Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

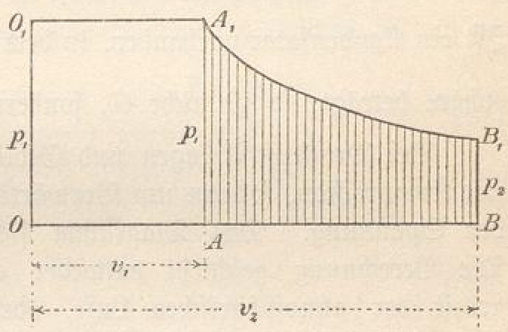
b) Anwendungen auf Expansions- und Kompressionsarbeit

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Nimmt man eine größere Zahl von Streifen, so wird die Genauigkeit weit größer. Die Möglichkeit, die Logarithmen zu berechnen, darf damit als vorläufig sicher gestellt betrachtet werden.

12) Eine der wichtigsten Anwendungen dieser Formel ist die Berechnung der Expansions- und Kompressionsarbeit von Gasen unter Voraussetzung konstanter Temperatur, d. h. unter Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes. (Vgl. Teil II, Geom. 105.)

Fig. 135.



Stellt p_1 die Anfangsspannung, v_1 das Anfangsvolumen dar, p_2 die Schlußspannung, v_2 das Schlußvolumen, so ist nach Mariotte

$\frac{p_1}{p_2}=\frac{v_2}{v_1}$ oder $p_1v_1=p_2v_2$.

Nun ist

$$OAA_1O_1 = p_1v_1, \quad ABB_1A_1 = OAA_1O_1 \cdot {}^e\lg\frac{v_2}{v_1} = p_1v_1\,{}^e\lg\frac{v_2}{v_1}.$$

Folglich:

$$\textbf{Expansionsarbeit} = p_1v_1\,{}^e\lg\frac{v_2}{v_1} = p_1v_1\left({}^{10}\lg\frac{v_2}{v_1}\right)\cdot\frac{1}{m},$$

wo $m = 0{,}4342945$ der Modul der Briggschen Logarithmen ist.

Dieselbe Formel gilt für die Kompressionsarbeit, nur ist dabei $v_2 < v_1$. Bei Dampf- und Druckluft-Maschinen stellt OAA_1O_1 zugleich die leicht zu berechnende Volldruckarbeit V vor, ABB_1A_1 gleichfalls die Expansionsarbeit; setzt man l_1 und l_2 statt v_1 und v_2 (Volldruckhub und gesamter Hub des Kolbens), so wird die Gesamtarbeit $= V + V\cdot{}^e\lg\frac{l_2}{l_1} = V\left[1+{}^e\lg\frac{l_2}{l_1}\right] = V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right]$. Rechnet man den Arbeitsdruck in Kilogrammen pro qm, die Hubhöhe in Metern, und ist n die Tourenzahl der Maschine in der Minute bei hin- und rückwirkendem Dampfdruck, so ist die theoretische Leistung der Maschine in Pferdestärken

$$N = \frac{2n}{60\cdot 75}V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right] = \frac{n}{2250}V\left[1+\frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right].$$

Das Dargestellte ist aber die Arbeit bezw. Leistungsfähigkeit unter der Annahme, daß jenseits des Kolbens sich ein luftleerer Raum befindet. Bei Auspuffmaschinen hat man aber den Gegendruck der Atmosphäre zu berücksichtigen. Ist G die leicht zu berechnende Gegenarbeit derselben pro Hub, so ist die theoretische Nutzarbeit für jeden Hub

$$V\left[1 + \frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right] - G;$$

also ist die Anzahl der Pferdestärken

$$N = \frac{n}{2250}\left[V\left(1 + \frac{1}{m}\,{}^{10}\lg\frac{l_2}{l_1}\right) - G\right].$$

Ist ein Kondensator vorhanden, in dem die mittlere Spannung $\frac{1}{k}$ Atmosphäre beträgt, so ist nicht G, sondern $\frac{1}{k}\,G$ abzuziehen.

Bei Druckluft-Anlagen und Gebläsemaschinen handelt es sich erst um Kompression, sodann um Vorwärtstreiben der Luft ohne Erhöhung der Spannung. Das Diagramm sieht also theoretisch ebenso aus. Die Berechnung geschieht entweder ohne Berücksichtigung der Mitarbeit der atmosphärischen Luft, oder, wie es in der Praxis geschehen muß, unter Berücksichtigung derselben.

Hier muß man für die Praxis einen erfahrungsmäßigen Prozentsatz zuschlagen, während bei der Dampfmaschine und Heißluftmaschine ein gewisser Prozentsatz abzuziehen ist, wenn man den wirklichen Effekt beurteilen will.

Beispiele. a) Bei der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ soll $\overset{2}{\underset{1}{F}}$, $\overset{3}{\underset{2}{F}}$, $\overset{5}{\underset{2}{F}}$ berechnet werden. Die Auflösungen sind 0,69314 . . ., bezw. 0,40546 . . ., 2,74887 . . .

b) Bei einer Auspuffmaschine habe der Kolben den Durchmesser $d = 0{,}6$ m, die Hubhöhe $l = 1{,}2$ m, die Spannung $p = 5$ Atmosphären. Ein Kondensator sei nicht vorhanden. Wie groß ist die theoretische Leistung in Pferdestärken bei $\frac{1}{3}$ Füllung, wenn das Mariottesche Gesetz zu Grunde gelegt wird und das Schwungrad 65 Touren macht?

Auflösung. Rund 253 Pferdestärken. (Also bei 60 % wirklichem Nutzeffekt rund 152 Pferdestärken.)

c) Dieselbe Aufgabe für den Fall, daß ein Kondensator vorhanden ist, der im Durchschnitt $\frac{1}{15}$ Atmosphäre Gegendruck giebt.

Auflösung. Theoretisch rund $347\frac{1}{2}$ Pferdestärken, bei 60 % Nutzeffekt $208\frac{1}{2}$ Pferdestärken.

Aufgabe. Wie vereinfacht sich die Formel bei Auspuffmaschinen, wenn bei $\frac{1}{n_1}$ Cylinder-Füllung mit n_1 Atmosphären begonnen wird?

Auflösung. Für jeden Hub und die Arbeitsleistung der Auspuffmaschine

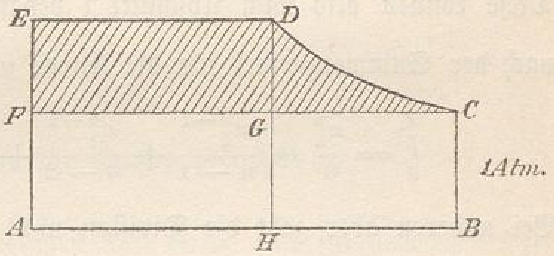
$$V + V \cdot {}^e\lg \frac{n}{1} - n \cdot \frac{V}{n} = V \cdot {}^e\lg \frac{n}{1}.$$

Also

$$N = \frac{n}{2250} \cdot {}^e\lg n_1 = \frac{n}{2250} \cdot \frac{1}{m}\, {}^{10}\lg n_1 .$$

Bemerkung. Dieser Fall ist technisch nicht zulässig*), weil durch die Arbeit Abkühlung und Spannungsverminderung eintritt, so daß am Schluß weniger als eine Atmosphäre Spannung herrscht. Das Diagramm stimmt aber überein mit dem Diagramm für den Vorgang in Kompressionscylindern. Zur Kompression würde nötig sein die Arbeit $BCDH$, zum Vorwärtstreiben der komprimierten Luft die Arbeit $HDEA$, die Atmosphäre hilft mit der Arbeit $BCFA$. Folglich ist zum Komprimieren und Vorwärtstreiben nötig die Arbeit $CDEF$.

Fig. 136.



Aufgabe. Ein Gebläsecylinder oder Druckluftcylinder habe 1 m Kolbendurchmesser und 2 m Hub. Die Luft soll auf $1\frac{1}{2}$ Atmosphären zusammengepreßt und dann aus dem Cylinder getrieben werden. Wie groß ist die Kompressionsarbeit unter Mitwirkung der Atmosphäre? (Auflösung: 1170,9 mkg). Wie groß die Arbeit für das Hinaustreiben unter Mitwirkung der Atmosphäre? (Auflösung: 5410 mkg). Wie groß die Gesamtarbeit? (Auflösung: 6581,8 mkg).

Die Formel $V \cdot {}^e\lg 1{,}5 = \frac{V \cdot {}^{10}\lg 1{,}5}{m}$ liefert ebenfalls direkt 6581,8 mkg, sobald unter V die Arbeit $HDEA$ oder $BCFA$ verstanden wird.

Macht die Maschine doppelwirkend 40 Touren, so sind theoretisch erforderlich ~ 117 Pferdestärken; bei 25 % Zuschlag wegen der Nebenwiderstände ~ 146 Pferdestärken.

Aufgabe. Wie viel Leistungsfähigkeit ist nötig, um pro Sekunde 1 cbm Luft auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$ des Raumes zusammenzupressen und unter konstantem Gegendruck aus dem Cylinder zu treiben?

*) Weiter unten wird das adiabatische Diagramm berechnet.

Auflösung. Man denke sich den Cylinderkolben von 1 qm Querschnitt und 1 m Gesamthub. Die obige Formel giebt dann die theoretische Leistungsfähigkeit von 95,5 Pferdestärken, $151\frac{1}{3}$ Pferdestärken, 191 Pferdestärken für die treibende Maschine.

---

13) Bemerkung über rationale gebrochene Funktionen. Gewisse rationale gebrochene Funktionen lassen sich auf ganze rationale zurückführen, z. B.

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1.$$

Diese können also nach Abschnitt I behandelt werden. So ist z. B. nach der Summenformel für die Kurve $y = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^n}{n} + \frac{x_1^{n-1}}{n-1} + \frac{x_1^{n-2}}{n-2} + \cdots + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1}{1}.$$

Bei anderen aber geht die Division nicht auf, z. B. bei

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \left(\frac{x^{n+1}}{1-x}\right).$$

Darf man das Restglied für $n = \infty$ vernachlässigen, so hat man eine konvergente unendliche Reihe, mit deren Gliedern vermutlich ebenso verfahren werden darf, wie mit einer ganzen rationalen Funktion. Diese Berechtigung ist genau zu untersuchen. Hat aber das Restglied nicht die Grenze 0, so ist die unendliche Reihe unbrauchbar.

Um also einen Fortschritt zu ermöglichen, hat man die Theorie der unendlichen Reihen aufzustellen. Dies soll im folgenden Abschnitte angebahnt werden.

III. Allgemeines über die unendlichen Reihen.

a) Rückblick auf die bereits bekannten Reihen.

14) In Folgendem soll unter „Reihe" im Allgemeinen eine „unendliche Reihe" verstanden werden.

In Teil II wurden folgende Reihen summiert:

1) Die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \text{ jedoch nur für } -1 < x < +1.$$