Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

e) Andeutungen über ganze rationale Funktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

und ist sein Querschnitt 1 qm, so wird er bei dem spezifischen Gewichte 5,6 von der Erde so angezogen, daß jede Meterschicht mit $5{,}6\,\frac{y}{r}$ Tonnen, der ganze Cylinder mit $\frac{5{,}6}{r}\cdot\frac{y^2}{2}$, d. h. für $y = r$ mit $\frac{5{,}6\,r}{2} = 2{,}8\,r = 2{,}8 \cdot 860 \cdot 7500 = 18\,060\,000$ Tonnen angezogen werden. Dies würde dann auch der Druck im Erdcentrum sein.

Wendet man zur Vermeidung naheliegender Versehen die nötige Vorsicht an, so kann man die Rechnung auch für die oben angenommene Massenverteilung durchführen.

Auch die Frage, mit welcher Geschwindigkeit ein Körper sich an jeder Stelle eines luftleeren Schachtes bewegen würde, der bis zum Mittelpunkte der Erde reicht, kann für beide Massenverteilungen beantwortet werden.

Man hat nur nötig, die Formel für die Stärke der Anziehung jeder Kugel mit Radius y an ihrer Oberfläche zu berechnen und für die entsprechende Parabel höherer Ordnung $\overset{r}{\underset{y}{F}}$ zu bilden. Dies ist aus Gründen der Mechanik gleich der gewonnenen Arbeitswucht $\frac{mv^2}{2}$ (lebendige Kraft) der angezogenen Masse m zu setzen, so daß man v für jede Stelle berechnen kann. Hier würde dies zu weit führen.]

8) Andeutungen über ganze rationale Funktionen*). (Tangentenproblem und Nullstellen.)

Nach Teil II, Anhang 8) liegen die höchsten und niedrigsten Stellen der Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

da, wo die Gleichung

$$b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nkx^{n-1} = 0$$

erfüllt ist. **Dort sind die Tangenten der Kurve horizontal.**

Da für uns vorläufig nur Gleichungen bis zum dritten Grade lösbar sind, so darf die Kurve zunächst den 4ten Grad noch nicht übersteigen.

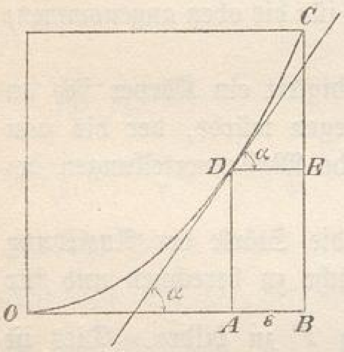
*) **Anwendung** sollen diese Andeutungen vorläufig nicht finden. Ihre Absicht ist, zu zeigen, daß die Elemente zur erschöpfenden Behandlung des Gebietes nicht ausreichen. Es handelt sich also nicht etwa um Einführung der Differentialrechnung.

Beispiele. Wo liegen die Maxima und Minima der Kurven

$$y = 2 - 3x + 5x^2; \quad y = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3;$$
$$y = 2 - 3x + 4x^2 - 5x^3 + x^4?$$

Man kann nun die Frage stellen, welche Richtungen die Tangenten an jeder Stelle $x = x_1$ haben.

Fig. 128.



Zunächst handle es sich um die einfache Parabel höherer Ordnung $y = x^n$. In Figur 126 denke man sich für diese Kurve die Sehne DC gezeichnet. Es sei nun $OA = x$, also $AD = x^n$, es sei ferner $AB = \varepsilon$, also $OB = (x + \varepsilon)$ und $BC = (x + \varepsilon)^n$. Dann ist

$$\tan\alpha = \frac{EC}{DE} = \frac{BC - AD}{\varepsilon}$$
$$= \frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x}.$$

Die Division läßt sich durchführen und giebt für ganzes positives n

$$\tan\alpha = (x+\varepsilon)^{n-1} + (x+\varepsilon)^{n-2} \cdot x + (x+\varepsilon)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots$$
$$+ (x+\varepsilon)x^{n-2} + x^{n-1}.$$

Hier läßt sich jede Klammer nach dem binomischen Satze entwickeln, z. B.

$$(x+\varepsilon)^{n-1} = x^{n-1} + \frac{n-1}{1!}x^{n-1}\varepsilon + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}x^{n-2}\varepsilon^2$$
$$+ \cdots + \varepsilon^{n-1}.$$

Läßt man aber ε unendlich klein werden, so strebt diese Summe der Grenze x^{n-1} zu. Man darf aber ε bei endlichem n auch schon in der Reihe für $\tan\alpha$ streichen. Demnach hat $\tan\alpha$ für $\varepsilon = 0$ einen bestimmten Grenzwert

$$\tan\alpha = x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + x^{n-3} \cdot x^2 + \cdot\cdot + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Für $\varepsilon = 0$ wird aber die Sehne DC verschwindend klein, d. h. sie fällt mit der Tangente der Kurve zusammen. Folglich:

Die Parabel höherer Ordnung $y = x^n$ hat an der Stelle x eine Tangentenrichtung, die sich aus der Gleichung $\tan\alpha = nx^{n-1}$ ergiebt.

Zeige ebenso, daß es sich für die Kurve $y = bx^n$ um $\tan\alpha = nbx^{n-1}$ handelt. Für die Kurve $y = bx^m + cx^n$ handelt es sich ebenso um

$$\tan\alpha = \frac{[b(x+\varepsilon)^m + c(x+\varepsilon)^n] - (bx^m + cx^n)}{(x+\varepsilon) - x}$$

$$= b\frac{(x+\varepsilon)^m - x^m}{(x+\varepsilon) - x} + c\frac{(x+\varepsilon)^n - x^n}{(x+\varepsilon) - x},$$

also nach Obigen für $\varepsilon = 0$ um

$$\tan\alpha = mbx^{m-1} + ncx^{n-1},$$

für die Kurve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

also um

$$\tan\alpha = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nk^{n-1}.$$

Die Kenntnis dieses Satzes hat die Entwickelung der Mathematik in außerordentlicher Weise beeinflußt, da es nahe lag, den Wert von $\tan\alpha$ auch für beliebige Funktionen zu untersuchen.

Beispiel. Untersuche die Tangentenrichtung für $y = 2 + 3x - 5x^2$, $y = 3 - x + 2x^2 - 4x^3$ an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3,$ u. s. w.

Findet man Stellen, wo die Kurve

1) $$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

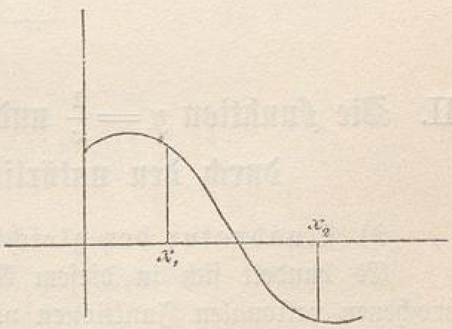
die X-Achse schneidet, so ist durch das betreffende x die Gleichung

2) $$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$$

erfüllt, d. h. man hat eine reelle Lösung (Wurzel) der Gleichung 2) gefunden.

Wird die X-Achse von der Kurve nirgends geschnitten, so hat die Gleichung keine reellen Lösungen, sondern nur imaginäre oder komplexe.

Fig. 129.



Für jedes endliche reelle x hat die Kurve eine endliche Ordinate, aber nur diese eine. Ist also z. B. die Ordinate bei x_1 positiv, bei x_2 negativ, so muß die Kurve zwischen x_1 und x_2 die X-Achse geschnitten haben, d. h. zwischen x_1 und x_2 muß sich eine reelle Wurzel der Gleichung 2) befinden. Durch probeweises Einsetzen von solchen x, die zwischen x_1 und x_2 liegen, kann man sich der wirklichen Wurzel (durch Einschnürung) bis zu beliebiger Genauigkeit nähern.