Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

α) Statisches Moment, Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Trägheitsmittelpunkt

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

7) Praktische Anwendungen.

Abgesehen von den in der Stereometrie angegebenen Anwendungen kann man die Summenformel zur Berechnung der statischen Momente, der Schwerpunkte und der Trägheitsmomente von gewissen Flächen benutzen. [Gewisse graphische Darstellungen, auch die sogenannten Indikator-Diagramme der Dampfmaschine, sind sehr bequem mit der Simpson-Regel zu behandeln.]

a) Statisches Moment, Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Trägheitsmittelpunkt.

Die Gleichung einer Kurve sei

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^p.$$

Dann ist das statische Moment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse

$$M = y \cdot x = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots + kx^{p+1},$$

folglich das der gesamten Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{ax_1^2}{2} + \frac{bx_1^3}{3} + \frac{cx_1^4}{4} + \frac{dx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+2}}{p+2}.$$

Die Schwerpunktsentfernung berechnet sich aus „Fläche mal Hebelarm gleich dem statischen Momente", also aus

$$x_s \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{r_1}{\underset{0}{M}}$$

als

$$x_s = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{M}}}{\overset{x_1}{\underset{0}{F}}} = \frac{\dfrac{ax_1^2}{2} + \dfrac{bx_1^3}{3} + \dfrac{cx_1^4}{4} + \cdots + \dfrac{kx_1^{p+2}}{p+2}}{\dfrac{ax_1}{1} + \dfrac{bx_1^2}{2} + \dfrac{cx_1^3}{3} + \cdots + \dfrac{kx_1^{p+1}}{p+1}}.$$

[Ferner: Das Trägheitsmoment jeder Ordinate in Bezug auf die Y-Achse ist

$$T = yx^2 = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots + kx^{p+2},$$

also das der Fläche von 0 bis x_1

$$\overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{ax_1^3}{3} + \frac{bx_1^4}{4} + \frac{cx_1^5}{5} + \cdots + \frac{kx_1^{p+3}}{p+3}.$$

Der sogenannte Trägheitsmittelpunkt hat einen Abstand, der sich berechnet aus

$$x_t^2 \cdot \overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \overset{x_1}{\underset{0}{T}}$$

oder

$$x_t^2 = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{T}}}{\overset{x_1}{\underset{0}{F}}} = \frac{\frac{a x_1^3}{3} + \frac{b x_1^4}{4} + \frac{c x_1^5}{5} + \cdots + \frac{k x_1^{p+3}}{p+3}}{\frac{a x_1}{1} + \frac{b x_1^2}{2} + \frac{c x_1^3}{3} \pm \cdots + \frac{k x^{p+1}}{p+1}}.$$

Besonders häufig findet dies Anwendung auf die einfachen Parabeln höherer Ordnung, wie

$$y = cx^2, \quad y = dx^3, \quad y = ex^4, \quad \text{u. s. w.}$$

Bei $y = cx^2$ ergiebt sich

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{c \cdot x_1^3}{3},$$

was der 3te Teil des entsprechenden Rechtecks ist;

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{c x_1^4}{4}, \quad x_s = \frac{\frac{c x_1^4}{4}}{\frac{c x_1^3}{3}} = \frac{3}{4} x_1, \quad \overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{c x_1^5}{5}, \quad x_t^2 = \frac{\frac{c x_1^5}{5}}{\frac{c x_1^3}{3}} = \frac{3}{5} x_1^2.$$

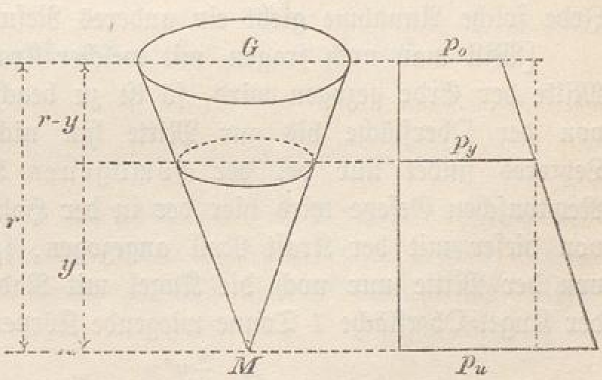
Die Bedeutung dieser Dinge liegt in der Mechanik.]

b) Eine kosmische Aufgabe.

Aufgabe. Das spezifische Gewicht der Erde sei an der Oberfläche 2,5 und im Durchschnitt 5,6. Nach der Mitte hin nehme es gleichmäßig zu. Wie groß ist es im Mittelpunkte?

Auflösung. Man denke sich einen Kegel (eigentlich Sektor) aus der Erdkugel geschnitten. Ist seine obere Fläche G, so hat er in Höhe y den Querschnitt

Fig. 127.



1) $G_y = G \frac{y^2}{r^2}$.

Ist das spezifische Gewicht unten p_u, oben p_o, so ergiebt sich für die Höhe y bei regelmäßiger Zunahme nach unten

$$(p_u - p_y) : y = (p_y - p_o) : (r - y),$$