Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

a) Begriff, Übereinstimmung rationaler Funktionen, Bestimmung der Koeffizienten aus den Werten der Funktion

Vierte Abteilung.

Algebraische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.

I. Die ganzen rationalen Funktionen.

1) Begriff der ganzen rationalen Funktion.

Ist in dem Ausdrucke $(a + bx + cx^2)$ die Größe x eine veränderliche, während a, b und c festgegebene (konstante) Größen sind, so entspricht jedem willkürlichen Werte von x ein einziger bestimmter Wert von $(a + bx + cx^2)$.

Weil der Wert des Ausdrucks vom Werte der Veränderlichen (Variablen) x abhängig ist, nennt man den Ausdruck eine Funktion von x. Man deutet dies durch die Schreibweise $f(x)$ an, also

$$f(x) = a + bx + cx^2.$$

Die Veränderliche x wird auch als das Argument der Funktion bezeichnet.

Weil jedem Werte von x nur ein einziger Wert dieser Funktion entspricht, heißt sie eine eindeutige Funktion von x. (Im Gegensatz dazu würden $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{a + x}$ u. s. w. mehrdeutig sein.)

Weil in dem Ausdrucke keine von x abhängigen Irrationalitäten vorkommen, wie z. B. $\sqrt{x}$, $\sqrt{a + x}$, $\sqrt[3]{b + x}$ u. s. w., so heißt die Funktion eine rationale Funktion von x.

Weil endlich x nicht in einem Nenner vorkommt, wie in $\frac{1}{x}$, $\frac{a + bx}{c + dx}$ u. s. w., so heißt die Funktion eine ganze Funktion von x.

In demselben Sinne heißt der höchstens $(n+1)$ Glieder enthaltende Ausdruck

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

eine ganze rationale Funktion von x und zwar, weil n der höchste Exponent der Grundzahl x ist, eine Funktion vom n^{ten} Grade.

Schreibt man y statt $f(x)$, so kann man

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

im Sinne der analytischen Geometrie als die Gleichung eine Kurve vom n^{ten} Grade deuten. Dabei sind aber die Koeffizienten $a, b, c, \cdots k$ als reell vorauszusetzen, was hier stets angenommen werden soll. Dann bedeutet y die zu jeder Abscisse x gehörige Ordinate.

Es sind aber auch andere Deutungen möglich, denn in Teil II, Ster. VIII wurden solche Gleichungen als Gleichungen für die Querschnittsflächen eines Körpers gedeutet.

Aufgabe. Bestimme die Ordinaten folgender Kurven für die Stellen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4, \cdots$.

$$y = 2 + 3x - 5x^2,$$
$$y = 5 - 4x + 6x^2 - 2x^3,$$
$$y = -1 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{2}{5}x^2 + x^3 + 2x^4.$$

2) Übereinstimmung mehrerer ganzen rationalen Funktionen miteinander.

In den späteren Abschnitten kommt folgender Satz zur Anwendung:

Satz. Stimmen zwei ganze rationale Funktionen n^{ten} Grades für $(n+1)$ Werte überein, so sind sie überhaupt identisch.

Beweis für den 2^{ten} Grad. Die Funktionen

$$f(x) = a + bx + cx^2,$$
$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

mögen für $x = x_1$ nnd ebenso für $x = x_2$ und $x = x_3$ übereinstimmen.

Um zu zeigen, daß dann $a = \alpha$, $b = \beta$ und $c = \gamma$ sein muß (womit die Identität nachgewiesen sein würde), setze man zunächst x_1 in beide Funktionen ein, so daß

$$a + bx_1 + cx_1^2 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2$$

ist, oder

$$1)\quad \begin{cases} (a-\alpha)+(b-\beta)x_1+(c-\gamma)x_1^2=0. \\ \text{Ebenso bilde man:} \\ (a-\alpha)+(b-\beta)x_2+(c-\gamma)x_2^2=0, \\ (a-\alpha)+(b-\beta)x_3+(c-\gamma)x_3^2=0. \end{cases}$$

Durch Subtraktion folgen die Gleichungen

$$(b-\beta)(x_1-x_2)+(c-\gamma)(x_1^2-x_2^2)=0,$$
$$(b-\beta)(x_2-x_3)+(c-\gamma)(x_2^2-x_3^2)=0.$$

Da x_1 und x_2 verschiedene Werte sind, so darf man in der ersten dieser Gleichungen durch (x_1-x_2) dividieren, ebenso in der zweiten durch (x_2-x_3). Dadurch erhält man

$$2)\quad \begin{cases} (b-\beta)+(c-\gamma)(x_1+x_2)=0, \\ (b-\beta)+(c-\gamma)(x_2+x_3)=0. \end{cases}$$

Daraus folgt durch Subtraktion

$$3)\quad (c-\gamma)(x_1-x_3)=0.$$

Weil aber (x_1-x_3) von Null verschieden ist, so muß $c-\gamma=0$ oder $c=\gamma$ sein. Setzt man in einer der Gleichungen 2) $c=\gamma$, so folgt $b=\beta$. Setzt man beides in eine der Gleichungen 1) ein, so folgt $a=\alpha$.

Damit ist die Identität nachgewiesen. (Dies konnte auch in anderer Weise geschehen, wie sich aus folgender Bemerkung ergiebt.)

Bemerkung. Soll demnach eine Funktion $f(x)=a+bx+cx^2$ für x_1 den Wert y_1, für x_2 den Wert y_2, für x_3 den Wert y_3 haben, so müssen ihre Koeffizienten a, b und c ganz bestimmte sein und sich berechnen lassen.

Man hat nämlich die Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} a+bx_1+cx_1^2=y_1, \\ a+bx_2+cx_2^2=y_2, \\ a+bx_3+cx_3^2=y_3. \end{cases}$$

In diesen betrachtet man a, b und c als Unbekannte, so daß es sich um drei Gleichungen 1. Grades mit drei Unbekannten handelt. Man entfernt a durch Subtraktion und erhält

$$b(x_1-x_2)+c(x_1^2-x_2^2)=y_1-y_2,$$
$$b(x_2-x_3)+c(x_2^2-x_3^2)=y_2-y_3,$$

oder nach beiderseitiger Division durch (x_1-x_2) bezw. (x_2-x_3)

2) $$\begin{cases} b + c(x_1 + x_2) = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \\ b + c(x_2 + x_3) = \dfrac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}. \end{cases}$$

Durch Subtraktion findet man

$$c(x_1 - x_3) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$$

oder

3) $$c = \frac{1}{x_1 - x_3}\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right].$$

Einsetzung in die erste der Gleichungen 2) giebt

$$b = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}\right].$$

Einsetzung der gefundenen Werte in die erste Gleichungen 1) giebt

$$a = y_1 - bx_1 - cx_1^2 = ?.$$

Aufgabe. Führe den Beweis des Satzes über die Identität für die Funktionen

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$
$$\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

aus, die für die Argumentwerte x_1, x_2, x_3 und x_4 übereinstimmen sollen.

Bemerkung. Man kommt dabei der Reihe nach auf Gleichungen von der Form

$$(a - \alpha) + (b - \beta)x_1 + (c - \gamma)x_1^2 + (d - \delta)x_1^3 = 0,$$

sodann

$$(b - \beta)(x_1 - x_2) + (c - \gamma)(x_1^2 - x_2^2) + (d - \delta)(x_1^3 - x_2^3) = 0,$$

wo die Division durch $(x_1 - x_2)$ aufgeht, also

$$(b - \beta) + (c - \gamma)(x_1 + x_2) + (d - \delta)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0.$$

Die dritte Gruppe erhält die Form

$$(c - \gamma)(x_1 - x_3) + (d - \delta)[(x_1^2 - x_3^2) + x_2(x_1 - x_3)] = 0,$$

oder, da die Division durch $(x_1 - x_3)$ aufgeht,

$$(c - \gamma) + (d - \delta)[x_1 + x_3 + x_2] = 0.$$

Aus diesem System folgt durch Subtraktion

$$(d - \delta)[x_1 - x_4] = 0,$$

und weil $x - x_4$ von Null verschieden ist, so folgt $d - \delta = 0$. Dies in die vorige Gruppe eingesetzt, giebt $c - \gamma = 0$. Rückwärts gehend erhält man noch $b - \beta = 0$ und $(a - \alpha) = 0$.

Bemerkung. Da bei höheren Graden die auftretenden Ausdrücke von der Form $x_1^n - x_2^n$ stets durch $x_1 - x_2$ teilbar sind, so gilt dieselbe Methode für alle ganzen rationalen Funktionen. Der ausgesprochene Satz ist also als bewiesen zu betrachten.

In der Sprache der analytischen Geometrie läßt sich der Satz für die einzelnen Grade folgendermaßen aussprechen:

a) Stimmen die Geraden $y = a + bx$ und $y = \alpha + \beta x$ in zwei Punkten überein, so fallen sie ganz zusammen; oder: Durch zwei Punkte läßt sich nur eine einzige Gerade legen.

b) Fallen die Kurven $y = a + bx + cx^2$ und $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ in drei Punkten zusammen, so fallen sie ganz zusammen; oder: Durch drei gegebene Punkte ist nur eine einzige solche Kurve möglich.

(Suche zu beweisen, daß es sich um Parabeln handelt, deren Achse parallel zur Y-Achse liegt.)

c) Durch $(n + 1)$ gegebene Punkte läßt sich nur eine einzige Kurve von der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

legen.

3) Direkte Bestimmung der Koeffizienten aus den Werten der Funktion.

Bemerkung. Die Aufgabe, die Koeffizienten von

1) $$y = a + bx + cx^2$$

aus den Wertepaaren x_1, y_1 bezw. x_2, y_2 und x_3, y_3 zu bestimmen, d. h. die Aufgabe, die Kurvengleichung fertig hinzuschreiben, wird mit einem Schlage gelöst, wenn man folgende Gleichung schreibt:

2) $$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3.$$

Auch dies ist zunächst eine Gleichung obiger Art vom 2^{ten} Grade in Bezug auf x. Setzt man aber in ihr $x = x_1$, so fällt alles weg bis auf $y = y_1$; setzt man $x = x_2$, so bleibt nur stehen $y = y_2$; setzt man $x = x_3$, so erhält man $y = y_3$. Die Kurve 2) stimmt also mit der gesuchten Kurve von der Form a in drei Punkten überein, ist also mit ihr identisch.

Vereinigt man rechts alle x, ebenso alle x^2 und die Glieder ohne x, so erhält man die Form 1) und für a, b und c dieselben Resultate, wie früher. (Vgl. 2.)

Ebenso ist die Gleichung der Kurve von der Form

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

die durch die vier Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ und $x_4 y_4$ gehen soll, mit einem Schlage gefunden durch die Gleichung

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_4)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_1)} y_2$$
$$+ \frac{(x - x_4)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_4)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} y_4.$$

Stelle die entsprechende Gleichung auf für den 4^{ten} Grad und den n^{ten} Grad.

Die allgemeine Gleichung heißt die Interpolationsformel von Lagrange.

Beispiel. Bestimme die Konstanten a, b, c, d der Funktion

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

wenn y für $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$ die Werte $y_1 = 10$, 12, 4, 1 haben soll.

Die Aufgabe soll auf beide Arten gelöst werden, erstens durch Auflösung des Systems der vier Gleichungen 1. Grades, zweitens mit Hülfe der Formel von Lagrange.

4) Parabeln höherer Ordnung und ihre Quadratur.

Man nennt die Kurven von der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

Parabeln n^{ter} Ordnung.

Ist nur ein einziger Koeffizient verschieden von Null, handelt es sich also um

$$y = kx^n,$$

so heißt die Kurve ein einfache Parabel n^{ter} Ordnung.

Nach Teil II, Stereometrie Nr. 64 gilt von Flächen, die in der Höhe y die Querlinie

$$x = q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^n$$

haben, auf Grund der Summenformel $\frac{1}{p+1} \sum_{p=1}^{p=\infty} n^p = \frac{1}{p+1}$, die für ganze positive p bewiesen worden ist, der Satz, daß der Flächeninhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe y_1 ist,