pol, und umgekehrt gehört zu jedem Pole ein Äquator, d. h. ein größter Kreis. Jeder Punktfigur entspricht also eine von größten Kreisen gebildete Polarfigur. Jede Kurve auf der Kugelfläche kann als eine Folge von Punkten angesehen werden; ihr entspricht eine Folge von größten Kreisen, die eine andere Kurve umhüllen oder ausschattieren. Letztere heißt die Polarkurve der ersteren.

Ähnlich, wie bei der Lehre von Pol und Polare kann man zu jedem Satze der Kugelgeometrie den entsprechenden Polarsatz finden. Einem durch zwei Punkte begrenzten Bogen eines größten Kreises entspricht stets ein Punkt, in dem sich zwei größte Kreise schneiden. Hat der Bogen die Länge a, so schneiden sich die Kreise so, daß $\pi - \alpha_1 = a$ oder $\alpha_1 = \pi - a$ ist. Jedem begrenzten Bogen a eines größten Kreises entspricht also ein Winkel $\alpha_1 = \pi - a$.

Dem Umfange $u = a + b + c$ des Dreiecks entspricht eine Winkelsumme $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = (\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) = 3\pi - (a + b + c) = 3\pi - u$. Zugleich ist $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = E_1 + \pi$, wo E_1 den sphärischen Exceß bedeutet. Daraus folgt $3\pi - u = E_1 + \pi$, oder $E_1 = 2\pi - u$. Bleibt der Dreiecksumfang um e unter 2π, so ist $u = 2\pi - e$, folglich $E_1 = e$. Man kann also sagen: Der sphärische „Mangel" eines Dreiecks ist gleich dem sphärischen Überschuß (Exceß) des Polardreiecks. Gewöhnlich wird der Satz so ausgedrückt, daß E_1 und u sich zu 360^0 ergänzen.