Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

β) Eine kosmische Aufgabe

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

oder

$$x_t^2 = \frac{\overset{x_1}{\underset{0}{T}}}{\overset{x_1}{\underset{0}{F}}} = \frac{\dfrac{a x_1^3}{3} + \dfrac{b x_1^4}{4} + \dfrac{c x_1^5}{5} + \cdots + \dfrac{k x_1^{p+3}}{p+3}}{\dfrac{a x_1}{1} + \dfrac{b x_1^2}{2} + \dfrac{c x_1^3}{3} \pm \cdots + \dfrac{k x^{p+1}}{p+1}}.$$

Besonders häufig findet dies Anwendung auf die einfachen Parabeln höherer Ordnung, wie

$$y = cx^2, \quad y = dx^3, \quad y = ex^4, \quad \text{u. s. w.}$$

Bei $y = cx^2$ ergiebt sich

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{c \cdot x_1^3}{3},$$

was der 3te Teil des entsprechenden Rechtecks ist;

$$\overset{x_1}{\underset{0}{M}} = \frac{c x_1^4}{4}, \quad x_s = \frac{\dfrac{c x_1^4}{4}}{\dfrac{c x_1^3}{3}} = \frac{3}{4} x_1, \quad \overset{x_1}{\underset{0}{T}} = \frac{c x_1^5}{5}, \quad x_t^2 = \frac{\dfrac{c x_1^5}{5}}{\dfrac{c x_1^3}{3}} = \frac{3}{5} x_1^2.$$

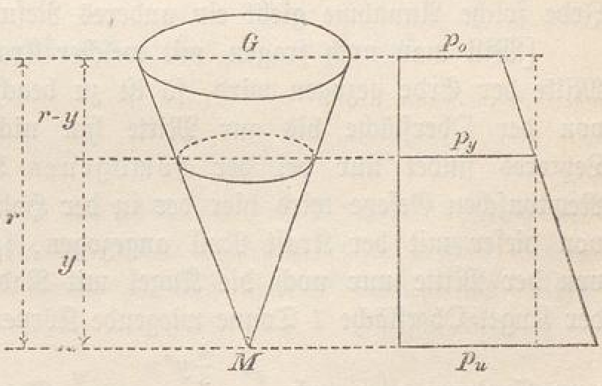
Die Bedeutung dieser Dinge liegt in der Mechanik.]

b) Eine kosmische Aufgabe.

Aufgabe. Das spezifische Gewicht der Erde sei an der Oberfläche 2,5 und im Durchschnitt 5,6. Nach der Mitte hin nehme es gleichmäßig zu. Wie groß ist es im Mittelpunkte?

Auflösung. Man denke sich einen Kegel (eigentlich Sektor) aus der Erdkugel geschnitten. Ist seine obere Fläche G, so hat er in Höhe y den Querschnitt

Fig. 127.



1) $G_y = G \frac{y^2}{r^2}$.

Ist das spezifische Gewicht unten p_u, oben p_o, so ergiebt sich für die Höhe y bei regelmäßiger Zunahme nach unten

$$(p_u - p_y) : y = (p_y - p_o) : (r - y),$$

folglich

2) $$p_y = p_u - y\frac{p_u - p_o}{r}.$$

Die Schicht in Höhe y fällt nach 1) und 2) ins Gewicht mit

$$G_y \cdot p_y = G\frac{p_u}{r^2}y^2 - G\frac{p_u - p_o}{r^3}y^3.$$

Für die Summe der Schichten von o bis y_1 giebt die Summenformel

3) $$G\frac{p_u}{r^2}\cdot\frac{y_1^3}{3} - G\frac{p_u - p_o}{r^3}\cdot\frac{y_1^4}{4},$$

also für $y_1 = r$

$$Gp_u\frac{r}{3} - G(p_u - p_o)\frac{r}{4} = \frac{Gr}{12}[4p_u - 3p_u + 3p_o] = \frac{Gr}{12}[p_u + 3p_o].$$

Der ganze Kegel fällt aber bei dem mittleren spezifischen Gewicht 5,6 mit $G\frac{r}{3}5{,}6$ ins Gewicht. Ist also $p_o = 2{,}5$, so hat man die Gleichung

$$\frac{Gr}{12}[p_u + 3\cdot 2{,}5] = \frac{Gr}{3}5{,}6,$$

also

4) $$p_u + 3\cdot 2{,}5 = 4\cdot 5{,}6,\quad p_u = 22{,}4 - 7{,}5 = \mathbf{14{,}9}.$$

Nach dieser Annahme wäre also das spezifische Gewicht im Erdcentrum $p' = 14{,}9$ zu setzen.

Selbstverständlich kann man beliebige andere Annahmen über die Zunahme des spezifischen Gewichtes nach der Mitte hin machen. Jede solche Annahme giebt ein anderes Resultat.

[Will man noch fragen, mit welcher Kraft dieser Kegel nach der Mitte der Erde gezogen wird, so ist zu beachten, daß die Anziehung von der Oberfläche bis zur Mitte hin nicht regelmäßig abnimmt. Letzteres findet nur bei der homogenen Kugel statt. Nach dem Newtonschen Gesetze wird hier der in der Hohlkugel befindliche Körper von dieser mit der Kraft Null angezogen, so daß in Entfernung y von der Mitte nur noch die Kugel mit Radius y wirkt. Jeder an der Kugel-Oberfläche 1 Tonne wiegende Körper wiegt in Entfernung y vom Centrum nur noch $\frac{r^2}{y^2}\cdot\frac{\frac{4}{3}y^3\pi}{\frac{4}{3}r^3\pi} = \frac{y}{r}$ Tonnen.

Handelt es sich nicht um einen Kegel, sondern um einen Cylinder, der sich nicht, wie der Kegel, in der umgebenden Erdmasse festkeilt, und ist sein Querschnitt 1 qm, so wird er bei dem spezifischen Gewichte 5,6 von der Erde so angezogen, daß jede Meterschicht mit $5{,}6\,\frac{y}{r}$ Tonnen, der ganze Cylinder mit $\frac{5{,}6}{r} \cdot \frac{y^2}{2}$, d. h. für $y = r$ mit $\frac{5{,}6\,r}{2} = 2{,}8\,r = 2{,}8 \cdot 860 \cdot 7500 = 18\,060\,000$ Tonnen angezogen werden. Dies würde dann auch der Druck im Erdcentrum sein.

Wendet man zur Vermeidung naheliegender Versehen die nötige Vorsicht an, so kann man die Rechnung auch für die oben angenommene Massenverteilung durchführen.

Auch die Frage, mit welcher Geschwindigkeit ein Körper sich an jeder Stelle eines luftleeren Schachtes bewegen würde, der bis zum Mittelpunkte der Erde reicht, kann für beide Massenverteilungen beantwortet werden.

Man hat nur nötig, die Formel für die Stärke der Anziehung jeder Kugel mit Radius y an ihrer Oberfläche zu berechnen und für die entsprechende Parabel höherer Ordnung $\overset{r}{\underset{y}{F}}$ zu bilden. Dies ist aus Gründen der Mechanik gleich der gewonnenen Arbeitswucht $\frac{mv^2}{2}$ (lebendige Kraft) der angezogenen Masse m zu setzen, so daß man v für jede Stelle berechnen kann. Hier würde dies zu weit führen.]

8) Andeutungen über ganze rationale Funktionen*). (Tangentenproblem und Nullstellen.)

Nach Teil II, Anhang 8) liegen die höchsten und niedrigsten Stellen der Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

da, wo die Gleichung

$$b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nkx^{n-1} = 0$$

erfüllt ist. Dort sind die Tangenten der Kurve horizontal.

Da für uns vorläufig nur Gleichungen bis zum dritten Grade lösbar sind, so darf die Kurve zunächst den 4ten Grad noch nicht übersteigen.

*) Anwendung sollen diese Andeutungen vorläufig nicht finden. Ihre Absicht ist, zu zeigen, daß die Elemente zur erschöpfenden Behandlung des Gebietes nicht ausreichen. Es handelt sich also nicht etwa um Einführung der Differentialrechnung.