Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

c) Die Simpson-Newtonsche Regel nebst Verallgemeinerung

$$\overset{y_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{y_1}{1} + \frac{by_1^2}{2} + \frac{cy_1^3}{3} + \frac{dy_1^4}{4} + \cdots + \frac{ky_1^{n+1}}{n+1}.$$

Vertauscht man x mit y, so folgt z. B.

Die Fläche zwischen der x-Achse und der durch die Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

dargestellten Kurve, von $x = 0$ bis $x = x_1$ gerechnet, ist

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{x_1}{1} + \frac{bx_1^2}{2} + \frac{cx_1^3}{3} + \frac{dx_1^4}{4} + \cdots + \frac{kx_1^{n+1}}{n+1}.$$

Berechnet man auch $\overset{x_2}{\underset{0}{F}}$, wo $x_2 > x_1$ ist, so findet man durch Subtraktion

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \overset{x_2}{\underset{0}{F}} - \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = a\frac{x_2 - x_1}{1} + b\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + c\frac{x_2^2 - x_1^2}{3} + \cdots$$
$$+ k\frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1},$$

oder auch, abgekürzt geschrieben:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \left| \frac{ax}{1} + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \cdots + \frac{kx^{n+1}}{n+1} \right|_{x=x_1}^{x=x_2}.$$

5) Die Simpson-Newtonsche Regel.

Geht die Gleichung nicht über den dritten Grad hinaus, so kann man, wie in Teil II gezeigt ist, die Simpson-Newtonsche Regel anwenden, also ist z. B. für die Kurve

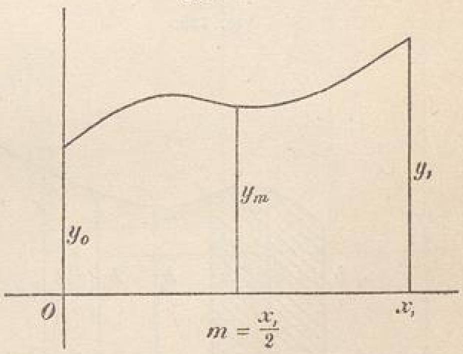
$$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

von $x = 0$ bis $x = x_1$ gerechnet,

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1}{6}[y_0 + 4y_m + y_1].$$

Hier bedeutet y_m die Ordinate in der Mitte der Strecke x_1, d. h. bei $m = \frac{x_1}{2}$.

Fig. 123.



Ebenso ist

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2 - x_1}{6}[y_1 + 4y_m + y_2],$$

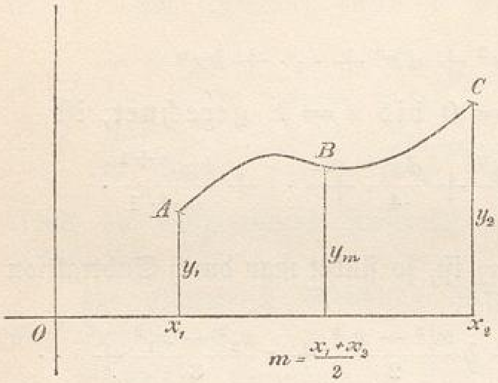
wo y_m das Lot an der Stelle $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ bedeutet.

Bemerkung. Durch die Punkte A, B und C läßt sich nur eine einzige Kurve von der Gleichung $y = a + by + cy^2$ legen, aber unendlich viele von der Gleichung 3ten Grades

$$y = a + by + cy^2 + dy^3.$$

So vielgestaltig aber diese Kurven auch sein mögen, sämtlich geben sie zwischen x_1 und x_2 denselben Flächeninhalt.

Fig. 124.



Beispiel. Wie groß ist die Fläche der Kurve

$$y = 2 + 3x + 5x^2 + 6x^3$$

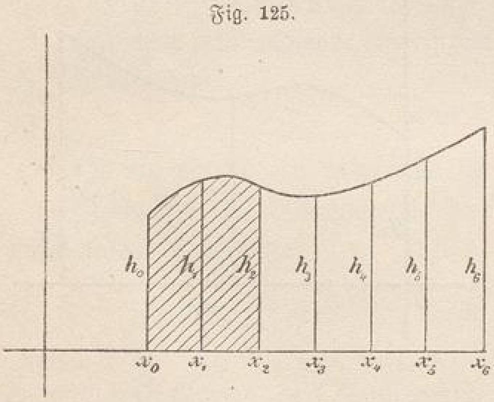
von $x = 0$ bis $x_1 = 2$?

Auflösung. Berechne y für $x = 0$, $x = \frac{2}{2} = 1$ und $x = 2$ als y_1, y_m und y_2 und wende dann die Simpson-Regel an.

Wie groß ist ferner die Fläche von $x_1 = 2$ bis $x_1 = 6$?

6) Verallgemeinerte Simpson-Regel. Während die Simpson-Regel in der Stereometrie weitgehende Anwendung findet, ist sie in der Geometrie weniger brauchbar. Zur Berechnung von sogenannten Diagrammflächen kann sie nicht gut direkt benutzt werden, wohl aber in einer Art von verallgemeinerter Gestalt.

Fig. 125.



Soll eine Kurvenfläche (zwischen X-Achse und Kurve gelegen) angenähert berechnet werden, obwohl die Kurve eine ganz willkürliche Gestalt hat, so teile man die Basis (von x_0 bis x_1) in eine gerade Anzahl gleicher Teile ein und lege durch die Teilpunkte Ordinaten. Für den ersten Doppelstreifen darf man, wenn die Breite nicht allzugroß ist, mit Annäherung die Simpson-Regel anwenden; ebenso für jeden folgenden. Man erhält z. B.

$$\overset{x_6}{\underset{x_0}{F}} = \frac{x_2 - x_0}{6}[h_0 + 4h_1 + h_2] + \frac{x_4 - x_2}{6}[h_2 + 4h_3 + h_4]$$
$$+ \frac{x_0 - x_4}{6}[h_4 + 4h_5 + h_6]$$
$$= \frac{x_6 - x_0}{6\cdot 3}[h_0 + h_6 + 2(h_2 + h_4) + 4(h_1 + h_3 + h_5)].$$

Allgemein:

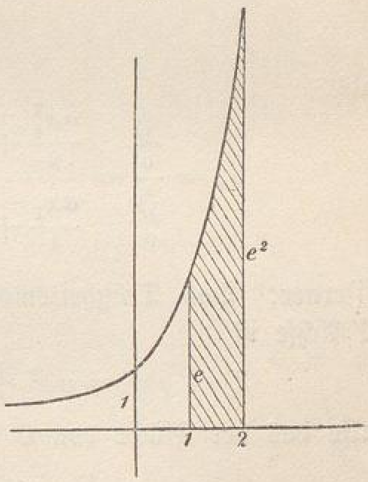
$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \frac{x_n - x_0}{6\cdot\frac{n}{2}}[h_0 + h_n + 2(h_2 + h_4 + h_6 + \cdots + h_{n-2})$$
$$+ 4(h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{n-1})].$$

Diese Formel giebt weit genauere Resultate, als die aus der Berechnung der Trapeze hervorgehende Formel

$$\frac{x_n - x_0}{2n}[h_0 + 2(h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_{n-1}) + h_n],$$

da schon die Parabeln 2ter Ordnung, die sich durch je drei aufeinanderfolgende Punkte legen lassen, sich der Kurve weit inniger anschmiegen, wie die Geraden. Sicher aber wird unter den unendlich zahlreichen Kurven der 3ten Ordnung irgend eine sein, die dies in besonders hohem Grades thut.

Fig. 126.



Beispiel. Die sogenannte logarithmische Kurve $y = e^x$ soll von $x_1 = 1$ bis $x_2 = 2$ angenähert berechnet werden.

Auflösung. Bei nur vier Streifen erhält man

$$\frac{2-1}{6\cdot\frac{4}{2}}\left[e^1 + e^2 + 2\left(e^{\frac{6}{4}}\right) + 4\left(e^{\frac{5}{4}} + e^{\frac{7}{4}}\right)\right]$$
$$= \frac{e}{12}\left[1 + e + 2e^{\frac{2}{4}} + 4\left(e^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{3}{4}}\right)\right]$$
$$= 4{,}670876.$$

Die genauere Rechnung giebt den Wert 4,670775.

Dagegen würde die Trapezrechnung bei gleicher Streifenzahl 4,695079 geben, was viel zu groß sein muß, da die Kurve von unten gesehen konvex ist.

7) Praktische Anwendungen.

Abgesehen von den in der Stereometrie angegebenen Anwendungen kann man die Summenformel zur Berechnung der statischen Momente, der Schwerpunkte und der Trägheitsmomente von gewissen Flächen benutzen. [Gewisse graphische Darstellungen, auch die sogenannten Indikator-Diagramme der Dampfmaschine, sind sehr bequem mit der Simpson-Regel zu behandeln.]

a) Statisches Moment, Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Trägheitsmittelpunkt.

Die Gleichung einer Kurve sei

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^p.$$

Dann ist das statische Moment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse

$$M = y \cdot x = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots + kx^{p+1},$$

folglich das der gesamten Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{ax_1^2}{2} + \frac{bx_1^3}{3} + \frac{cx_1^4}{4} + \frac{dx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+2}}{p+2}.$$

Die Schwerpunktsentfernung berechnet sich aus „Fläche mal Hebelarm gleich dem statischen Momente", also aus

$$x_s \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{r_1}{\underset{0}{M}}$$

als

$$x_s = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{x_1}{\underset{0}{F}}} = \frac{\frac{ax_1^2}{2} + \frac{bx_1^3}{3} + \frac{cx_1^4}{4} + \cdots + \frac{kx_1^{p+2}}{p+2}}{\frac{ax_1}{1} + \frac{bx_1^2}{2} + \frac{cx_1^3}{3} + \cdots + \frac{kx_1^{p+1}}{p+1}}.$$

[Ferner: Das Trägheitsmoment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse ist

$$T = yx^2 = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots + kx^{p+2},$$

also das der Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{ax_1^3}{3} + \frac{bx_1^4}{4} + \frac{cx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+3}}{p+3}.$$

Der sogenannte Trägheitsmittelpunkt hat einen Abstand, der sich berechnet aus

$$x_t^2 \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{x_1}{\underset{0}{T}}$$