Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

I. Die ganzen rationalen Funktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Vierte Abteilung.

Algebraische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.

I. Die ganzen rationalen Funktionen.

1) Begriff der ganzen rationalen Funktion.

Ist in dem Ausdrucke $(a + bx + cx^2)$ die Größe x eine veränderliche, während a, b und c festgegebene (konstante) Größen sind, so entspricht jedem willkürlichen Werte von x ein einziger bestimmter Wert von $(a + bx + cx^2)$.

Weil der Wert des Ausdrucks vom Werte der Veränderlichen (Variablen) x abhängig ist, nennt man den Ausdruck eine Funktion von x. Man deutet dies durch die Schreibweise $f(x)$ an, also

$$f(x) = a + bx + cx^2.$$

Die Veränderliche x wird auch als das Argument der Funktion bezeichnet.

Weil jedem Werte von x nur ein einziger Wert dieser Funktion entspricht, heißt sie eine eindeutige Funktion von x. (Im Gegensatz dazu würden $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{a + x}$ u. s. w. mehrdeutig sein.)

Weil in dem Ausdrucke keine von x abhängigen Irrationalitäten vorkommen, wie z. B. $\sqrt{x}$, $\sqrt{a + x}$, $\sqrt[3]{b + x}$ u. s. w., so heißt die Funktion eine rationale Funktion von x.

Weil endlich x nicht in einem Nenner vorkommt, wie in $\frac{1}{x}$, $\frac{a + bx}{c + dx}$ u. s. w., so heißt die Funktion eine ganze Funktion von x.

In demselben Sinne heißt der höchstens $(n+1)$ Glieder enthaltende Ausdruck

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

eine ganze rationale Funktion von x und zwar, weil n der höchste Exponent der Grundzahl x ist, eine Funktion vom n^{ten} Grade.

Schreibt man y statt $f(x)$, so kann man

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

im Sinne der analytischen Geometrie als die Gleichung eine Kurve vom n^{ten} Grade deuten. Dabei sind aber die Koeffizienten $a, b, c, \cdots k$ als reell vorauszusetzen, was hier stets angenommen werden soll. Dann bedeutet y die zu jeder Abscisse x gehörige Ordinate.

Es sind aber auch andere Deutungen möglich, denn in Teil II, Ster. VIII wurden solche Gleichungen als Gleichungen für die Querschnittsflächen eines Körpers gedeutet.

Aufgabe. Bestimme die Ordinaten folgender Kurven für die Stellen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4, \cdots$.

$$y = 2 + 3x - 5x^2,$$
$$y = 5 - 4x + 6x^2 - 2x^3,$$
$$y = -1 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{2}{5}x^2 + x^3 + 2x^4.$$

2) Übereinstimmung mehrerer ganzen rationalen Funktionen miteinander.

In den späteren Abschnitten kommt folgender Satz zur Anwendung:

Satz. Stimmen zwei ganze rationale Funktionen n^{ten} Grades für $(n+1)$ Werte überein, so sind sie überhaupt identisch.

Beweis für den 2^{ten} Grad. Die Funktionen

$$f(x) = a + bx + cx^2,$$
$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

mögen für $x = x_1$ nnd ebenso für $x = x_2$ und $x = x_3$ übereinstimmen.

Um zu zeigen, daß dann $a = \alpha$, $b = \beta$ und $c = \gamma$ sein muß (womit die Identität nachgewiesen sein würde), setze man zunächst x_1 in beide Funktionen ein, so daß

$$a + bx_1 + cx_1^2 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2$$

ist, oder

$$1)\quad \begin{cases} (a-\alpha)+(b-\beta)x_1+(c-\gamma)x_1^2=0. \\ \text{Ebenso bilde man:} \\ (a-\alpha)+(b-\beta)x_2+(c-\gamma)x_2^2=0, \\ (a-\alpha)+(b-\beta)x_3+(c-\gamma)x_3^2=0. \end{cases}$$

Durch Subtraktion folgen die Gleichungen

$$(b-\beta)(x_1-x_2)+(c-\gamma)(x_1^2-x_2^2)=0,$$
$$(b-\beta)(x_2-x_3)+(c-\gamma)(x_2^2-x_3^2)=0.$$

Da x_1 und x_2 verschiedene Werte sind, so darf man in der ersten dieser Gleichungen durch (x_1-x_2) dividieren, ebenso in der zweiten durch (x_2-x_3). Dadurch erhält man

$$2)\quad \begin{cases} (b-\beta)+(c-\gamma)(x_1+x_2)=0, \\ (b-\beta)+(c-\gamma)(x_2+x_3)=0. \end{cases}$$

Daraus folgt durch Subtraktion

$$3)\quad (c-\gamma)(x_1-x_3)=0.$$

Weil aber (x_1-x_3) von Null verschieden ist, so muß $c-\gamma=0$ oder $c=\gamma$ sein. Setzt man in einer der Gleichungen 2) $c=\gamma$, so folgt $b=\beta$. Setzt man beides in eine der Gleichungen 1) ein, so folgt $a=\alpha$.

Damit ist die Identität nachgewiesen. (Dies konnte auch in anderer Weise geschehen, wie sich aus folgender Bemerkung ergiebt.)

Bemerkung. Soll demnach eine Funktion $f(x)=a+bx+cx^2$ für x_1 den Wert y_1, für x_2 den Wert y_2, für x_3 den Wert y_3 haben, so müssen ihre Koeffizienten a, b und c ganz bestimmte sein und sich berechnen lassen.

Man hat nämlich die Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} a+bx_1+cx_1^2=y_1, \\ a+bx_2+cx_2^2=y_2, \\ a+bx_3+cx_3^2=y_3. \end{cases}$$

In diesen betrachtet man a, b und c als Unbekannte, so daß es sich um drei Gleichungen 1. Grades mit drei Unbekannten handelt. Man entfernt a durch Subtraktion und erhält

$$b(x_1-x_2)+c(x_1^2-x_2^2)=y_1-y_2,$$
$$b(x_2-x_3)+c(x_2^2-x_3^2)=y_2-y_3,$$

oder nach beiderseitiger Division durch (x_1-x_2) bezw. (x_2-x_3)

2) $$\begin{cases} b + c(x_1 + x_2) = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \\ b + c(x_2 + x_3) = \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}. \end{cases}$$

Durch Subtraktion findet man

$$c(x_1 - x_3) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

oder

3) $$c = \frac{1}{x_1 - x_3}\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right].$$

Einsetzung in die erste der Gleichungen 2) giebt

$$b = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right].$$

Einsetzung der gefundenen Werte in die erste Gleichungen 1) giebt

$$a = y_1 - bx_1 - cx_1^2 = ?.$$

Aufgabe. Führe den Beweis des Satzes über die Identität für die Funktionen

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$
$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

aus, die für die Argumentwerte x_1, x_2, x_3 und x_4 übereinstimmen sollen.

Bemerkung. Man kommt dabei der Reihe nach auf Gleichungen von der Form

$$(a - \alpha) + (b - \beta)x_1 + (c - \gamma)x_1^2 + (d - \delta)x_1^3 = 0,$$

sodann

$$(b - \beta)(x_1 - x_2) + (c - \gamma)(x_1^2 - x_2^2) + (d - \delta)(x_1^3 - x_2^3) = 0,$$

wo die Division durch $(x_1 - x_2)$ aufgeht, also

$$(b - \beta) + (c - \gamma)(x_1 + x_2) + (d - \delta)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0.$$

Die dritte Gruppe erhält die Form

$$(c - \gamma)(x_1 - x_3) + (d - \delta)[(x_1^2 - x_3^2) + x_2(x_1 - x_3)] = 0,$$

oder, da die Division durch $(x_1 - x_3)$ aufgeht,

$$(c - \gamma) + (d - \delta)[x_1 + x_3 + x_2] = 0.$$

Aus diesem System folgt durch Subtraktion

$$(d - \delta)[x_1 - x_4] = 0,$$

und weil $x - x_4$ von Null verschieden ist, so folgt $d - \delta = 0$. Dies in die vorige Gruppe eingesetzt, giebt $c - \gamma = 0$. Rückwärts gehend erhält man noch $b - \beta = 0$ und $(a - \alpha) = 0$.

Bemerkung. Da bei höheren Graden die auftretenden Ausdrücke von der Form $x_1^n - x_2^n$ stets durch $x_1 - x_2$ teilbar sind, so gilt dieselbe Methode für alle ganzen rationalen Funktionen. Der ausgesprochene Satz ist also als bewiesen zu betrachten.

In der Sprache der analytischen Geometrie läßt sich der Satz für die einzelnen Grade folgendermaßen aussprechen:

a) Stimmen die Geraden $y = a + bx$ und $y = \alpha + \beta x$ in zwei Punkten überein, so fallen sie ganz zusammen; oder: Durch zwei Punkte läßt sich nur eine einzige Gerade legen.

b) Fallen die Kurven $y = a + bx + cx^2$ und $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ in drei Punkten zusammen, so fallen sie ganz zusammen; oder: Durch drei gegebene Punkte ist nur eine einzige solche Kurve möglich.

(Suche zu beweisen, daß es sich um Parabeln handelt, deren Achse parallel zur Y-Achse liegt.)

c) Durch $(n + 1)$ gegebene Punkte läßt sich nur eine einzige Kurve von der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

legen.

3) Direkte Bestimmung der Koeffizienten aus den Werten der Funktion.

Bemerkung. Die Aufgabe, die Koeffizienten von

1) $$y = a + bx + cx^2$$

aus den Wertepaaren x_1, y_1 bezw. x_2, y_2 und x_3, y_3 zu bestimmen, d. h. die Aufgabe, die Kurvengleichung fertig hinzuschreiben, wird mit einem Schlage gelöst, wenn man folgende Gleichung schreibt:

2) $$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3.$$

Auch dies ist zunächst eine Gleichung obiger Art vom 2^{ten} Grade in Bezug auf x. Setzt man aber in ihr $x = x_1$, so fällt alles weg bis auf $y = y_1$; setzt man $x = x_2$, so bleibt nur stehen $y = y_2$; setzt man $x = x_3$, so erhält man $y = y_3$. Die Kurve 2) stimmt also mit der gesuchten Kurve von der Form a in drei Punkten überein, ist also mit ihr identisch.

Vereinigt man rechts alle x, ebenso alle x^2 und die Glieder ohne x, so erhält man die Form 1) und für a, b und c dieselben Resultate, wie früher. (Vgl. 2.)

Ebenso ist die Gleichung der Kurve von der Form

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

die durch die vier Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ und $x_4 y_4$ gehen soll, mit einem Schlage gefunden durch die Gleichung

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_4)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_1)} y_2$$
$$+ \frac{(x - x_4)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_4)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} y_4.$$

Stelle die entsprechende Gleichung auf für den 4^{ten} Grad und den n^{ten} Grad.

Die allgemeine Gleichung heißt die Interpolationsformel von Lagrange.

Beispiel. Bestimme die Konstanten a, b, c, d der Funktion

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

wenn y für $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$ die Werte $y_1 = 10$, 12, 4, 1 haben soll.

Die Aufgabe soll auf beide Arten gelöst werden, erstens durch Auflösung des Systems der vier Gleichungen 1. Grades, zweitens mit Hülfe der Formel von Lagrange.

4) Parabeln höherer Ordnung und ihre Quadratur.

Man nennt die Kurven von der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

Parabeln n^{ter} Ordnung.

Ist nur ein einziger Koeffizient verschieden von Null, handelt es sich also um

$$y = kx^n,$$

so heißt die Kurve ein einfache Parabel n^{ter} Ordnung.

Nach Teil II, Stereometrie Nr. 64 gilt von Flächen, die in der Höhe y die Querlinie

$$x = q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^n$$

haben, auf Grund der Summenformel $\frac{1}{p+1} \sum_{p=1}^{p=\infty} n^p = \frac{1}{p+1}$, die für ganze positive p bewiesen worden ist, der Satz, daß der Flächeninhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe y_1 ist,

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{y_1}{1} + \frac{by_1^2}{2} + \frac{cy_1^3}{3} + \frac{dy_1^4}{4} + \cdots + \frac{ky_1^{n+1}}{n+1}.$$

Vertauscht man x mit y, so folgt z. B.

Die Fläche zwischen der x-Achse und der durch die Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

dargestellten Kurve, von $x = 0$ bis $x = x_1$ gerechnet, ist

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{x_1}{1} + \frac{bx_1^2}{2} + \frac{cx_1^3}{3} + \frac{dx_1^4}{4} + \cdots + \frac{kx_1^{n+1}}{n+1}.$$

Berechnet man auch $\overset{x_2}{\underset{0}{F}}$, wo $x_2 > x_1$ ist, so findet man durch Subtraktion

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \overset{x_2}{\underset{0}{F}} - \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{x_2 - x_1}{1} + b\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + c\frac{x_2^2 - x_1^2}{3} + \cdots$$
$$+ k\frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1},$$

oder auch, abgekürzt geschrieben:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \left| \frac{ax}{1} + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \cdots + \frac{kx^{n+1}}{n+1} \right|_{x=x_1}^{x=x_2}.$$

5) Die Simpson-Newtonsche Regel.

Geht die Gleichung nicht über den dritten Grad hinaus, so kann man, wie in Teil II gezeigt ist, die Simpson-Newtonsche Regel anwenden, also ist z. B. für die Kurve

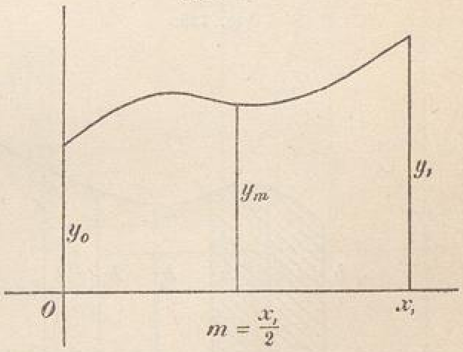
$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

von $x = 0$ bis $x = x_1$ gerechnet,

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1}{6}[y_0 + 4y_m + y_1].$$

Hier bedeutet y_m die Ordinate in der Mitte der Strecke x_1, d. h. bei $m = \frac{x_1}{2}$.

Fig. 123.



Ebenso ist

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2 - x_1}{6}[y_1 + 4y_m + y_2],$$

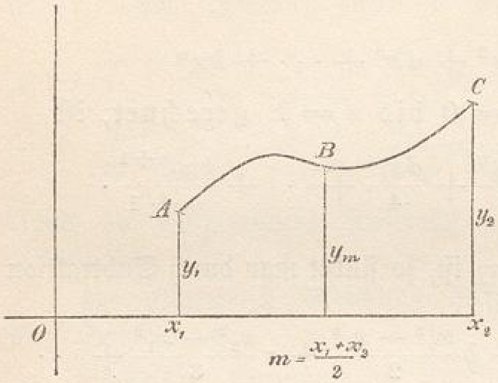
wo y_m das Lot an der Stelle $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ bedeutet.

Bemerkung. Durch die Punkte A, B und C läßt sich nur eine einzige Kurve von der Gleichung $y = a + by + cy^2$ legen, aber unendlich viele von der Gleichung 3ten Grades

$$y = a + by + cy^2 + dy^3.$$

So vielgestaltig aber diese Kurven auch sein mögen, sämtlich geben sie zwischen x_1 und x_2 denselben Flächeninhalt.

Fig. 124.



Beispiel. Wie groß ist die Fläche der Kurve

$$y = 2 + 3x + 5x^2 + 6x^3$$

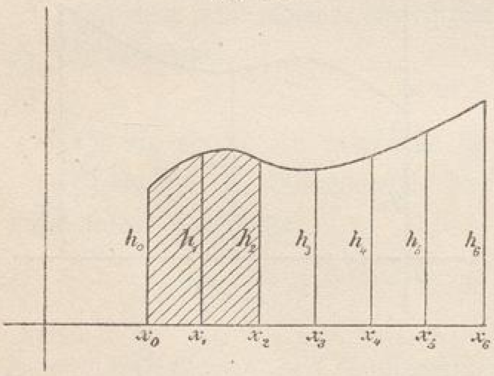
von $x = 0$ bis $x_1 = 2$?

Auflösung. Berechne y für $x = 0$, $x = \frac{2}{2} = 1$ und $x = 2$ als y_1, y_m und y_2 und wende dann die Simpson-Regel an.

Wie groß ist ferner die Fläche von $x_1 = 2$ bis $x_1 = 6$?

6) Verallgemeinerte Simpson-Regel. Während die Simpson-Regel in der Stereometrie weitgehende Anwendung findet, ist sie in der Geometrie weniger brauchbar. Zur Berechnung von sogenannten Diagrammflächen kann sie nicht gut direkt benutzt werden, wohl aber in einer Art von verallgemeinerter Gestalt.

Fig. 125.



Soll eine Kurvenfläche (zwischen X-Achse und Kurve gelegen) angenähert berechnet werden, obwohl die Kurve eine ganz willkürliche Gestalt hat, so teile man die Basis (von x_0 bis x_1) in eine gerade Anzahl gleicher Teile ein und lege durch die Teilpunkte Ordinaten. Für den ersten Doppelstreifen darf man, wenn die Breite nicht allzugroß ist, mit Annäherung die Simpson-Regel anwenden; ebenso für jeden folgenden. Man erhält z. B.

$$\overset{x_6}{\underset{x_0}{F}} = \frac{x_2 - x_0}{6}[h_0 + 4h_1 + h_2] + \frac{x_4 - x_2}{6}[h_2 + 4h_3 + h_4]$$
$$+ \frac{x_0 - x_4}{6}[h_4 + 4h_5 + h_6]$$
$$= \frac{x_6 - x_0}{6 \cdot 3}[h_0 + h_6 + 2(h_2 + h_4) + 4(h_1 + h_3 + h_5)].$$

Allgemein:

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \frac{x_n - x_0}{6 \cdot \frac{n}{2}}[h_0 + h_n + 2(h_2 + h_4 + h_6 + \cdots + h_{n-2})$$
$$+ 4(h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{n-1})].$$

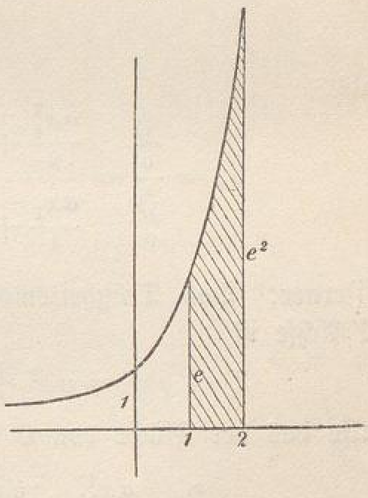
Diese Formel giebt weit genauere Resultate, als die aus der Berechnung der Trapeze hervorgehende Formel

$$\frac{x_n - x_0}{2n}[h_0 + 2(h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_{n-1}) + h_n],$$

da schon die Parabeln 2ter Ordnung, die sich durch je drei aufeinanderfolgende Punkte legen lassen, sich der Kurve weit inniger anschmiegen, wie die Geraden. Sicher aber wird unter den unendlich zahlreichen Kurven der 3ten Ordnung irgend eine sein, die dies in besonders hohem Grades thut.

Beispiel. Die sogenannte logarithmische Kurve $y = e^x$ soll von $x_1 = 1$ bis $x_2 = 2$ angenähert berechnet werden.

Fig. 126.



Auflösung. Bei nur vier Streifen erhält man

$$\frac{2-1}{6 \cdot \frac{4}{2}}\left[e^1 + e^2 + 2\left(e^{\frac{6}{4}}\right) + 4\left(e^{\frac{5}{4}} + e^{\frac{7}{4}}\right)\right]$$
$$= \frac{e}{12}\left[1 + e + 2e^{\frac{2}{4}} + 4\left(e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{3}{4}}\right)\right]$$
$$= 4,670876.$$

Die genauere Rechnung giebt den Wert 4,670775.

Dagegen würde die Trapezrechnung bei gleicher Streifenzahl 4,695079 geben, was viel zu groß sein muß, da die Kurve von unten gesehen konvex ist.

7) Praktische Anwendungen.

Abgesehen von den in der Stereometrie angegebenen Anwendungen kann man die Summenformel zur Berechnung der statischen Momente, der Schwerpunkte und der Trägheitsmomente von gewissen Flächen benutzen. [Gewisse graphische Darstellungen, auch die sogenannten Indikator-Diagramme der Dampfmaschine, sind sehr bequem mit der Simpson-Regel zu behandeln.]

a) Statisches Moment, Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Trägheitsmittelpunkt.

Die Gleichung einer Kurve sei

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^p.$$

Dann ist das statische Moment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse

$$M = y \cdot x = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots + kx^{p+1},$$

folglich das der gesamten Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{ax_1^2}{2} + \frac{bx_1^3}{3} + \frac{cx_1^4}{4} + \frac{dx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+2}}{p+2}.$$

Die Schwerpunktsentfernung berechnet sich aus „Fläche mal Hebelarm gleich dem statischen Momente", also aus

$$x_s \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{r_1}{\underset{0}{M}}$$

als

$$x_s = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{x_1}{\underset{0}{F}}} = \frac{\dfrac{ax_1^2}{2} + \dfrac{bx_1^3}{3} + \dfrac{cx_1^4}{4} + \cdots + \dfrac{kx_1^{p+2}}{p+2}}{\dfrac{ax_1}{1} + \dfrac{bx_1^2}{2} + \dfrac{cx_1^3}{3} + \cdots + \dfrac{kx_1^{p+1}}{p+1}}.$$

[Ferner: Das Trägheitsmoment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse ist

$$T = yx^2 = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots + kx^{p+2},$$

also das der Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{ax_1^3}{3} + \frac{bx_1^4}{4} + \frac{cx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+3}}{p+3}.$$

Der sogenannte Trägheitsmittelpunkt hat einen Abstand, der sich berechnet aus

$$x_t^2 \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{x_1}{\underset{0}{T}}$$

oder

$$x_t^2 = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{T}}}{\overset{x_1}{\underset{0}{F}}} = \frac{\frac{a x_1^3}{3} + \frac{b x_1^4}{4} + \frac{c x_1^5}{5} + \cdots + \frac{k x_1^{p+3}}{p+3}}{\frac{a x_1}{1} + \frac{b x_1^2}{2} + \frac{c x_1^3}{3} \pm \cdots + \frac{k x^{p+1}}{p+1}}.$$

Besonders häufig findet dies Anwendung auf die einfachen Parabeln höherer Ordnung, wie

$$y = cx^2, \quad y = dx^3, \quad y = ex^4, \quad \text{u. s. w.}$$

Bei $y = cx^2$ ergiebt sich

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{c \cdot x_1^3}{3},$$

was der 3te Teil des entsprechenden Rechtecks ist;

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{c x_1^4}{4}, \quad x_s = \frac{\frac{c x_1^4}{4}}{\frac{c x_1^3}{3}} = \frac{3}{4} x_1, \quad \overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{c x_1^5}{5}, \quad x_t^2 = \frac{\frac{c x_1^5}{5}}{\frac{c x_1^3}{3}} = \frac{3}{5} x_1^2.$$

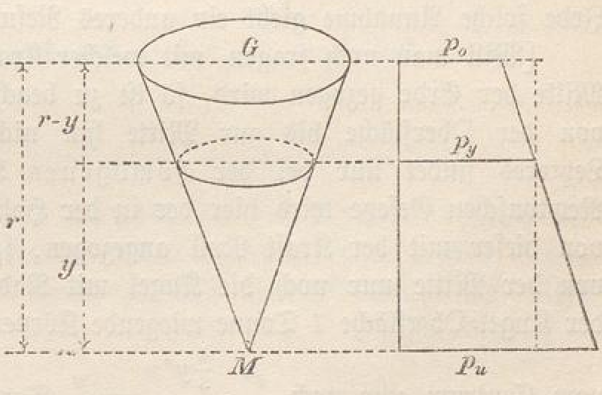
Die Bedeutung dieser Dinge liegt in der Mechanik.]

b) Eine kosmische Aufgabe.

Aufgabe. Das spezifische Gewicht der Erde sei an der Oberfläche 2,5 und im Durchschnitt 5,6. Nach der Mitte hin nehme es gleichmäßig zu. Wie groß ist es im Mittelpunkte?

Auflösung. Man denke sich einen Kegel (eigentlich Sektor) aus der Erdkugel geschnitten. Ist seine obere Fläche G, so hat er in Höhe y den Querschnitt

Fig. 127.



1) $G_y = G \frac{y^2}{r^2}$.

Ist das spezifische Gewicht unten p_u, oben p_o, so ergiebt sich für die Höhe y bei regelmäßiger Zunahme nach unten

$$(p_u - p_y) : y = (p_y - p_o) : (r - y),$$

folglich

2) $$p_y = p_u - y\frac{p_u - p_o}{r}.$$

Die Schicht in Höhe y fällt nach 1) und 2) ins Gewicht mit

$$G_y \cdot p_y = G\frac{p_u}{r^2}y^2 - G\frac{p_u - p_o}{r^3}y^3.$$

Für die Summe der Schichten von o bis y_1 giebt die Summenformel

3) $$G\frac{p_u}{r^2}\cdot\frac{y_1^3}{3} - G\frac{p_u - p_o}{r^3}\cdot\frac{y_1^4}{4},$$

also für $y_1 = r$

$$Gp_u\frac{r}{3} - G(p_u - p_o)\frac{r}{4} = \frac{Gr}{12}[4p_u - 3p_u + 3p_o] = \frac{Gr}{12}[p_u + 3p_o].$$

Der ganze Kegel fällt aber bei dem mittleren spezifischen Gewicht 5,6 mit $G\frac{r}{3}5{,}6$ ins Gewicht. Ist also $p_o = 2{,}5$, so hat man die Gleichung

$$\frac{Gr}{12}[p_u + 3\cdot 2{,}5] = \frac{Gr}{3}5{,}6,$$

also

4) $$p_u + 3\cdot 2{,}5 = 4\cdot 5{,}6,\quad p_u = 22{,}4 - 7{,}5 = \mathbf{14{,}9}.$$

Nach dieser Annahme wäre also das spezifische Gewicht im Erdcentrum $p' = 14{,}9$ zu setzen.

Selbstverständlich kann man beliebige andere Annahmen über die Zunahme des spezifischen Gewichtes nach der Mitte hin machen. Jede solche Annahme giebt ein anderes Resultat.

[Will man noch fragen, mit welcher Kraft dieser Kegel nach der Mitte der Erde gezogen wird, so ist zu beachten, daß die Anziehung von der Oberfläche bis zur Mitte hin nicht regelmäßig abnimmt. Letzteres findet nur bei der homogenen Kugel statt. Nach dem Newtonschen Gesetze wird hier der in der Hohlkugel befindliche Körper von dieser mit der Kraft Null angezogen, so daß in Entfernung y von der Mitte nur noch die Kugel mit Radius y wirkt. Jeder an der Kugel-Oberfläche 1 Tonne wiegende Körper wiegt in Entfernung y vom Centrum nur noch $\frac{r^2}{y^2}\cdot\frac{\frac{4}{3}y^3\pi}{\frac{4}{3}r^3\pi} = \frac{y}{r}$ Tonnen.

Handelt es sich nicht um einen Kegel, sondern um einen Cylinder, der sich nicht, wie der Kegel, in der umgebenden Erdmasse festkeilt, und ist sein Querschnitt 1 qm, so wird er bei dem spezifischen Gewichte 5,6 von der Erde so angezogen, daß jede Meterschicht mit $5{,}6\frac{y}{r}$ Tonnen, der ganze Cylinder mit $\frac{5{,}6}{r}\cdot\frac{y^2}{2}$, d. h. für $y = r$ mit $\frac{5{,}6\,r}{2} = 2{,}8\,r = 2{,}8\cdot 860\cdot 7500 = 18\,060\,000$ Tonnen angezogen werden. Dies würde dann auch der Druck im Erdcentrum sein.

Wendet man zur Vermeidung naheliegender Versehen die nötige Vorsicht an, so kann man die Rechnung auch für die oben angenommene Massenverteilung durchführen.

Auch die Frage, mit welcher Geschwindigkeit ein Körper sich an jeder Stelle eines luftleeren Schachtes bewegen würde, der bis zum Mittelpunkte der Erde reicht, kann für beide Massenverteilungen beantwortet werden.

Man hat nur nötig, die Formel für die Stärke der Anziehung jeder Kugel mit Radius y an ihrer Oberfläche zu berechnen und für die entsprechende Parabel höherer Ordnung $\overset{r}{\underset{y}{F}}$ zu bilden. Dies ist aus Gründen der Mechanik gleich der gewonnenen Arbeitswucht $\frac{mv^2}{2}$ (lebendige Kraft) der angezogenen Masse m zu setzen, so daß man v für jede Stelle berechnen kann. Hier würde dies zu weit führen.]

8) Andeutungen über ganze rationale Funktionen*). (Tangentenproblem und Nullstellen.)

Nach Teil II, Anhang 8) liegen die höchsten und niedrigsten Stellen der Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

da, wo die Gleichung

$$b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nkx^{n-1} = 0$$

erfüllt ist. Dort sind die Tangenten der Kurve horizontal.

Da für uns vorläufig nur Gleichungen bis zum dritten Grade lösbar sind, so darf die Kurve zunächst den 4ten Grad noch nicht übersteigen.

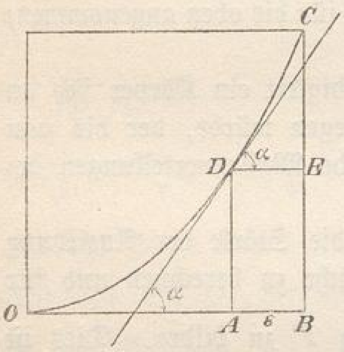
*) Anwendung sollen diese Andeutungen vorläufig nicht finden. Ihre Absicht ist, zu zeigen, daß die Elemente zur erschöpfenden Behandlung des Gebietes nicht ausreichen. Es handelt sich also nicht etwa um Einführung der Differentialrechnung.

Beispiele. Wo liegen die Maxima und Minima der Kurven

$$y = 2 - 3x + 5x^2; \quad y = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3;$$
$$y = 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + x^4?$$

Man kann nun die Frage stellen, welche Richtungen die Tangenten an jeder Stelle $x = x_1$ haben.

Fig. 128.



Zunächst handle es sich um die einfache Parabel höherer Ordnung $y = x^n$. In Figur 126 denke man sich für diese Kurve die Sehne DC gezeichnet. Es sei nun $OA = x$, also $AD = x^n$, es sei ferner $AB = \varepsilon$, also $OB = (x + \varepsilon)$ und $BC = (x + \varepsilon)^n$. Dann ist

$$\tan\alpha = \frac{EC}{DE} = \frac{BC - AD}{\varepsilon}$$
$$= \frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x}.$$

Die Division läßt sich durchführen und giebt für ganzes positives n

$$\tan\alpha = (x+\varepsilon)^{n-1} + (x+\varepsilon)^{n-2}\cdot x + (x+\varepsilon)^{n-3}\cdot x^2 + \cdots$$
$$+ (x+\varepsilon)x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Hier läßt sich jede Klammer nach dem binomischen Satze entwickeln, z. B.

$$(x+\varepsilon)^{n-1} = x^{n-1} + \frac{n-1}{1!}x^{n-1}\varepsilon + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}x^{n-2}\varepsilon^2$$
$$+ \cdots + \varepsilon^{n-1}.$$

Läßt man aber ε unendlich klein werden, so strebt diese Summe der Grenze x^{n-1} zu. Man darf aber ε bei endlichem n auch schon in der Reihe für $\tan\alpha$ streichen. Demnach hat $\tan\alpha$ für $\varepsilon = 0$ einen bestimmten Grenzwert

$$\tan\alpha = x^{n-1} + x^{n-2}\cdot x + x^{n-3}\cdot x^2 + \cdot\cdot + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Für $\varepsilon = 0$ wird aber die Sehne DC verschwindend klein, d. h. sie fällt mit der Tangente der Kurve zusammen. Folglich:

Die Parabel höherer Ordnung $y = x^n$ hat an der Stelle x eine Tangentenrichtung, die sich aus der Gleichung $\tan\alpha = nx^{n-1}$ ergiebt.

Zeige ebenso, daß es sich für die Kurve $y = bx^n$ um $\tan\alpha = nbx^{n-1}$ handelt. Für die Kurve $y = bx^m + cx^n$ handelt es sich ebenso um

$$\tan\alpha = \frac{[b(x+\varepsilon)^m + c(x+\varepsilon)^n] - (bx^m + cx^n)}{(x+\varepsilon) - x}$$

$$= b\frac{(x+\varepsilon)^m - x^m}{(x+\varepsilon) - x} + c\frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x},$$

also nach Obigen für $\varepsilon = 0$ um

$$\tan\alpha = mbx^{m-1} + ncx^{n-1},$$

für die Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

also um

$$\tan\alpha = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nk^{n-1}.$$

Die Kenntnis dieses Satzes hat die Entwickelung der Mathematik in außerordentlicher Weise beeinflußt, da es nahe lag, den Wert von $\tan\alpha$ auch für beliebige Funktionen zu untersuchen.

Beispiel. Untersuche die Tangentenrichtung für $y = 2 + 3x - 5x^2$, $y = 3 - x + 2x^2 - 4x^3$ an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3,$ u. s. w.

Findet man Stellen, wo die Kurve

1) $$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

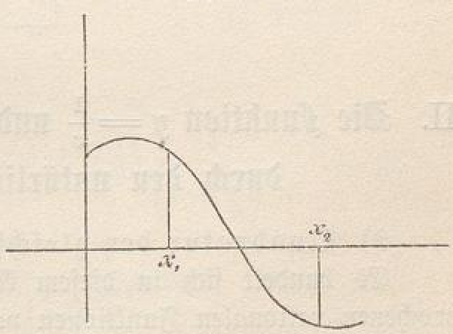
die X-Achse schneidet, so ist durch das betreffende x die Gleichung

2) $$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

erfüllt, d. h. man hat eine reelle Lösung (Wurzel) der Gleichung 2) gefunden.

Wird die X-Achse von der Kurve nirgends geschnitten, so hat die Gleichung keine reellen Lösungen, sondern nur imaginäre oder komplexe.

Fig. 129.



Für jedes endliche reelle x hat die Kurve eine endliche Ordinate, aber nur diese eine. Ist also z. B. die Ordinate bei x_1 positiv, bei x_2 negativ, so muß die Kurve zwischen x_1 und x_2 die X-Achse geschnitten haben, d. h. zwischen x_1 und x_2 muß sich eine reelle Wurzel der Gleichung 2) befinden. Durch probeweises Einsetzen von solchen x, die zwischen x_1 und x_2 liegen, kann man sich der wirklichen Wurzel (durch Einschnürung) bis zu beliebiger Genauigkeit nähern.