



Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima
realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung
auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

b) Parabeln höherer Ordnung und ihre Quadratur

[urn:nbn:de:hbz:466:1-93638](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-93638)

Ebenso ist die Gleichung der Kurve von der Form

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

die durch die vier Punkte x_1y_1 , x_2y_2 , x_3y_3 und x_4y_4 gehen soll, mit einem Schlage gefunden durch die Gleichung

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1 + \frac{(x-x_3)(x-x_4)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_1)}y_2 \\ + \frac{(x-x_4)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_4)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4.$$

Stelle die entsprechende Gleichung auf für den 4^{ten} Grad und den n^{ten} Grad.

Die allgemeine Gleichung heißt die Interpolationsformel von Lagrange.

Beispiel. Bestimme die Konstanten a , b , c , d der Funktion

$$y = f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

wenn y für $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$ die Werte $y_1 = 10$, 12, 4, 1 haben soll.

Die Aufgabe soll auf beide Arten gelöst werden, erstens durch Auflösung des Systems der vier Gleichungen 1. Grades, zweitens mit Hülfe der Formel von Lagrange.

4) Parabeln höherer Ordnung und ihre Quadratur.

Man nennt die Kurven von der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + kx^n$$

Parabeln n^{ter} Ordnung.

Ist nur ein einziger Koeffizient verschieden von Null, handelt es sich also um

$$y = kx^n,$$

so heißt die Kurve eine einfache Parabel n^{ter} Ordnung.

Nach Teil II, Stereometrie Nr. 64 gilt von Flächen, die in der Höhe y die Querlinie

$$x = q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + \dots + ky^n$$

haben, auf Grund der Summenformel $\frac{1}{p+1} \sum_{p=1}^{p=\infty} n^p = \frac{1}{p+1}$, die für ganze positive p bewiesen worden ist, der Satz, daß der Flächeninhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe y_1 ist,

$$\frac{y_1}{F_0} = a \frac{y_1}{1} + \frac{b y_1^2}{2} + \frac{c y_1^3}{3} + \frac{d y_1^4}{4} + \dots + \frac{k y_1^{n+1}}{n+1}.$$

Vertauscht man x mit y , so folgt z. B.

Die Fläche zwischen der x -Achse und der durch die Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + kx^n$$

dargestellten Kurve, von $x=0$ bis $x=x_1$ gerechnet, ist

$$\frac{x_1}{F_0} = a \frac{x_1}{1} + \frac{b x_1^2}{2} + \frac{c x_1^3}{3} + \frac{d x_1^4}{4} + \dots + \frac{k x_1^{n+1}}{n+1}.$$

Berechnet man auch $\frac{x_2}{F_0}$, wo $x_2 > x_1$ ist, so findet man durch Subtraktion

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{F_{x_1}} = \frac{x_2}{F_0} - \frac{x_1}{F_0} &= a \frac{x_2 - x_1}{1} + b \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + c \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} + \dots \\ &+ k \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

oder auch, abgekürzt geschrieben:

$$\frac{x_2}{F_{x_1}} = \left[\frac{ax}{1} + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \dots + \frac{kx^{n+1}}{n+1} \right]_{x=x_1}^{x=x_2}.$$

5) Die Simpson-Newtonsche Regel.

Geht die Gleichung nicht über den dritten Grad hinaus, so kann man, wie in Teil II gezeigt ist, die Simpson-Newtonsche Regel anwenden, also ist z. B.

für die Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

von $x=0$ bis $x=x_1$ gerechnet,

$$\frac{x_1}{F_0} = \frac{x_1}{6} [y_0 + 4y_m + y_1].$$

Hier bedeutet y_m die Ordinate in der Mitte der Strecke x_1 ,

d. h. bei $m = \frac{x_1}{2}$.

Ebenso ist

$$\frac{x_2}{F_{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{6} [y_1 + 4y_m + y_2],$$

wo y_m das Lot an der Stelle $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ bedeutet.

Fig. 123.

